BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Cours 13 – Séquence 4 : Électromagnétisme *Version prof*

Conduction électrique

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 2 « Magnétostatique ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumiques et linéiques.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge par un bilan dans le cas à une dimension. Citer l'équation locale de la conservation de la charge à l'aide de l'opérateur divergence.
Équations de Maxwell.	Déduire l'équation locale de la conservation de la charge.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 4 « Énergie du champ électromagnétique ».

Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible. L'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale. Densité volumique de puissance Joule.	Analyser les échanges énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

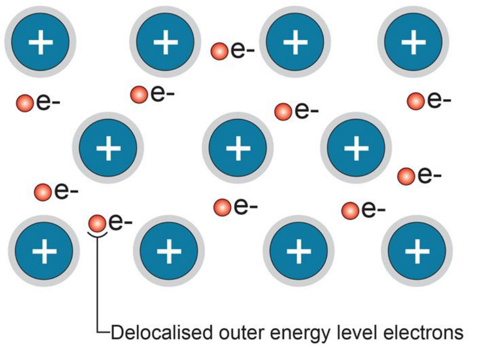
Ces cinq dernières années au concours

- Écrit : épreuve A 2018.
- Oral : de temps en temps.

Les charges à l'origine du champ électrostatique étaient (implicitement) supposées immobiles ... mais ce n'est pas toujours le cas. Nous allons étudier dans ce chapitre les situations où les charges électriques ont un mouvement cohérent à l'échelle mésoscopique, au delà de la simple agitation thermique : le courant électrique.

I - Densité volumique de courant électrique

I.A - Charges libres et charges liées



Dans un cristal métallique, les nœuds du réseau sont occupés par des cations issus des atomes du métal qui ont libéré un ou quelques uns de leurs électrons de valence de telle sorte que le cation ait une structure électronique stable (p.ex. 1 pour le cuivre, 2 pour le zinc). Ces électrons libérés ne sont plus attachés à un atome en propre et peuvent se déplacer librement au sein du cristal : ils sont dits délocalisés. On comprend naturellement que ces électrons libres, appelés **électrons de conduction**, jouent un rôle très différent dans le transport du courant électrique de celui des électrons de cœur, qui demeurent fortement liés au noyau des cations.

Quantitativement : le réseau cristallin est caractérisé par une échelle microscopique $a \sim 0{,}1\,\mathrm{nm}$ (pas du réseau), de l'ordre de la taille d'un atome.

Un porteur de charge au sein d'un matériau est dit **libre** s'il peut se déplacer sur une distance $\ell^\star \gg a$ appelée **libre parcours moyen**.

Au contraire, il est dit **lié** si son mouvement est limité à des distances inférieures ou de l'ordre de a.

> ***Remarque :*** *il existe des milieux dans lesquels tous les porteurs de charge sont libres (solution électrolytique, plasma, etc.) ... et d'autres dans lesquels tous les porteurs de charge sont liés : ce sont les isolants électriques.*

Le courant électrique correspond à un mouvement d'ensemble ordonné des porteurs de charge libres.

I.B - Intensité

Considérons un fil conducteur de section orientée Σ. L'intensité i parcourant le fil est définie par

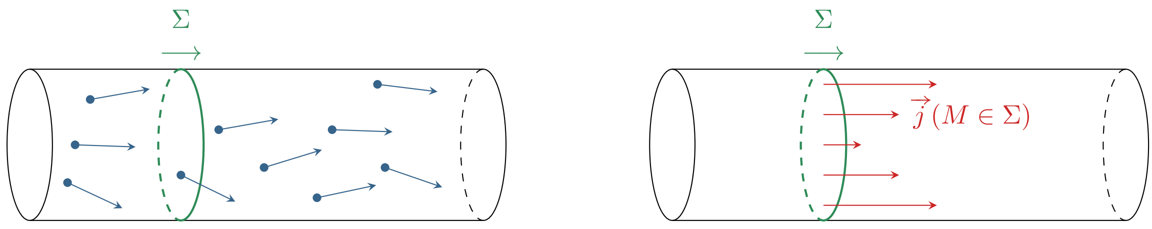
$$i = \frac{\delta q}{\mathrm{d}t}$$

où δq est la charge nette qui traverse Σ pendant $\mathrm{d}t$. L'intensité est une grandeur algébrique, dont le signe dépend du sens conventionnel d'orientation de Σ. Sa définition évoque clairement celle d'un flux, comme peut l'être le débit massique ou volumique en mécanique des fluides.

Par définition, l'intensité du courant électrique au travers d'une surface Σ est égale au flux du vecteur **densité volumique de courant électrique** au travers de cette surface,

$$i = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

La densité volumique de courant s'exprime en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$.



Vision microscopique — Vision mésoscopique

Application 1 : Conducteur parcouru par un courant non uniforme

Considérons un fil conducteur cylindrique de rayon R parcouru par un courant permanent d'intensité I et de densité $\vec{j} = \alpha r^2 \vec{e}_z$. Déterminer l'expression de α en fonction de I et R.

Calcul de flux au travers d'une section du conducteur, de normale $\vec{e}_z$,

$$\begin{aligned} I &= \iint (\alpha r^2 \vec{e}_z) \cdot (r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_z) \\ &= \alpha \times \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= \alpha \times \frac{R^4}{4} \times 2\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}}\,.$$

Espace 1

Cas limite : Si le diamètre du fil est négligeable devant sa longueur, la notion de densité volumique de courant perd de son intérêt : la seule grandeur pertinente est l'intensité. On parle alors de **distribution filiforme**.

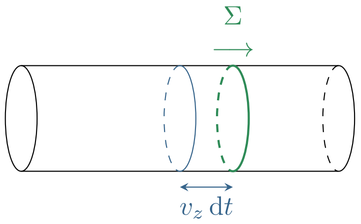
Attention ! La validité du modèle filiforme dépend de la distribution elle-même mais aussi du point d'observation :

- le diamètre du fil doit être très inférieur à sa longueur totale ;
- la distance d'observation doit être très supérieure au diamètre du fil.

I.C - Lien au mouvement d'ensemble des porteurs de charge

- **Démonstration à une dimension**

Pour simplifier, raisonnons dans un cas parfaitement unidimensionnel ($\vec{j} = j_z \vec{e}_z$ uniforme sur une section du fil) et supposons que le conducteur ne possède qu'un seul type de porteurs libres, de charge q et de **densité volumique** n (nombre de porteurs de charge par unité de volume). On raisonne en moyenne : tous les porteurs de charge sont supposés se déplacer à la même vitesse $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$, qui est donc une vitesse moyenne appelée **vitesse d'ensemble** ou **vitesse de dérive**.



Entre t et $t + \mathrm{d}t$, les porteurs avancent de $v_z\,\mathrm{d}t$. Ainsi, les porteurs qui traversent Σ entre t et $t + \mathrm{d}t$ se trouvent initialement tous dans un petit cylindre de section Σ et de longueur $v_z\,\mathrm{d}t$.
On compte donc $n\,\Sigma\,v_z\,\mathrm{d}t$ porteurs qui sont traverser pendant $\mathrm{d}t$, ce qui fait une charge $\delta q = nq\Sigma v_z\,\mathrm{d}t$.
Par identification des deux définitions de l'intensité,
$i \underset{\text{micro}}{=} nqv_z\Sigma \underset{\text{méso}}{=} j_z\Sigma \qquad \text{d'où} \qquad j_z = nqv_z\,.$

Espace 2

- **Généralisation**

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type de porteurs libres de se déplacer dans le conducteur,

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_{\text{libre}}\vec{v}$$

avec q la charge de ces porteurs, n leur densité volumique, et $\vec{v}$ leur vitesse d'ensemble.

Si des porteurs de plusieurs types participent au courant électrique, leurs contributions se somment :

$$\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k = \sum_k \rho_k \vec{v}_k\,.$$

Attention ! Les densités de charge qui interviennent sont celles des porteurs *libres* uniquement.

- **Ordre de grandeur**

Application 2 : Vitesse d'ensemble des électrons dans le cuivre

Calculer la vitesse d'ensemble des électrons dans un fil de cuivre de section 1 mm^2 parcouru par un courant de 1 A. La densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de $10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$.

$||\vec{j}\,|| = nev = \dfrac{I}{S}$ d'où $v = \dfrac{I}{neS}$

Numériquement $v = \dfrac{1}{10^{29} \times 10^{-19} \times 10^{-6}} \simeq 10^{-4}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}1\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$

Espace 3

⇝ si les circuits électriques répondent « instantanément » aux variations de la tension imposée par le générateur, ce n'est pas grâce au déplacement des électrons de conduction !

transport d'information par des OEM à la célérité c, qui met en mouvement les électrons tous en même temps, exactement comme les wagons d'un train.

Espace 4

II - Conservation de la charge

La conservation de la charge électrique est l'un des postulats les plus fondamentaux de la physique.

La charge électrique ne peut être ni créée, ni détruite, mais seulement déplacée d'un point à un autre.

⇝ ce postulat impose une relation entre la densité de courant $\vec{j}$ (= déplacement des charges) et la densité de charge ρ (= stockage des charges) : l'équation de conservation de la charge, qui est une équation reliant les dérivées de $\vec{j}$ et celles de ρ.

II.A - Démonstration par un bilan mésoscopique

- **Démonstration à une dimension**

Pour simplifier, considérons le cas d'un conducteur cylindrique de section S, d'axe (Oz), avec $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$ uniforme sur toute section, voir figure 1. Comme on cherche à établir une relation sur les dérivées spatiales et temporelles,

▷ on raisonne sur un système (volume de contrôle) mésoscopique : une tranche de cylindre comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$;

▷ on raisonne sur une durée infinitésimale : le décompte des charges est réalisé entre t et $t + \mathrm{d}t$.

La charge stockée dans le volume de contrôle mésoscopique à l'instant t est notée $Q(t)$.

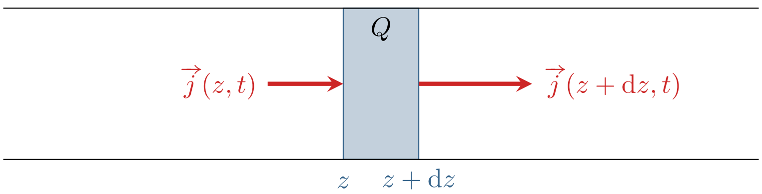


Figure 1 – Bilan de charge à une dimension.

Qualitativement : le postulat de conservation de la charge se traduit par la relation

$$\begin{array}{c}\text{charge stockée}\\ \text{à l'instant } t+\mathrm{d}t\end{array} = \begin{array}{c}\text{charge stockée}\\ \text{à l'instant } t\end{array} + \begin{array}{c}\text{charge entrée}\\ \text{entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t\end{array} - \begin{array}{c}\text{charge sortie}\\ \text{entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t\end{array}$$

Charge stockée :

▷ à l'instant t : $Q(t) = \rho(z,t)\,\mathrm{d}\tau = \rho(z,t)\,S\,\mathrm{d}z$

Espace 5

▷ à l'instant $t+\mathrm{d}t$: $Q(t+\mathrm{d}t) = \rho(z,t+\mathrm{d}t)\,S\,\mathrm{d}z$

Espace 6

> ***Remarque :*** *pourquoi $\rho(z,t)$ et pas $\rho(z+\mathrm{d}z/2,t)$?*
> *Comme on ne travaille qu'au premier ordre en $\mathrm{d}z$, c'est en fait équivalent pour exprimer la charge stockée Q : en effet,*
> $$\rho\left(z+\frac{\mathrm{d}z}{2},t\right) \simeq \rho(z,t) + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2} \qquad \text{donc} \qquad \rho\left(z+\frac{\mathrm{d}z}{2},t\right)\,S\,\mathrm{d}z = \rho(z,t)\,S\,\mathrm{d}z + \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial z}S\frac{\mathrm{d}z^2}{2}}_{\text{second ordre}}\,.$$

Charge échangée :

▷ charge entrée entre t et $t+\mathrm{d}t$: par la face située en z : $\delta q_\mathrm{e} = i(z,t)\,\mathrm{d}t = j_z(z,t)\,S\,\mathrm{d}t$

Espace 7

▷ charge sortie entre t et $t+\mathrm{d}t$: par la face située en $z+\mathrm{d}z$: $\delta q_\mathrm{s} = i(z+\mathrm{d}z,t)\,\mathrm{d}t = j_z(z+\mathrm{d}z,t)\,S\,\mathrm{d}t$

Espace 8

Conclusion :

$$\begin{aligned}
Q(t+\mathrm{d}t) &= Q(t) + \delta q_\mathrm{e} - \delta q_\mathrm{s}\\
\rho(z,t+\mathrm{d}t)\,S\,\mathrm{d}z &= \rho(z,t)\,S\,\mathrm{d}z + j_z(z,t)\,S\,\mathrm{d}t - j_z(z+\mathrm{d}z,t)\,S\,\mathrm{d}t\\
\rho(z,t)\,S\,\mathrm{d}z + \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}z &= \rho(z,t)\,S\,\mathrm{d}z + j_z(z,t)\,S\,\mathrm{d}t - j_z(z,t)\,S\,\mathrm{d}t - \frac{\partial j_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,S\,\mathrm{d}t\\
\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}z &= -\frac{\partial j_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,S\,\mathrm{d}t\\
\frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\frac{\partial j_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Espace 9

Dans un système unidimensionnel, la conservation de la charge se traduit localement par
$$\frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\,.$$

- **Généralisation**

À trois dimensions, la conservation de la charge se traduit localement par
$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\,.$$

II.B - Démonstration par les équations de Maxwell

Compte tenu du statut des équations de Maxwell comme équations fondamentales de l'électromagnétisme, on peut légitimement se poser la question de savoir si la conservation de la charge est une hypothèse supplémentaire.

- **Équation de Maxwell-Ampère**

Équation de Maxwell-Ampère :

En tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

où $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$ est la perméabilité magnétique du vide.

Le terme $\vec{j}_D = \mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est appelé **courant de déplacement**.

Contenu physique :

▷ un champ magnétique peut être généré par un courant variable ou permanent et par un champ électrique variable ;

▷ en régime variable, il existe un couplage entre le champ magnétique et le champ électrique, mais ce couplage disparaît en régime stationnaire.

- **Démonstration de l'équation de conservation de la charge**

Deux résultats mathématiques utiles :

▷ pour tout champ vectoriel $\vec{U}$ on a $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}) = 0$, ce qui se retrouve avec $\vec{\nabla}$: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{U}) = 0$ grâce aux propriétés du produit mixte ;

▷ **théorème de Schwartz** : comme les variables de temps et d'espace sont des variables indépendantes, alors les dérivées spatiales et temporelles peuvent être permutées.

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Espace 10

La conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell.

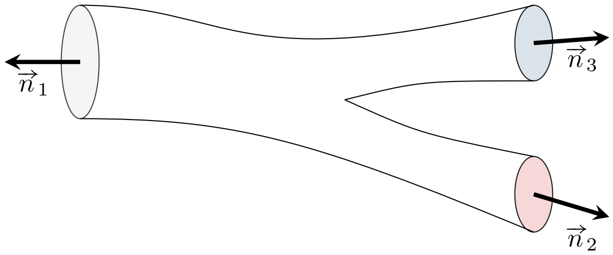
> ***Remarque historique :*** *Ce n'est pas du tout un hasard ! C'est justement la contribution décisive de Maxwell : il a compris qu'à l'équation d'Ampère déjà connue il fallait ajouter un terme supplémentaire, le courant de déplacement, pour rendre la théorie électromagnétique compatible avec la conservation de la charge. C'est un pas essentiel car c'est ce terme de courant de déplacement qui va conduire à la découverte des ondes électromagnétiques.*

II.C - Conséquence en régime stationnaire : loi des nœuds

En régime stationnaire ou quasi-stationnaire (cf. cours suivant), l'équation de conservation de la charge devient simplement

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \underset{\text{Green-Ostrogradski}}{\iff} \oiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

⇝ le vecteur densité volumique de courant est à flux conservatif



Appliquons ce résultat à une portion de tube de courant, c'est-à-dire un volume de contrôle délimité par des lignes de courant de $\vec{j}$ et des sections droites. La figure ci-contre représente un tube avec un embranchement, par exemple une jonction de fils électriques.

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{lat}} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}}}_{\vec{j} \perp \overrightarrow{\mathrm{d}S}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Espace 11

⇝ on retrouve la **loi des nœuds** : la somme des intensités algébriques sortant d'un nœud est nulle, il n'y a pas d'accumulation de charge en un point du circuit.

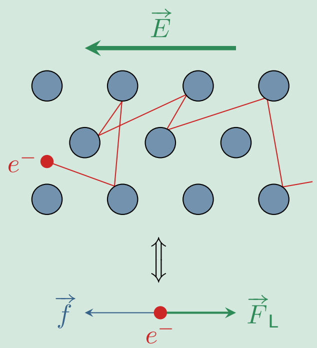
III - Loi d'Ohm

La loi d'Ohm que vous connaissez de longue date relie l'intensité traversant une résistance à la tension à ses bornes. En toute logique, la loi d'Ohm formulée en électromagnétisme reliera la densité de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$.

III.A - Modèle de Drude de la conduction dans un métal (hors programme)

Application 3 : Modèle de Drude

Le modèle de Drude est un modèle de conduction électrique dans un métal purement classique : il a été proposé à la fin du XIXᵉ siècle, à une époque où la mécanique quantique n'était pas encore connue. Ce modèle consiste à raisonner sur un électron (masse m_e, charge $-e$) supposé modéliser le comportement moyen de tous les électrons de conduction du métal.



Une tension est imposée à l'échantillon, d'où résulte la présence d'un champ électrique extérieur $\vec{E}$, et donc une force de Lorentz subie par l'électron. De plus, au cours de son déplacement dans le métal, l'électron subit des interactions (collisions, forces de Coulomb, etc.) avec les cations du réseau cristallin qui vont freiner l'électron au cours de son mouvement. Ces interactions entre l'électron et le réseau sont modélisées par une simple force de frottement proportionnelle à la vitesse de l'électron,

$$\vec{f} = -\frac{m_\mathrm{e}}{\tau} \vec{v},$$

où le temps caractéristique τ est un paramètre phénoménologique appelé temps de relaxation, généralement de l'ordre de 10^{-14} s. Schématiquement, il correspond à la durée moyenne entre deux collisions de l'électron avec les cations du réseau cristallin.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de l'électron moyen.

2 - Résoudre cette équation. Pourquoi peut-on raisonnablement considérer la vitesse initiale nulle ?

3 - À quelle condition sur la tension imposée au cristal la durée du régime transitoire peut-elle être négligée ?

4 - En déduire la relation entre la densité volumique de courant $\vec{j}$ et le champ électrique extérieur $\vec{E}$.

1 - Application du PFD :

$$m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{m_\mathrm{e}}{\tau}\vec{v} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\,.$$

2 - Résolution de l'équation différentielle :

$$\vec{v} = \vec{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{\tau e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}$$

avec $\vec{V}$ une constante qui dépend de la condition initiale, c'est-à-dire la vitesse initiale de l'électron.

⇝ initialement la vitesse est aléatoire, donc pour notre électron moyen tout se passe comme si elle était nulle.

Ainsi,

$$\vec{v}(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \vec{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} \vec{V} - \frac{\tau e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}$$

d'où on déduit

$$\vec{v} = -\frac{\tau e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

3 - Hypothèse de régime permanent : si la tension varie sur des durées $T \gg \tau$ (i.e. $f \ll 1/\tau = 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) alors le régime transitoire est de durée négligeable et l'électron est constamment en régime permanent :

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{\tau e}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\,.}$$

4 - Passage à la densité de courant : l'électron auquel le PFD a été appliqué est supposé avoir les propriétés moyennes de tous les électrons du système.

⇝ sa vitesse $\vec{v}$ est la vitesse d'ensemble des électrons.

On peut donc directement la relier à la densité volumique de courant :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m_\mathrm{e}}\vec{E}\,.}$$

Les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont donc colinéaires et proportionnels en tout point du milieu.

Espace 12

III.B - Loi d'Ohm locale

La relation de proportionnalité entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ établie dans le modèle de Drude se retrouve en fait dans de nombreuses situations.

On appelle **conducteur ohmique** un milieu dans lequel la **loi d'Ohm locale** est vérifiée,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}\,,$$

où γ est appelée la **conductivité électrique** du milieu, qui s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ ou $\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

La conductivité électrique est également fréquemment notée σ. On définit également la **résistivité** du milieu par $\rho = 1/\gamma$, en $\Omega \cdot \mathrm{m}$ (même notation mais ne pas confondre avec une densité de charge !).

Cette loi est valable dans les métaux, et plus généralement dans tout conducteur linéaire, homogène, isotrope, tant que la fréquence n'est pas trop élevée.

$\rightsquigarrow$ en PT, la loi d'Ohm est l'hypothèse « par défaut » sur les conducteurs.

> ***Remarque pour le futur :*** *la loi d'Ohm locale s'écrit donc* $\vec{j} = -\gamma \,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$*, ce qui est une forme analogue à la loi de Fourier de la conduction thermique.*

Ordres de grandeur de conductivité électrique :

Cuivre (bon conducteur)	Silicium (semi-conducteur)	Eau pure (isolant)
$6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$	$1\,\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}\,\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

La conductivité du silicium s'entend ici en l'absence de dopage, c'est-à-dire de traitement spécifique destiné à contrôler et améliorer cette conductivité.

- **Cas particulier : conducteur en équilibre électrostatique**

Un conducteur électrique est dit **en équilibre électrostatique** si le courant y est nul.

▷ Conséquence sur le champ électrique : $\vec{E} = \vec{0}$

Espace 13

▷ Conséquence sur le potentiel : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \vec{0}$ donc $V = \mathrm{cte}$ dans un conducteur en équilibre

Espace 14

▷ Conséquence sur la densité de charge : $\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \vec{E} = 0$

Espace 15

$\rightsquigarrow$ si un conducteur en équilibre électrostatique est chargé, alors il ne peut s'agir que de charges surfaciques ... et réciproquement si un matériau en équilibre électrostatique est chargé en volume alors il ne peut s'agir que d'un isolant.

> ***Remarque :*** *on comprend ainsi pourquoi un condensateur est toujours modélisé par des distributions surfaciques de charge.*

- **Cas particulier : conducteur parfait**

Un conducteur électrique est dit **parfait** si sa conductivité électrique est infinie. Un conducteur parfait n'existe pas : c'est bien sûr un cas limite théorique, utile en modélisation.

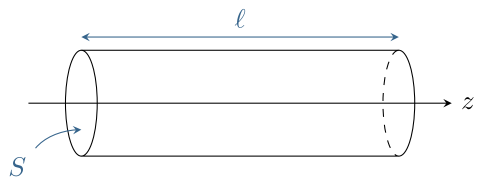
▷ Conséquence sur le champ électrique :

$\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ donc quel que soit le courant traversant le conducteur, le champ électrique y est nul.

Espace 16

> ***Remarque :*** *en pratique, un supraconducteur s'approche beaucoup d'un conducteur parfait ... mais il tient ses propriétés de phénomènes quantiques et n'est pas un conducteur ohmique, si bien qu'il n'est pas concerné par ce paragraphe.*

III.C - Loi d'Ohm intégrale



Considérons un échantillon unidimensionnel d'axe (Oz), de longueur ℓ et de section S, fait d'un conducteur ohmique de conductivité γ.

⇝ objectif : retrouver la loi d'Ohm que l'on connaît, et exprimer sa résistance.

Loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,, \qquad \text{soit} \qquad j_z = -\gamma\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

Intégration sur une section transverse : il s'agit d'un domaine à $z = $ cte, or j_z et $\mathrm{d}V/\mathrm{d}z$ ne dépendent que de z, donc

$$I = \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint j_z\,\mathrm{d}S = S j_z = -\gamma S\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

On intègre par une séparation de variable entre les deux extrémités du fil

$$I\int_0^\ell \mathrm{d}z = -\gamma S\int_{V(0)}^{V(\ell)}\mathrm{d}V \qquad \text{d'où} \qquad I\ell = -\gamma S\,[V(\ell) - V(0)]$$

en convention récepteur $U = V(0) - V(\ell)$, donc on obtient

$$U = \frac{\ell}{\gamma S}I\,.$$

et on identifie alors

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\gamma S}}$$

Un échantillon de conducteur ohmique de section S et longueur ℓ a pour résistance

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

Remarque : *on constate que les dimensions interviennent : la résistance n'est pas caractéristique d'un matériau, mais d'un système (= matériau + géométrie).*

Remarque pour le futur : *cette expression fait écho à celle de la résistance thermique d'une plaque de section S et d'épaisseur ℓ faite d'un matériau de conductivité thermique λ,*

$$R_{th} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

C'est normal : les lois locales sont analogues, les définitions aussi.

IV - Échanges énergétiques entre le champ et les porteurs de charge

Nous allons analyser les échanges d'énergie entre le champ électromagnétique et les porteurs de charge par un raisonnement mécanique : le champ exerce sur les porteurs de charge la force de Lorentz, la puissance qu'il leur cède est donc celle de cette force.

IV.A - Force de Lorentz à l'échelle mésoscopique

- **Densité volumique de force de Lorentz**

▷ Force subie par un unique porteur de charge, modélisant le comportement moyen de tous les autres :

$\overrightarrow{F}_{\mathrm{L1}} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$ avec $\overrightarrow{v}$ vitesse d'ensemble

Espace 17

▷ Résultante sur un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$:

Nombre de porteurs : $\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}\tau$ avec n le densité volumique de porteurs
d'où $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}} = n\,\mathrm{d}\tau\, q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$
et on peut réorganiser sous la forme $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}} = \left(nq\overrightarrow{E} + nq\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)\mathrm{d}\tau = \left(\rho\overrightarrow{E} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\right)\mathrm{d}\tau$

Espace 18

▷ Conclusion :

À l'échelle mésoscopique, la force de Lorentz est décrite par une densité volumique de force

$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{L}} = \rho\overrightarrow{E} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\,.$$

- **De la force de Lorentz à la force de Laplace**

Rappel : un tronçon de conducteur de longueur infinitésimale parcouru par un courant d'intensité i et placé dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}$ subit la force de Laplace,

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{Lapl}} = i\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est orienté dans le sens de i.

Démonstration : on suppose $\rho = 0$, le conducteur est globalement neutre.

Fil conducteur cylindrique d'axe (Oz). Un tronçon élémentaire de longueur $\mathrm{d}\ell$ a pour volume $S\,\mathrm{d}\ell$, et subit donc une force de Lorentz totale

$$\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} \times S\,\mathrm{d}\ell = j_z S \mathrm{d}\ell \, \vec{e}_z \wedge \vec{B} = i\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$$

Espace 19

La force de Laplace est la résultante à l'échelle macroscopique des forces de Lorentz subies à l'échelle microscopique par les porteurs de charge.

IV.B - Densité volumique de puissance Joule

- **Cas général**

▷ Puissance fournie par la force de Lorentz au porteur de charge moyen :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{L1}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Espace 20

> ***Remarque :*** *On retrouve que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas.*

▷ Résultante sur un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$:

$$\delta\mathcal{P}_{\mathrm{L}} = n\,\mathrm{d}\tau\, q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \underbrace{(nq\vec{v})}_{=\vec{j}}\,\mathrm{d}\tau$$

Espace 21

▷ Conclusion :

À l'échelle mésoscopique, les porteurs de charge reçoivent de la part du champ électromagnétique une puissance de densité volumique

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E}\,.$$

Attention ! Une puissance est algébrique, et il faut être vigilant aux conventions de signe : cette puissance est *cédée* par le champ électromagnétique et *reçue* par les porteurs de charge.

- **Cas d'un conducteur ohmique**

Avec la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ d'où

$$p = \gamma||\vec{E}||^2 = \frac{||\vec{j}\,||^2}{\gamma} > 0$$

Dans un conducteur ohmique, les porteurs de charge reçoivent de la part du champ électromagnétique une puissance volumique d'effet Joule

$$p_{\mathrm{J}} = \gamma||\vec{E}||^2 = \frac{||\vec{j}\,||^2}{\gamma} > 0$$

Elle est toujours positive.

Interprétation : ce sont toujours les porteurs de charge qui reçoivent de l'énergie de la part du champ et jamais le contraire.

$\leadsto$ que devient cette énergie ?

dissipée par les interactions avec le réseau cristallin (cf. force de frottement du modèle de Drude) et transformée en chaleur, c'est l'effet Joule.

Espace 22