TD 13 – Séquence 4 : Électromagnétisme *Correction*

Conduction électrique

Exercice 1 : Charge d'une sphère

1 | 2

- *Bilan de charge ;*
- *Potentiel électrostatique ;*
- *Résistance d'un fil conducteur.*

1 La charge totale de la sphère à un instant donné vaut $Q(t) = 4\pi a^2 \sigma(t)$. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, une charge $I\,\mathrm{d}t$ se dépose sur la sphère. Ainsi, par conservation de la charge,

$$Q(t+\mathrm{d}t) = Q(t) + I\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \cancel{Q(t)} + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\cancel{\mathrm{d}t} = \cancel{Q(t)} + I\,\cancel{\mathrm{d}t}$$

« L'équation différentielle » vérifiée par σ est donc

$$4\pi a^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = I$$

d'où on déduit

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{I}{4\pi a^2} t\,.}$$

en supposant la sphère complètement déchargée à l'instant initial.

2 En négligeant l'influence du fil comme le sous-entend l'énoncé, la distribution de charge est à symétrie sphérique. Ainsi,

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

En prenant comme surface de Gauss une sphère de rayon r, la charge intérieure est nulle si $r < a$ et égale à σa^2 si $r > a$. On en déduit que le champ est nul à l'intérieur de la sphère et vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

à l'extérieur. On en déduit le potentiel par application de la définition,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Par séparation de variable et intégration entre l'infini et la surface de la sphère, on en déduit

$$\int_0^{V_\mathrm{s}} \mathrm{d}V = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0} \int_\infty^a \frac{-1}{r^2}\,\mathrm{d}r \qquad \text{soit} \qquad V_\mathrm{s} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^a$$

et ainsi

$$\boxed{V_\mathrm{s} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\,.}$$

3 La tension aux bornes du fil orienté en convention récepteur est donc $U = V_0 - V_\mathrm{s}$, qui dépend du temps car σ donc V_s en dépendent. On en déduit que le courant qui le parcourt dépend lui aussi du temps et vaut

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_0 - \dfrac{\sigma(t) a}{\varepsilon_0}}{\ell/\gamma S} = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell}\sigma(t)\,.$$

Le bilan de charge établi précédemment prend maintenant la forme

$$4\pi a^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = I(t) = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell}\sigma(t)\,.$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par σ,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\gamma S}{4\pi\varepsilon_0 a\ell}}_{=1/\tau}\sigma = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2 \ell}\,.}$$

Une solution particulière σ_∞ de cette équation est

$$0 + \frac{\gamma S}{4\pi\varepsilon_0 a\ell}\sigma_\infty = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2\ell} \qquad \text{soit} \qquad \sigma_\infty = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\,.$$

La forme générale des solutions est donc

$$\sigma(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\,.$$

Comme la charge initiale est nulle, on en déduit directement $A = -\varepsilon_0 V_0/a$ d'où

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Exercice 2 : Gravure ionique

2 | 2 |

- ▷ *Mouvement d'une charge dans un potentiel ;*
- ▷ *Conservation de la charge ;*
- ▷ *Équation de Poisson.*

1 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + eV \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{CI}}}{=} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$\boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2e\,|V(x)|}{m}}\,.}$$

Comme $|V_1| > |V_0|$, alors $v(x_1) > v(x_0)$ donc le cation est accéléré entre la grille 0 et la grille 1. De même, comme $|V_2| < |V_1|$ alors le cation ralentit entre la grille 1 et la grille 2.

2 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant $\vec{j}$ ne dépend que de x. En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\operatorname{div}\vec{j} = \frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad j_x = J_0 = \text{cte} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{j} = J_0\,\vec{e}_x}\,.$$

3 D'après l'équation de Poisson dans ce cas unidimensionnel,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0\,.$$

Comme tous les cations ont la même charge e, la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = n(x)\,e\,v(x)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0\,v(x)} = 0\,.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.}$$

4 En identifiant la solution donnée par l'énoncé en $x = x_1$, on obtient

$$V(x_1) = V_1 = -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
V_1^3 &= -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4}\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2}\left(\frac{m}{2e}\right)\\
\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2} &= -\frac{2e}{m}V_1^3\left(\frac{2}{3x_1}\right)^{4}\\
J_0 &= \varepsilon_0\sqrt{-\frac{2e}{m}V_1^3}\left(\frac{2}{3x_1}\right)^{2}\\
J_0 &= \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0}{x_1^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\left|V_1\right|^3\\
&\boxed{J_0 = \underbrace{\frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0}{x_1^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}}_{=k}\left|V_1\right|^{3/2}\,.}
\end{aligned}$$

5 La charge électrique totale Q_{tot} atteignant le substrat pendant Δt est reliée d'une part au nombre de cations, et d'autre part à l'intensité du faisceau,

$$Q_{\text{tot}} = Ne = I\,\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad Ne = J_0\,S\,\Delta t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{N = \frac{J_0\,S}{e}\Delta t = \frac{k\left|V_1\right|^{3/2}\,S}{e}\Delta t\,.}$$

En approximant le potentiel au niveau du substrat à celui de la grille 2 très proche, on déduit de la question 1 que la vitesse des ions lorsqu'ils atteignent le substrat vaut

$$\boxed{v_{\text{s}} = \sqrt{\frac{2e\left|V_2\right|}{m}}\,.}$$

Ainsi, le dispositif envisagé permet bien de contrôler le nombre de cations via la grille 1 et leur vitesse par l'intermédiaire de la grille 2.

Exercice 3 : Diode à vide — inspiré oral banque PT | 2 | 2

- *Équation de Poisson ;*
- *Mouvement d'une charge dans un potentiel ;*

1 Un problème physique est dit à symétrie cylindrique lorsqu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz).

2 L'espace entre les deux électrodes est vide, donc d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

Par une première intégration, on trouve

$$r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A = \text{cte} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}$$

et une deuxième intégration donne

$$V(r) = A\ln r + B \qquad \text{avec} \qquad A, B = \text{cte}\,.$$

Les constantes se trouvent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases}
V(r{=}R_A) \underset{\text{CL}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{calcul}}{\underset{\uparrow}{=}} A\ln R_A + B\\
V(r{=}R_C) \underset{\text{CL}}{\underset{\uparrow}{=}} U_0 \underset{\text{calcul}}{\underset{\uparrow}{=}} A\ln R_C + B
\end{cases}$$

Par soustraction, il vient

$$U_0 = A \ln \frac{R_C}{R_A} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\,,$$

et on en déduit

$$B = -\frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln r - \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)} \ln R_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} U_0\,.}$$

3 Un électron est une particule chargée négativement, qui se déplace donc vers les zones de potentiel le plus élevé : pour que la diode soit passante, il faut que les électrons émis à l'anode migrent vers la cathode, soit $U_0 > 0$. Au contraire, si $U_0 < 0$ les électrons resteront bloqués au voisinage de l'anode et ne rejoindront jamais la cathode.

4 Le système étant par hypothèse à symétrie cylindrique, la vitesse d'un électron ne peut dépendre que de r. Sa vitesse initiale est nulle par hypothèse et il n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, $\vec{F} = -e\vec{E}$, car son poids est négligeable. Comme V ne dépend que de r alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ est porté par $\vec{e}_r$, et une double intégration du PFD appliqué à un électron montre que sa vitesse est nécessairement radiale également.

La force de Lorentz dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = -eV$. Comme l'électron n'est soumis qu'à cette seule force conservative, son énergie mécanique est une constante du mouvement. En l'exprimant en $r = R_A$, on obtient

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v(r{=}R_A)^2 - e\,V(r{=}R_A) = 0\,.$$

En l'exprimant en r quelconque,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v(r)^2 - e\,V(r) = \frac{1}{2} m v(r)^2 - \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} e U_0\,.$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2} m v(r)^2 = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)} e U_0$$

et ainsi

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m} \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}}\,.}$$

> *On constate que ce résultat n'a pas de sens si $U_0 < 0$, ce qui signifie physiquement que l'électron ne peut pas atteindre la sphère de rayon r.*

5 Compte tenu de la symétrie cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) = -n(r)\,e\,v(r)\,.$$

L'intensité (orientée de la cathode vers l'anode, en sens opposé au mouvement des électrons) traversant un cylindre de rayon r est indépendante du rayon (conservation de la charge) et est reliée à j par

$$I = \iint \vec{j} \cdot (-\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 2\pi r H\, j(r)\,.$$

Ainsi,

$$I = 2\pi r H\, n(r)\,e\,v(r) \qquad \text{soit} \qquad n(r) = \frac{I}{2\pi r H\, e\, v(r)}$$

et ainsi

$$\boxed{n(r) = \frac{I}{2\pi r H\, e} \sqrt{\frac{m}{2eU_0} \frac{\ln(R_C/R_A)}{\ln(r/R_A)}}\,.}$$

Exercice 4 : Mesure de salinité — 3 | 2

▷ *Loi d'Ohm ;*
▷ *Modèle microscopique.*

1 Étudions le mouvement de l'ion dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à la force de Lorentz électrique et la force $\overrightarrow{F}$. Ainsi, d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_i}{\mathrm{d}t} = z_i e \overrightarrow{E} - \alpha_i r_i \overrightarrow{v}_i \,,$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha_i r_i}{m_i}\overrightarrow{v}_i = \frac{z_i e}{m_i}\overrightarrow{E}\,.$$

La durée du régime transitoire est donnée (en ordre de grandeur) par le temps caratéristique apparaissant dans cette équation,

$$\boxed{\tau_i = \frac{m_i}{\alpha_i r_i}\,,}$$

alors que la vitesse limite en est la solution particulière constante,

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{i\infty} = \frac{z_i e}{\alpha_i r_i}\overrightarrow{E}\,.}$$

2 Par définition, la densité volumique de courant dû aux ions de type i est reliée à leur vitesse limite par

$$\overrightarrow{j}_i = n_i\, z_i e\, \overrightarrow{v}_{i\infty}$$

avec n_i la densité volumique d'ions, c'est-à-dire le nombre d'ions par unité de volume, qui est relié à la concentration molaire c_i par $n_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} c_i$. On en déduit

$$\overrightarrow{j}_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} c_i \frac{(z_i e)^2}{\alpha_i r_i}\overrightarrow{E}$$

Ainsi, la densité volumique totale de courant dans la solution vaut

$$\overrightarrow{j} = \sum_i \overrightarrow{j}_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \left(\sum_i \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i} c_i\right)\overrightarrow{E}$$

ce qui permet d'identifier la conductivité

$$\boxed{\sigma = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \sum_i \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i} c_i\,.}$$

On constate que la charge z_i intervient au carré dans l'expression : les cations et les anions contribuent donc **de la même façon** à la conductivité, alors qu'on aurait pu imaginer que leurs effets se compensent. On retrouve la **loi de Kohlrausch** reliant la conductivité d'une solution à la concentration des ions, que vous connaissez depuis le lycée sous la forme

$$\sigma = \sum_i \Lambda_i c_i \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\Lambda_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i}\,,}$$

où Λ_i est la conductivité molaire ionique de l'ion i.

3 La résistance de la portion de solution entre les électrodes est celle d'un conducteur unidimensionnel de longueur ℓ et de section A, elle vaut donc

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma A}\,.}$$

Un conductimètre **impose une tension** aux bornes de la cellule de conductimétrie puis **mesure le courant** qui traverse la solution. Une opération d'**étalonnage** donne le rapport ℓ/A (souvent appelé constante de cellule en chimie), ce qui permet de remonter à la conductivité σ.

4 La cellule fonctionne de manière analogue à un condensateur : lorsqu'une tension est imposée, des charges sont apportées par le générateur et vont se regrouper sur les électrodes. Les ions sont alors **attirés par l'électrode de charge opposée** à la leur, sur laquelle **ils vont s'accumuler**. Ce faisant, la charge résultante sur l'électrode **diminue jusqu'à s'annuler** si bien que la solution n'est plus traversée par aucun courant alors même qu'une tension est toujours appliquée à ses bornes.

> *On parle alors d'**écrantage** (du mot « écran ») par les ions de la charge portée par l'électrode.*

Une tension alternative est plus appropriée car les ions sont alternativement attirés par l'une ou l'autre électrode, ce qui **empêche le phénomène d'accumulation** et d'écrantage discuté précédemment. Cependant, la conductivité est définie en régime permanent : le régime transitoire du mouvement des ions doit toujours rester **de durée négligeable** devant la période des variations de tensions. Quantitativement, cela se traduit par

$$\boxed{\forall i, \quad \tau_i f \ll 1\,.}$$

5 Notons V le volume d'un échantillon contenant $m_0 = 1\,\mathrm{kg}$ d'eau de mer, ρ_0 sa masse volumique et m la masse totale d'ions qu'il contient. Par définition de la salinité S,

$$S = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{\rho_0 V}\,.$$

De plus,

$$m = \sum_i m_i = \sum_i c_i V\, M_i \qquad \text{soit} \qquad S = \frac{1}{\rho_0}\sum_i c_i M_i\,.$$

avec M_i la masse molaire de l'ion i. On définit x_i la proportion de l'ion i dans la solution : en notant c la concentration totale en ions de la solution, on a

$$c = \sum_i c_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i = \frac{c_i}{c}\,.$$

Les proportions des différents types d'ions sont indépendantes de l'échantillon considéré, c'est-à-dire que seule la concentration totale c varie. Ainsi,

$$S = \frac{1}{\rho_0}\sum_i c_i M_i = c\frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0} = Ac \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sum_i \Lambda_i c_i = c\sum_i \Lambda_i x_i = Bc$$

avec A et B sont deux constantes caractéristiques de l'eau de mer mais indépendantes de l'échantillon.

> *Pour bien comprendre, on peut voir que chacun des termes $x_i M_i$ ou $\Lambda_i x_i$ est indépendant de l'échantillon, donc leur somme l'est forcément.*

Ainsi, la salinité s'exprime par

$$S = \frac{A}{B}\sigma = \frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0 \sum_i \Lambda_i c_i}\,\sigma\,.$$

Mesurer la conductivité σ_0 d'une solution de salinité S_0 connue permet de s'affranchir du rapport A/B : la salinité S d'une solution d'eau de mer de conductivité mesurée σ vaut

$$S = \frac{S_0}{\sigma_0}\sigma\,.$$

Exercice 5 : Chute ohmique dans un électrolyseur — 2 | 2 |

- *Bilan de charge ;*
- *Loi d'Ohm locale et intégrale ;*
- *Coordonnées cylindriques.*

1 Procédons à un bilan de charge pour une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. Le courant électrique est dirigé vers l'extérieur des cylindres. Ainsi,

- par la face cylindrique de rayon r, une charge électrique $I(r)\,\mathrm{d}t$ entre dans le système ;
- par la face cylindrique de rayon $r + \mathrm{d}r$, une charge électrique $I(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t$ sort du système.

En notant Q la charge totale contenue entre les deux cylindres, le bilan de charge s'écrit donc

$$Q(t + \mathrm{d}t) = Q(t) + I(r)\,\mathrm{d}t - I(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t\,.$$

En régime stationnaire, la charge totale contenue dans le système est par définition constante. Ainsi,

$$0 = I(r) - I(r + \mathrm{d}r) = -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}r}\,.$$

Comme la dérivée est nulle, on en déduit que l'intensité I traversant une surface cylindrique de rayon r est indépendante de r.

2 Par définition, l'intensité est le flux du vecteur densité de courant. En raisonnant sur une surface cylindrique,

$$I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = j(r) \times 2\pi r h \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r h}\,.}$$

D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r h}\,\vec{e}_r\,.}$$

3 Le champ électrique peut être relié à la tension imposée entre les deux électrodes par l'intermédiaire du potentiel. En effet, compte tenu de la géométrie particulière,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{I}{2\pi\sigma r h}\,.$$

On intègre par séparation des variables entre $r = r_2$ et $r = r_1$,

$$\int_{V(r_2)}^{V(r_1)} \mathrm{d}V = -\frac{I}{2\pi\sigma h}\int_{r_2}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui donne

$$U = -\frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad \text{soit} \qquad U = \frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Par identification avec la loi d'Ohm intégrale, on en déduit

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}$$

4 La puissance dissipée par effet Joule dans la solution vaut

$$\boxed{\mathcal{P} = RI^2 = \frac{I^2}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}$$

On peut également l'obtenir en intégrant la densité volumique de puissance Joule,

$$p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{j(r)^2}{\sigma} = \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2 \sigma} I^2$$

soit en intégrant sur l'espace compris entre les deux électrodes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = \iiint p\,\mathrm{d}\tau &= \iiint \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2\sigma} I^2 \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\pi^2 h^2 \sigma} \times \int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \times \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_0^h \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\pi^2 h^2\sigma} \times \ln\frac{r_2}{r_1} \times 2\pi \times h
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{I^2}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}$$

> *On montre dans le cours d'électrochimie que la tension totale à imposer aux bornes de l'électrolyseur se décompose en trois contributions : une contribution thermodynamique (liée à l'écart des potentiels de Nernst), une contribution cinétique (surtensions à vide et à courant non nul) et une contribution ohmique. La tension U considérée dans cet exercice correspond à cette dernière contribution, mais comme les deux autres ne sont pas prises en compte, elle ne correspond en réalité pas directement à la tension imposée par le générateur à l'électrolyseur.*

Exercice 6 : Balance de Cotton

Mines PSI 2016 | 3 | 2

▷ *Force de Laplace ;*
▷ *Moment cinétique.*

Introduisons des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz tel que $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e}_z$.

1 Les parties circulaires ont pour centre O, si bien que l'élément de courant $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est porté par $\pm\overrightarrow{e}_\theta$ ($\oplus$ pour le conducteur aller et $\ominus$ pour le retour) et la force de Laplace élémentaire $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\wedge\overrightarrow{B}$ par $\pm\overrightarrow{e}_r$. Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre O, dont le moment en O est donc nul.

2 Sur la partie rectiligne de longueur L, la force de Laplace vaut

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}} = -I\,L\,\overrightarrow{e}_r \wedge B\,\overrightarrow{e}_z = ILB\,\overrightarrow{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc a, d'où

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}}) = a\,\overrightarrow{e}_r \wedge ILB\,\overrightarrow{e}_\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}_{\mathrm{L}}) = aILB\,\overrightarrow{e}_z\,.}$$

3 Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse m additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en O du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse m doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire

$$-a'mg\,\overrightarrow{e}_z + aILB\,\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{B = \frac{a'mg}{aIL}\,.}$$

4 La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle $m = \delta m$, c'est-à-dire

$$\boxed{B_{\min} = \frac{a'\,\delta m\,g}{a\,I\,L} = 2\,\mathrm{mT}\,.}$$

À titre de comparaison, le champ magnétique terrestre a pour norme $5\cdot 10^{-5}$ T et n'est pas mesurable avec la balance, mais le champ créé par un aimant permanent « basique » est de l'ordre de $100\,\mathrm{mT}$. **La balance de Cotton est donc tout à fait utilisable**.