



BLAISE PASCAL  
PT 2022-2023

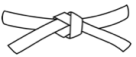



TD 13 – Séquence 4 : Électromagnétisme

# Conduction électrique

- 💡 Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- ✂ Difficulté technique et calculatoire ;
- ⊕ Exercice important.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 2 et 5
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2 et 5
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1, 2, 3 et 5
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 2 à 6

## Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT\* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) 13.1 - Établir le lien entre le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$ , la densité volumique de charge libre  $\rho$  et la vitesse d'ensemble des porteurs  $\vec{v}$ . On raisonnera sur un système unidimensionnel ne contenant qu'un seul type de porteurs libres.

La démonstration consiste à identifier les définitions « microscopique » (charge traversant une section) et « mésoscopique » (flux de  $\vec{j}$ ) de l'intensité pour obtenir l'identité  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ .

13.2 - Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension à partir d'un bilan mésoscopique, et la généraliser sans démonstration au cas tridimensionnel.

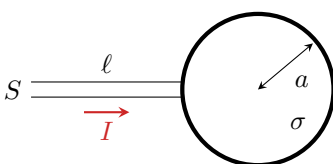
13.3 - Établir l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.

13.4 - En raisonnant sur un conducteur ohmique cylindrique, retrouver la loi d'Ohm intégrale à partir de la loi d'Ohm locale ainsi que l'expression de la résistance du cylindre.

## Exercice 1 : Charge d'une sphère

💡 1 | ✂ 2

- Bilan de charge ;
- Potentiel électrostatique ;
- Résistance d'un fil conducteur.



Une sphère de rayon  $a$  est mise sous tension afin d'être chargée. Elle est supposée parfaitement conductrice : les charges ne peuvent subsister qu'à sa surface, avec une densité surfacique  $\sigma(t)$  supposée uniforme à tout instant. Elles sont apportées par un fil de conductivité  $\gamma$ , de longueur  $\ell$  et section  $S$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , dont une extrémité est reliée à la sphère et l'autre à un générateur non représenté sur le schéma. Le processus est supposé suffisamment lent pour que les résultats de l'électrostatique demeurent valables bien que  $\sigma$  dépende du temps.

1 - Dans un premier temps, on suppose que la charge se fait à courant  $I$  constant. Déterminer l'évolution de la densité surfacique de charge  $\sigma(t)$  en fonction du temps.


Dans un second temps, on suppose que c'est le potentiel  $V_0$  imposé par le générateur qui demeure constant et non plus le courant  $I$ .

2 - Déterminer le champ créé par la sphère en tout point de l'espace. En déduire le potentiel  $V_s$  auquel se trouve la surface de la sphère en prenant comme référence  $V = 0$  à l'infini.

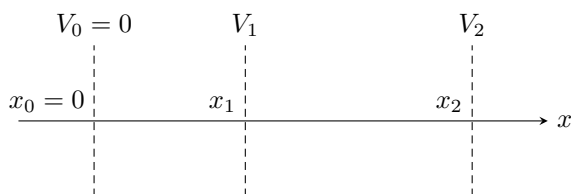
3 - En reprenant la démarche de la première question, établir l'équation différentielle vérifiée par  $\sigma(t)$  et la résoudre.

## Exercice 2 : Gravure ionique



-  ▷ Mouvement d'une charge dans un potentiel ;
- ▷ Conservation de la charge ;
- ▷ Équation de Poisson.

La gravure ionique est un procédé couramment utilisé dans l'industrie micro-électronique. Elle permet de graver la surface d'un substrat en la bombardant d'un faisceau d'ions de densité importante, mais de vitesse modérée, ce qui permet à des réactions chimiques d'avoir lieu uniquement à la surface du matériau. Il est donc nécessaire d'accélérer les ions en nombre important, puis, une fois le courant d'ions créé, de les ralentir afin de contrôler leur action sur le substrat.



Pour contrôler séparément l'intensité du courant ionique et l'énergie cinétique des ions, on utilise un système constitué de trois grilles métalliques, numérotées 0, 1 et 2. Les trois grilles sont portées à des potentiels différents, contrôlables indépendamment les uns des autres, tels que  $V_1 < V_2 < V_0 = 0$ . Le potentiel  $V(x)$  est partout négatif.

Le dispositif est traversé par un flux continu de cations identiques, tous de masse  $m$  et charge  $e$ , se propageant dans la direction  $x$ . On note  $n(x)$  la densité volumique correspondante, c'est-à-dire le nombre de cations par unité de volume du faisceau. Les cations sont lâchés au niveau de la grille 0 avec une vitesse initiale négligeable.

1 - Déterminer la vitesse  $v(x)$  d'un cation en fonction du potentiel  $V(x)$  et montrer qu'il subit une phase d'accélération et une phase de décélération au sein du dispositif.

2 - En utilisant la conservation de la charge, montrer que le vecteur densité de courant s'écrit sous la forme  $\vec{j} = J_0 \vec{e}_x$  avec  $J_0$  une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

3 - Montrer que le potentiel  $V(x)$  en présence du faisceau d'ions est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0.$$

On admet que la résolution de cette équation différentielle dans le domaine  $0 \leq x \leq x_1$  conduit à

$$V(x) = - \left( \frac{3x}{2} \right)^{4/3} \left( \frac{J_0}{\varepsilon_0} \right)^{2/3} \left( \frac{m}{2e} \right)^{1/3}.$$

4 - En déduire que  $J_0 = k |V_1|^{3/2}$ , avec  $k$  une constante à déterminer.

5 - On place un substrat de section  $S$  immédiatement après la grille 2 dans l'axe du faisceau pendant une durée  $\Delta t$ . Le faisceau est supposé uniforme à l'échelle du substrat. Déterminer le nombre  $N$  de cations atteignant le substrat, et leur vitesse. Conclure sur le bon fonctionnement du dispositif, c'est-à-dire la possibilité de contrôler séparément les deux paramètres.

**Remarque :** La solution donnée pour le potentiel  $V$  n'est valable que pour le domaine  $0 \leq x \leq x_1$ . En effet, la discontinuité du champ électrique de part et d'autre de la grille 1, liée à la présence de charges réparties en surface de la grille, modifie les conditions aux limites et donc la rend inopérante au delà. Ainsi, contrairement à ce qu'une interprétation trop simple pourrait laisser croire, le potentiel  $V_2$  de la grille 2 n'a pas d'influence sur  $J_0$ , qui est exclusivement fixé par la grille 1. En revanche, le champ électrique entre les grilles 1 et 2 dépend de  $J_0$ .

**Exercice 3 : Diode à vide**

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Équation de Poisson ;
- ▷ Mouvement d'une charge dans un potentiel ;

Les premières diodes ont été fabriquées au début du XX<sup>e</sup> siècle pour l'émission et la réception d'onde radio. Ces composants aujourd'hui très courants sont désormais fabriqués à partir de matériaux semi-conducteurs, mais les premiers modèles étaient des diodes à vide. Une diode à vide est modélisée par un fil cylindrique (anode  $A$ ) de rayon  $R_A$  placé sur l'axe d'un cylindre creux (cathode  $C$ ) de rayon  $R_C > R_A$  de même hauteur  $H$ . Les deux électrodes sont conductrices et sont placées dans une ampoule dans laquelle un vide poussé a été réalisé. Une tension  $U_0 = V_C - V_A$  est imposée entre l'anode et la cathode. L'anode est supposée reliée à la masse :  $V_A = 0$ .

Donnée : pour  $V = V(r)$  en coordonnées cylindriques,  $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right)$ .

1 - On admet que le problème est « à symétrie cylindrique ». Définir ce terme.

2 - Calculer le potentiel  $V(r)$  régnant entre les deux électrodes en fonction de  $r$ ,  $U_0$ ,  $R_A$  et  $R_C$ .

L'anode est portée à très haute température (plus de 1000 °C) et des électrons en sont arrachés sous l'effet de l'agitation thermique. On supposera négligeable la vitesse d'un électron venant juste d'être arraché de l'anode. Sous l'effet du potentiel  $V(r)$ , ces électrons peuvent être amenés à rejoindre la cathode. On les suppose suffisamment peu nombreux pour qu'ils ne perturbent pas le potentiel  $V(r)$  déterminé précédemment.

3 - Quel doit être le signe de  $U_0$  pour que la diode soit passante (un courant est transmis de l'anode à la cathode) ? pour qu'elle soit bloquée ?

4 - Justifier que la vitesse d'un électron dans l'espace inter-électrodes s'écrit  $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$ . Déterminer  $v(r)$ .

5 - Notons  $I$  le courant total circulant entre les deux électrodes. Déterminer la densité volumique d'électrons  $n(r)$  dans l'espace inter-électrodes.

**Exercice 4 : Mesure de salinité**

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Loi d'Ohm ;
- ▷ Modèle microscopique.

La salinité de l'eau de mer est la masse totale de substances solides dissoutes par kilogramme d'eau de mer, c'est-à-dire la masse totale des ions contenus dans 1 kg d'eau de mer. Elle se mesure à l'aide d'une simple cellule de conductimétrie correctement étalonnée.

Les ions contenus dans l'eau de mer sont modélisés par des sphères de rayon  $r_i$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_i$ . Les interactions microscopiques ion-eau et ion-ion sont modélisées par une unique force proportionnelle au rayon et à la vitesse de l'ion,

$$\vec{F} = -\alpha_i r_i \vec{v}_i,$$

où  $\alpha_i$  est une constante dépendant a priori du type d'ions considéré. Le poids des ions est négligé.

1 - Un ion de charge  $q_i = z_i e$  ( $z_i \in \mathbb{Z}$ ) et de masse  $m_i$  est placé dans une région où règne un champ électrique uniforme et stationnaire  $\vec{E}$ . Montrer qu'après une phase transitoire de durée  $\tau_i$  à déterminer, l'ion atteint une vitesse limite  $\vec{v}_{i\infty}$  à déterminer également.

2 - En déduire l'expression de la conductivité  $\sigma$  de l'eau de mer en considérant qu'il y a plusieurs types d'ions de concentrations molaires respectives  $c_i$ . Commenter l'influence relative des cations et des anions sur la conductivité. Quelle loi (que vous connaissez de longue date) retrouve-t-on ?

Une cellule de conductimétrie constituée de deux électrodes planes parallèles, d'aire  $A$  et distantes de  $\ell$ , est plongée dans un échantillon d'eau de mer.

3 - Donner sans démonstration l'expression de la résistance de la portion de solution se trouvant entre les électrodes en fonction de  $\sigma$ . En déduire le principe d'une mesure de conductivité.

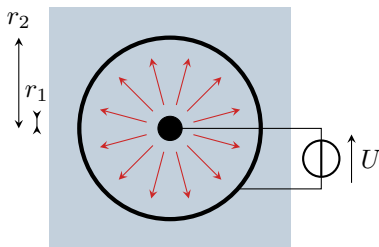
4 - Expliquer qualitativement pourquoi une tension constante appliquée entre les deux électrodes ne permet pas de procéder à la mesure. Pourquoi une tension alternative est-elle plus appropriée ? Pourquoi la tension doit-elle malgré tout être de faible fréquence ? Préciser sans calcul ce que signifie « faible fréquence » dans ce contexte.

5 - Des analyses d'échantillons d'eau de mer provenant de diverses profondeurs et de divers océans ont montré que les proportions des constituants dissouts dans l'eau de mer sont indépendantes de la salinité. Montrer qu'une mesure de conductivité permet de déterminer la salinité de l'échantillon, à condition d'un étalonnage préalable sur un échantillon de salinité connue.

**Exercice 5 : Chute ohmique dans un électrolyseur**

- ▷ Bilan de charge ;  
 ▷ Loi d'Ohm locale et intégrale ;  
 ▷ Coordonnées cylindriques.

L'électrolyse est un processus fondamental en chimie. Parmi ses multiples applications, citons la métallurgie (production de métaux à partir de minerais) ou la production de dihydrogène « vert » à partir d'énergies renouvelables. Cette technique étant très consommatrice en énergie, l'optimisation du rendement est essentielle. On modélise dans cet exercice l'un des phénomènes affectant le rendement énergétique d'électrolyse, la chute ohmique, dans un électrolyseur cylindrique.



L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons  $r_1 < r_2$  plongeant sur une hauteur  $h$  dans une solution électrolytique de conductivité  $\sigma$  supposée uniforme et constante. Une tension  $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$  est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme

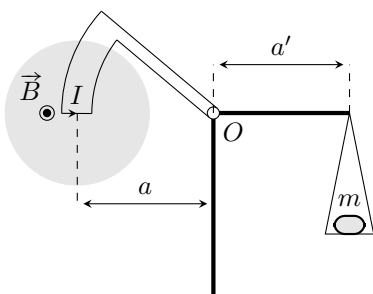
$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad j(r) > 0.$$

- 1 - En procédant à un bilan de charge sur une couche cylindrique comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  ( $r_1 < r < r + dr < r_2$ ), montrer que l'intensité  $I$  qui traverse un cylindre de rayon  $r$  ne dépend pas de  $r$ .
- 2 - En déduire l'expression de  $j(r)$  en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $h$ , puis celle du champ électrique  $\vec{E}$  au sein de la solution électrolytique.
- 3 - Établir l'expression de la résistance  $R$  de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.
- 4 - Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant  $I$  d'électrolyse.

**Exercice 6 : Balance de Cotton**

Mines PSI 2016 | 3 | 2

- ▷ Force de Laplace ;  
 ▷ Moment cinétique.



La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XX<sup>e</sup> siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en  $O$ . La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre  $O$ , reliés par une portion horizontale de longueur  $L$ . Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse  $m$  afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point  $O$ . À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse  $m$ , la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

- 1 - Montrer que le moment en  $O$  des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
- 2 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en  $O$  des forces de Laplace.
- 3 - En déduire la relation entre la masse  $m$  à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique  $B$ , à exprimer en fonction de  $a$ ,  $a'$ ,  $l$ ,  $I$  et de l'intensité de la pesanteur  $g$ .
- 4 - La sensibilité de la balance étant de  $\delta m = 0,05$  g, en déduire la plus petite valeur de  $B$  mesurable pour  $a = a' = 25$  cm,  $L = 5$  cm et  $I = 5$  A. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.