

Mécanique des fluides

Centrale hydroélectrique de Grand'Maison

Le barrage de Grand'Maison est un barrage hydroélectrique situé dans le département de l'Isère. Avec une puissance de 1800 MW à débit maximal, l'usine qui lui est associée forme le plus puissant ensemble hydroélectrique français, correspondant à 9% de la puissance du parc hydraulique exploité par EDF en France. La figure 1 donne une vue d'ensemble de l'installation.

La retenue de Grand'Maison peut contenir près de 140 millions de m^3 d'eau, emmenée vers la retenue du Verney par une galerie d'amenée et trois conduites forcées construites en parallèle. La conduite d'amenée descend en pente douce depuis le barrage haut jusqu'à une cheminée d'équilibre de 200 m de hauteur qui permet de réguler la pression à l'ouverture et la fermeture des vannes (dispositif anti coup de bélier). À partir de ce lieu, l'eau est amenée à l'altitude du Verney par les trois conduites forcées de grande pente.

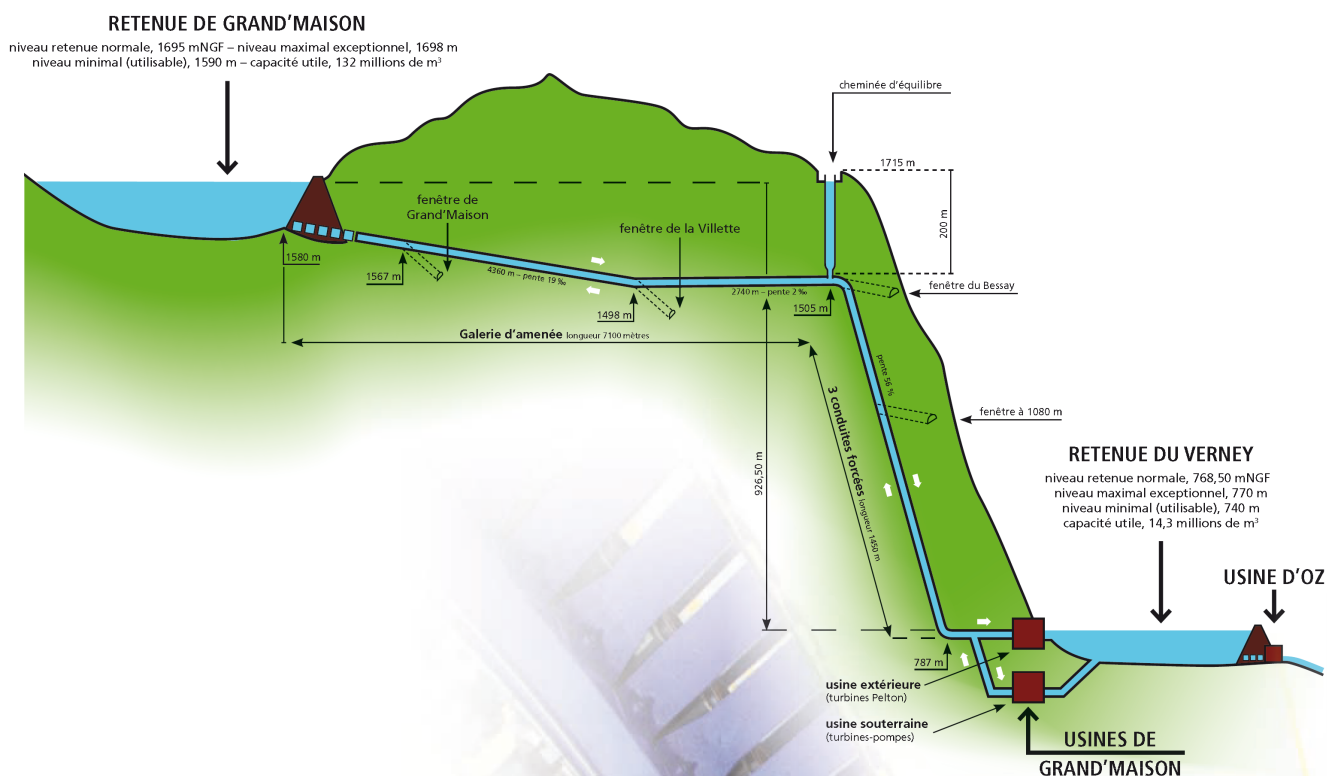
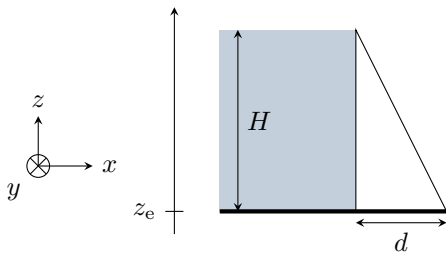


Figure 1 – Schéma général de l'installation hydroélectrique de Grand-Maison. Source : EDF.

Hypothèses et données :

- ▷ Seul le régime permanent est considéré dans ce problème ;
- ▷ L'eau est un liquide incompressible, de masse volumique $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$;
- ▷ La pression atmosphérique est supposée uniforme, égale à $P_0 = 1 \text{ bar}$;
- ▷ L'axe z est vertical orienté vers le haut, d'origine $z = 0$ au niveau du Verney où émergent les conduites forcées ;
- ▷ Le point d'entrée de la conduite d'amenée se trouve à une altitude $z_e = 800 \text{ m}$ au dessus du Verney et sous une hauteur d'eau $H = 140 \text{ m}$.

A - Dimensionnement du barrage amont



Le barrage amont est un barrage poids (voir ci-contre), constitué d'une structure en béton de longueur $L = 550$ m dans la direction (Oy) dont la coupe transversale peut être modélisée par un triangle rectangle de hauteur $H = 140$ m égale au niveau d'eau maximal du barrage et de base d que l'on cherche à dimensionner.

1 - Justifier qualitativement que l'eau dans la retenue amont peut être supposée en équilibre hydrostatique.

2 - Montrer que le champ de pression dans la retenue amont est donné par

$$P(z) = P_0 + \rho g(z_e + H - z).$$

3 - Montrer que la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage vaut

$$\vec{F}_p = \left(P_0 + \rho g \frac{H}{2} \right) HL \vec{e}_x.$$

4 - Exprimer le poids \vec{P} du barrage. On notera $\rho' = 3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique du béton.

5 - Un barrage poids doit être dimensionné de telle sorte que $F_p < \frac{3}{4}P$. En déduire la valeur minimale de d .

B - Bilan de puissance

Pour aller de la retenue de Grand-Maison jusqu'à l'usine hydroélectrique, l'eau circule d'abord dans une conduite d'amenée de diamètre $D = 7$ m et de longueur $L = 7$ km, jusqu'à la verticale de la cheminée d'équilibre. Cette conduite d'amenée se sépare ensuite en trois conduites forcées identiques, de diamètre $d < D$ et de longueur $\ell = 1500$ m. Chaque conduite forcée est envoyée vers un bloc turbine en sortie duquel l'eau a une vitesse nulle et une pression égale à la pression atmosphérique. Le barrage fonctionne de telle sorte que la vitesse de l'eau est d'environ $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans la galerie d'amenée et $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans les conduites forcées.

6 - Déterminer le débit volumique Q entre la retenue de Grand'Maison et la retenue du Verney. En déduire que les conduites forcées ont un diamètre $d \simeq 2,4$ m. On prendra $1/\sqrt{3} \simeq 0,6$.

On rappelle que pour un système à plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties dans lequel s'écoule un fluide incompressible, la relation de Bernoulli en l'absence de pertes de charge et de pièces mobiles s'écrit sous la forme

$$\sum_{\text{entrées } i} Q_i \left(\frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + gz_i \right) = \sum_{\text{sorties } j} Q_j \left(\frac{P_j}{\rho} + \frac{V_j^2}{2} + gz_j \right),$$

où Q désigne le débit de l'écoulement et V la vitesse moyenne (vitesse débitante).

7 - En adaptant cette relation, déterminer la puissance maximale fournie aux turbines.

8 - Définir le phénomène de perte de charge. Rappeler ce qui distingue les pertes de charge régulières et singulières.

Les pertes de charge régulières peuvent être calculées par la relation empirique de Darcy-Weisbach,

$$h^* = \lambda \frac{V^2}{2gD} L,$$

avec V la vitesse de l'écoulement, D le diamètre et L la longueur de la conduite dans laquelle il a lieu, et λ un coefficient de perte de charge sans dimension. La valeur de λ peut être déterminée à partir du diagramme de Moody, représenté figure 2. Elle dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement et/ou de la rugosité relative de la conduite ε_r , définie comme le rapport entre la rugosité absolue ε (hauteur caractéristique des aspérités sur la paroi) et le diamètre D , $\varepsilon_r = \varepsilon/D$.

9 - Calculer le nombre de Reynolds dans la conduite d'amenée. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

10 - La conduite d'amenée est en béton, de rugosité $\varepsilon = 0,7$ mm. Déterminer le coefficient de perte de charge λ .

11 - En déduire la perte de charge régulière totale dans la conduite d'amenée, exprimée en hauteur d'eau équivalente h_a^* .

La perte de charge dans chacune des conduites forcées se calcule par un raisonnement analogue et vaut $h_f^* = 55$ m.

12 - En déduire la puissance réellement fournie par l'écoulement aux turbines.

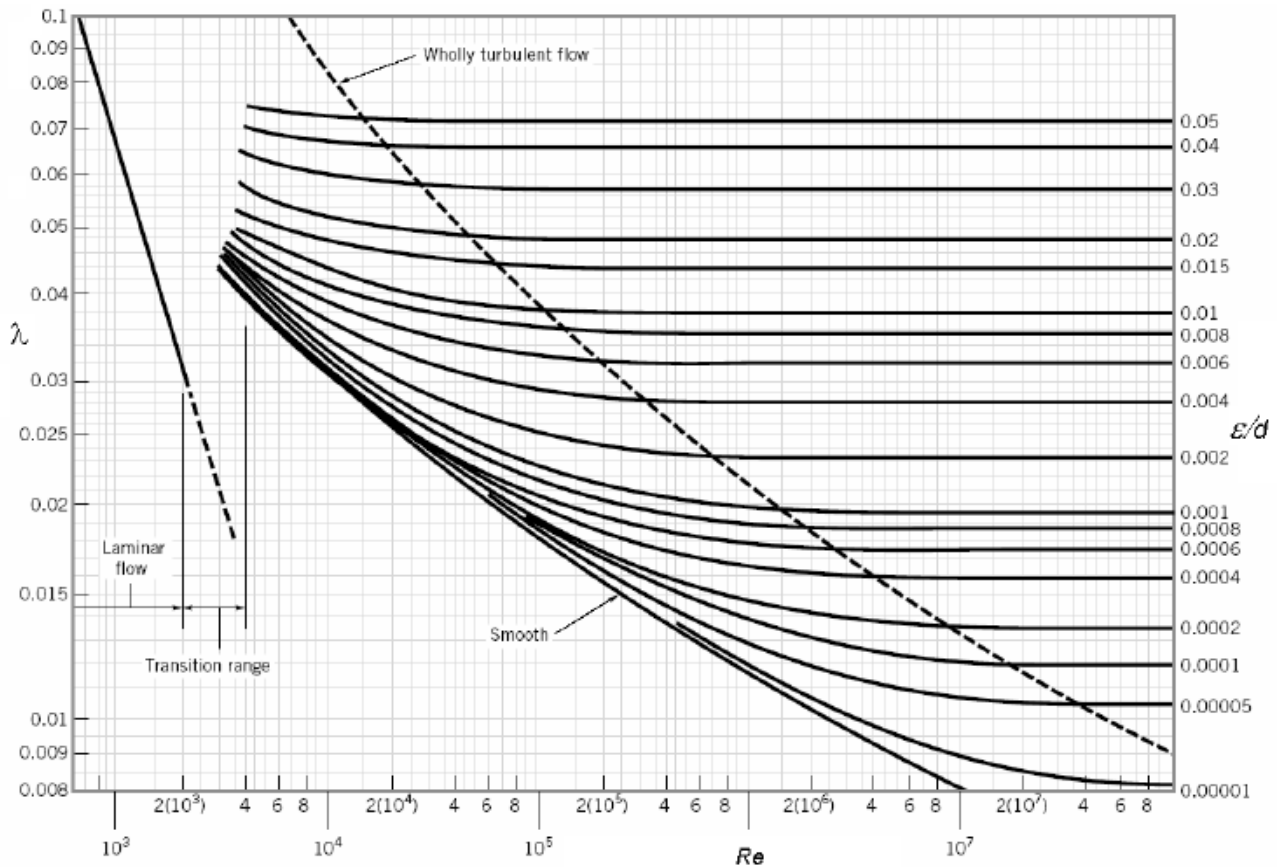


Figure 2 – Diagramme de Moody.

C - Fonctionnement en pompage-turbinage

Les deux retenues de Grand'Maison (en amont) et du Verney (en aval) ont la particularité de constituer une station de transfert d'énergie par pompage, abrégée STEP. Certaines des turbines de l'installation de Grand'Maison peuvent également fonctionner en pompe et permettent de remonter l'eau de la retenue du Verney vers la retenue de Grand'Maison avec un débit $Q' = 135 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Lorsque la production électrique est supérieure à la demande, l'eau est ainsi remontée (phase de pompage) puis peut être libérée pour produire à nouveau de l'électricité (phase de turbinage) lorsque la production a baissé : entre temps, l'énergie est stockée sous forme d'énergie potentielle. Cela permet d'optimiser l'adéquation entre production et consommation, ce qui est un enjeu crucial pour l'insertion massive des sources renouvelables intermittentes (principalement solaire et éolien) sur les réseaux électriques.

13 - Expliquer simplement pourquoi le rendement de l'opération de pompage turbinage doit être estimé à partir des travaux massiques plutôt que des puissances indiquées.

14 - En exploitant le résultat de la question 12, déterminer le travail indiqué massique fourni par l'eau à la turbine lors de la phase de turbinage.

15 - Déterminer le travail indiqué massique à fournir lors de la phase de pompage. Pour le débit Q' , la perte de charge totale vaut $h'^* = 100 \text{ m}$.

16 - En déduire le rendement énergétique r d'un cycle de pompage-turbinage.

D - Cavitation

La cavitation est un phénomène très néfaste pour la durée de vie des conduites, et qu'il est absolument indispensable de neutraliser lors de la conception d'un barrage. Pour le comprendre physiquement, on suppose pour cette dernière partie que l'eau ne s'écoule que dans une unique conduite de diamètre D uniforme et on néglige les pertes de charge.

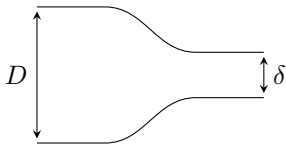
17 - En supposant que cette conduite débouche à l'air libre, déterminer la vitesse de l'eau en sortie de barrage.

18 - Montrer qu'au sein des conduites la pression $P(z)$ évolue avec l'altitude selon

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right),$$

avec z_0 à exprimer en fonction des données. Montrer que la pression s'annule à une hauteur z à estimer numériquement. Que penser physiquement de ce résultat ?

19 - En s'appuyant sur un diagramme (P, T) à tracer sur la copie, expliquer le phénomène physique qui a lieu avant que la pression ne s'annule. Comment nomme-t-on la pression à laquelle il a lieu ?



Pour contrer la cavitation, on dispose à l'extrémité libre de la conduite une tubulure de longueur négligeable et de section décroissante appelée injecteur, schématisé ci-contre, de diamètre de sortie δ .

20 - Exprimer $P(z)$ en présence de l'injecteur et en déduire que la cavitation disparaît si δ est plus faible qu'une valeur limite δ_0 .

21 - Justifier que le diamètre de l'injecteur permet de réguler le débit de l'écoulement dans toute l'installation.

Éléments de correction

A - Dimensionnement du barrage amont

1 Le volume contenu dans la retenue est très supérieur à tous les autres, on peut donc négliger les variations de hauteur d'eau et considérer la retenue en équilibre hydrostatique.

2 D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{d'où} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_{z_e+H}^z dz$$

en utilisant la condition limite au niveau de la surface libre en $z = z_e + H$. Ainsi,

$$P(z) = P_0 + \rho g(z_e + H - z).$$

3 En chaque point du barrage, la force élémentaire est dirigée selon \vec{e}_x , d'où

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \iint_{\text{barrage}} P(z) dS \vec{e}_x \\ &= \iint [P_0 + \rho g(z_e + H - z)] dy dz \vec{e}_x \\ &= \int_0^L dy \times \int_{z_e}^{z_e+H} [P_0 + \rho g(z_e + H - z)] dz \times \vec{e}_x \\ &= L \left[P_0 z + \rho g(z_e + H)z - \rho g \frac{z^2}{2} \right]_{z_e}^{z_e+H} \vec{e}_x \\ &= L (P_0 + \rho g(z_e + H)) H - L \frac{\rho g}{2} ((z_e + H)^2 - z_e^2) \\ &= (P_0 + \rho g(z_e + H)) HL - \frac{\rho g}{2} (H^2 + 2z_e H) L \\ \vec{F}_p &= \left(P_0 + \rho g \frac{H}{2} \right) HL \vec{e}_x. \end{aligned}$$

Poser le changement de variable $z' = z_e + H - z$ permet de mener le calcul plus rapidement et efficacement.

4 Le barrage a un volume $HdL/2$, d'où un poids

$$\vec{P} = \rho' \frac{HLd}{2} \vec{g}.$$

5 La condition s'écrit

$$\left(P_0 + \rho g \frac{H}{2} \right) HL < \frac{3}{4} \rho' \frac{HLd}{2} g$$

ce qui conduit à

$$d > \frac{8}{3\rho'g} \left(P_0 + \rho g \frac{H}{2} \right) = 70 \text{ m.}$$

B - Bilan de puissance

6 Le débit volumique dans la conduite d'amenée vaut

$$Q = v_a \frac{\pi D^2}{4} = 200 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les trois conduites forcées étant identiques, elles sont parcourues par le même débit q tel que

$$Q = 3q.$$

Ainsi, leur diamètre est tel que

$$\frac{Q}{3} = v_f \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{soit} \quad d = \sqrt{\frac{4Q}{3\pi v_f}} = 2,4 \text{ m.}$$

7 Par application de la relation de Bernoulli entre la surface libre de la retenue amont et les sorties des blocs turbines,

$$\sum_{j=1}^3 \rho q \left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + 0 \right) - \rho Q \left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + g(z_e + H) \right) = -\mathcal{P}_{\max}$$

soit

$$\mathcal{P}_{\max} = \rho Q \left(\frac{P_0}{\rho} + g(z_e + H) \right) - 3\rho q \frac{P_0}{\rho}$$

et avec la conservation du débit $Q = 3q$ on obtient

$$\mathcal{P}_{\max} = \rho Q g(z_e + H) = 1900 \text{ MW.}$$

8 On appelle perte de charge la **dissipation d'énergie par viscosité** au sein de l'écoulement. Les pertes de charge régulières ont lieu **tout au long de la conduite**, par frottement visqueux au sein de l'écoulement. Les pertes de charge singulières sont localisées **au voisinage des singularités** de la conduite (coude, etc.) et sont causées principalement par les phénomènes de turbulence au voisinage de ces singularités.

9 Par définition,

$$Re = \frac{V_a D \rho}{\eta} = 3 \cdot 10^7.$$

L'écoulement est donc **fortement turbulent**.

10 La rugosité relative de la conduite est donc $\varepsilon_r = 0,0001$. Par lecture du diagramme de Moody, on en déduit

$$\lambda = 0,014.$$

11 La perte de charge dans la conduite d'amenée vaut donc

$$h_a^* = \lambda \frac{V_a^2}{2gD} L = 18 \text{ m.}$$

12 La perte de charge totale vaut

$$h_{\text{tot}}^* = h_a^* + 3h_f^* \simeq 200 \text{ m.}$$

En reprenant le théorème de Bernoulli comme à la question 7,

$$\sum_{j=1}^3 \rho q \left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + 0 \right) - \rho Q \left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + g(z_e + H) \right) = -\mathcal{P} - \rho Q g h_{\text{tot}}^*$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{P} = \rho Q g(z_e + H - h_{\text{tot}}^*) = 1500 \text{ MW.}$$

C - Fonctionnement en pompage-turbinage

13 Ce qui compte réellement est l'énergie électrique consommée ou produite. Or la puissance indiquée dépend du débit utilisée, au contraire du travail indiqué massique, et le débit n'est pas le même lors du pompage et du turbinage.

14 Par définition,

$$w_{\text{turb}} = \frac{\mathcal{P}}{\rho Q} \quad \text{donc} \quad w_{\text{turb}} = g(z_e + H - h_{\text{tot}}^*) = 7,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

15 Le théorème de Bernoulli appliqué entre la surface libre de la retenue du Verney et celle de la retenue de Grand'Maison donne

$$\left[\left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + g(z_e + H) \right) - \left(\frac{P_0}{\rho} + 0 + 0 \right) \right] = w_{\text{pomp}} - gh'^*$$

d'où

$$w_{\text{pomp}} = g(z_e + H + h'^*) = 10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

16 Le rendement vaut donc

$$r = \frac{w_{\text{turb}}}{w_{\text{pomp}}} = 75 \%$$

Le rendement des STEP est usuellement compris entre 70 et 85 % : l'ordre de grandeur calculé dans ce problème est donc tout à fait raisonnable.

D - Cavitation

17 Supposons l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène. Appliquons le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant allant de la surface libre de la retenue amont à la sortie de la conduite,

$$\frac{P_0}{\rho} + 0 + g(z_e + H) = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0 \quad \text{d'où} \quad v_s = \sqrt{2g(z_e + H)} \simeq 140 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

... ce qui est très supérieur à la vitesse donnée par l'énoncé, signe que ce modèle n'est pas valable pour l'écoulement !

18 En supposant la conduite de section constante, alors par conservation du débit volumique la vitesse v est partout égale à $v_s = \sqrt{2g(z_e + H)}$. D'après le théorème de Bernoulli appliqué le long d'une ligne de courant allant d'un point M situé à une altitude z quelconque à la sortie de la conduite

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0 \quad \text{soit} \quad P(z) = P_0 - \rho g z,$$

ce qui s'écrit bien

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{P_0}{\rho g}.$$

Ainsi, $P(z)$ s'annule pour

$$z_0 = \frac{P_0}{\rho g} = 10 \text{ m}$$

... ce qui tendrait à signifier que pour toutes les altitudes au delà **la pression serait négative**, ce qui n'est pas possible.

19 Avant que la pression ne s'annule, l'eau se vaporise lorsque la pression atteint la **pression de vapeur saturante**, voir figure 3. Pour $z > z_0$, l'eau devrait donc être à l'état de vapeur.

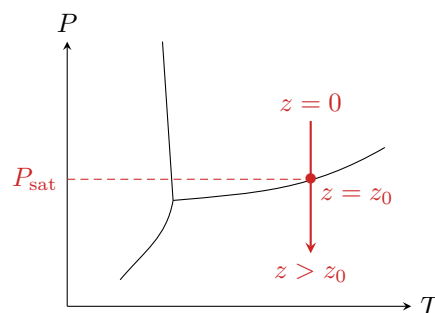


Figure 3 – Diagramme de phase (P, T) de l'eau.

20 La vitesse v_s en sortie de l'injecteur vaut toujours $\sqrt{2g(z_e + H)}$, mais par conservation du débit entre la conduite et l'injecteur,

$$v(z) \frac{\pi D^2}{4} = v_s \frac{\pi \delta^2}{4} \quad \text{soit} \quad v(z) = \frac{\delta^2}{D^2} v_s.$$

Le théorème de Bernoulli appliqué entre les mêmes points donne

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v(z)^2}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0 \quad \text{soit} \quad \frac{P(z)}{\rho} + \frac{\delta^4 v_s^2}{D^4} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + 0$$

et ainsi

$$P(z) = P_0 - \rho gz + \rho \frac{v_s^2}{2} \left(1 - \frac{\delta^4}{D^4} \right).$$

La cavitation disparaît dès lors que $P(z) > P_{\text{sat}}$ pour tout z compris entre 0 et z_e . La pression est la plus faible en haut de la conduite, pour empêcher la cavitation en tout point il faut donc avoir

$$P(z=z_e) > P_{\text{sat}}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} P_0 - \rho g z_e + \rho \frac{v_s^2}{2} \left(1 - \frac{\delta^4}{D^4} \right) &> P_{\text{sat}} \\ P_0 - P_{\text{sat}} - \rho g z_e + \rho g (z_e + H) \left(1 - \frac{\delta^4}{D^4} \right) &> 0 \\ P_0 - P_{\text{sat}} - \rho g z_e &> \rho g (z_e + H) \left(\frac{\delta^4}{D^4} - 1 \right) \\ \frac{\delta^4}{D^4} &< 1 + \frac{P_0 - P_{\text{sat}} - \rho g z_e}{\rho g (z_e + H)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la cavitation disparaît si

$$\delta < \delta_0 = D \left(1 + \frac{P_0 - P_{\text{sat}} - \rho g z_e}{\rho g (z_e + H)} \right)^{1/4}.$$

21 Comme déjà dit dans les questions précédentes, la vitesse de sortie donnée par le théorème de Bernoulli est indépendante de la présence ou non de l'injecteur. Le débit volumique est donc directement proportionnel à la section de l'injecteur ... et il est identique dans toute la conduite.