


Champ magnétique

Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère

Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène



-  ▷ Théorème d'Ampère ;
▷ Coordonnées cylindriques.

1 Par définition, l'intensité qui parcourt le cylindre vaut

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dS.$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques $dS = r dr d\theta$,

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0 \frac{R^2}{4}$$

d'où on déduit

$$J_0 = \frac{2}{\pi R^2} I.$$

2 Soit M un point de l'espace où l'on cherche à calculer le champ magnétique.

• **Symétries** : le plan passant par M et contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Ceci est cohérent avec le fait que le plan passant par M et orthogonal à l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, si bien que \vec{B} appartient à ce plan.

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par translation le long de (Oz) et par rotation autour de cet axe. Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc ni de z ni de θ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : on raisonne sur un cercle \mathcal{C} de rayon r et de normale \vec{e}_z .

Circulation de \vec{B} :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé :

▷ si $r \geq R$: $I_{\text{enl}} = I$;

▷ si $r \leq R$:

$$I_{\text{enl}} = \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^3}{R^2}\right) dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) \quad \text{d'où} \quad I_{\text{enl}} = \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right).$$

Conclusion :

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } r \geq R \\ \mu_0 \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right) & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

soit finalement

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{2R^2} \right) \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 D'après l'expression donnée et celle de \vec{B} ,

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

Si $r \geq R$ alors on constate que $rB_\theta = \mu_0 I / 2\pi$, ce qui ne dépend pas de r , cohérent avec $\vec{j}(r > R) = \vec{0}$.

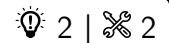
Si $r \leq R$, alors

$$rB_\theta = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(2r - \frac{4r^3}{2R^2} \right) = \frac{\mu_0 4I}{2\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right)$$

ce qui donne bien, en réorganisant,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{2I}{\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}$$

Exercice 2 : Plan épais parcouru par un courant



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes ;
- ▷ Utilisation avancée des propriétés de symétrie.

Raisonnons sur la figure 1. On se place en un point M quelconque.

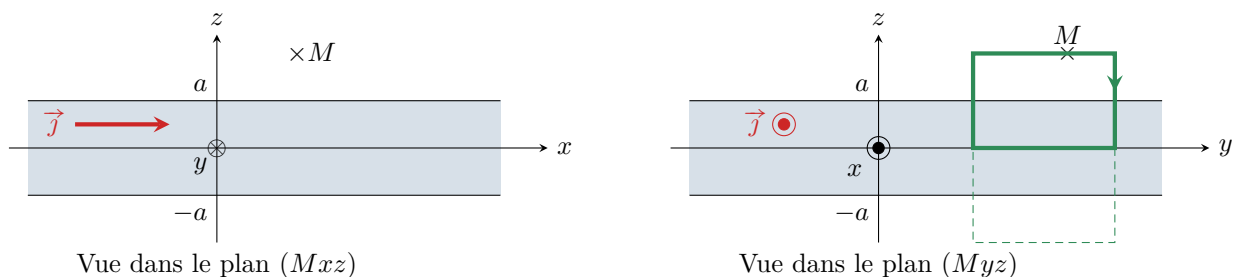


Figure 1 – Plan épais parcouru par un courant.

- **Symétries** : Le plan Mxz (plan de la figure de gauche) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

↪ on en déduit $\vec{B}(M) = B_y(M) \vec{e}_y$.

Ceci est (heureusement!) cohérent avec le fait que le plan (Mxy) soit un plan d'anti-symétrie de la distribution de courants, et donc que $\vec{B}(M)$ soit inclus dans ce plan.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation dans les directions x et y , donc $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de ces deux variables.

↪ on en déduit $\vec{B}(M) = B_y(z) \vec{e}_y$.

- **Choix du contour d'Ampère** : le plus naturel est de raisonner sur un cadre rectangulaire dont les côtés sont respectivement colinéaires aux vecteurs \vec{e}_y (un côté à la cote z du point M , l'autre à discuter) et \vec{e}_z (circulation nulle). Pour fermer ce rectangle, deux possibilités qui reposent toutes les deux sur le fait que le plan d'équation $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant.

▷ ou bien on note qu'en M' symétrique de M par rapport à ce plan les champs sont antisymétriques, donc ici

$$\vec{B}(M') = B_y(z' = -z) \vec{e}_y = -B_y(z) \vec{e}_y$$

et on complète ainsi le rectangle (même type de raisonnement que pour le plan chargé en électrostatique) : c'est le contour représenté en traits pointillés sur la figure 1 ;

▷ ou bien on note qu'en tout point du plan $z = 0$ le champ magnétique doit être orthogonal à ce plan, donc porté par \vec{e}_z ... mais on a déjà montré au préalable que le champ devait être porté par \vec{e}_y , ce qui impose donc

$$\vec{B}(z=0) = \vec{0},$$

et on complète ainsi le rectangle : c'est le contour représenté en traits épais sur la figure 1
Je choisis ici la deuxième possibilité, en notant ℓ la longueur des côtés parallèles à (Oy) et ℓ' celle des côtés parallèles à (Oz) .

• **Calcul de la circulation** : pour orienter correctement les contours et surfaces, on se place dans le cas $z > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\text{haut}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\vec{\ell} \vec{e}_y + \int_{\text{droit}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\ell \vec{e}_z) + \int_{\text{bas}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot (-d\ell \vec{e}_y) + \int_{\text{gauche}} B_y(z) \vec{e}_y \cdot d\ell \vec{e}_z \\ &= B_y(z)\ell + 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

• **Courant enlacé par le contour d'Ampère** :

▷ si $z \geq a$: vue l'orientation du contour,

$$I_{\text{enl}} = \iint \vec{j} \cdot (-dS \vec{e}_x) = -j_0 \ell a$$

▷ si $0 \leq z \leq a$: la partie « supérieure » du plan n'est pas enlacée par le contour d'Ampère, donc

$$I_{\text{enl}} = -j_0 \ell z.$$

• **Conclusion** : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_y(z) = \begin{cases} -\mu_0 j_0 a & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 z & \text{si } 0 \leq z \leq a \end{cases}$$

Pour obtenir le champ du côté $z < 0$, le moins risqué est sans doute de refaire le raisonnement en modifiant le contour d'Ampère, mais on peut aussi raisonner par symétrie. Le plan (Oxy) étant un plan de symétrie de la distribution de courant, c'est un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Ainsi, pour $z' < 0$,

$$B_y(z' = -z) = -B_y(z) = +\mu_0 j_0 z = -\mu_0 j_0 z',$$

et pour $z' < -a$,

$$B_y(z') = -B_y(z) = +\mu_0 j_0 a.$$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \geq a \\ -\mu_0 j_0 z \vec{e}_y & \text{si } -a \leq z \leq a \\ +\mu_0 j_0 a \vec{e}_y & \text{si } z \leq -a \end{cases}$$

Comme toujours, vérifier la cohérence du résultat avec la règle de la main droite est un bon test de vraisemblance du résultat.

• **Autre méthode possible** : dans le cas particulier d'une géométrie cartésienne, il peut être intéressant de passer par les équations de Maxwell sous forme locale plutôt que par le théorème d'Ampère intégral. Ici, à l'intérieur du conducteur,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{soit} \quad -\frac{dB_y}{dz} \vec{u}_x = \mu_0 j_0 \vec{u}_x$$

qui s'intègre en séparant les variables. Par exemple, pour $-a \leq z \leq a$,

$$B_y(z) - \overbrace{B_y(z=0)} = -\mu_0 j_0 (z - 0) \quad \text{soit} \quad B_y(z) = -\mu_0 j_0 z,$$

ce qui redonne bien le même résultat que le théorème d'Ampère. Pour $|z| > a$, on peut utiliser la continuité de B_y en $z = \pm a$ (relation de passage pour une distribution volumique) pour trouver une condition limite, ou bien intégrer entre 0 et $z > a$ mais en décomposant l'expression de j , qui est alors définie par morceaux.

Exercice 3 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Principe de superposition.

1 Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

2 Par définition, $\vec{OM} = r \vec{u}_r$. Il faut donc exprimer \vec{u}_θ en fonction de \vec{u}_z et \vec{u}_r , ce qui se fait grâce au produit vectoriel $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$. Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_z \wedge \vec{OM}.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_z \wedge \vec{OM} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \vec{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant $j \vec{u}_z$ et $-j \vec{u}_z$. À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \vec{OM} - \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \vec{O'M}$$

avec O' un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \vec{OO'}.$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

Exercice 4 : Transformateur torique

💡 2 | ✂️ 2 | ⊗



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Induction mutuelle.

1 Soit M un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances** : en supposant les spires réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) . Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ , d'où

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** :▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz , orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot d\ell \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \begin{cases} \mu_0 N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

• **Inductance propre** : Le flux au travers d'une seule spire vaut

$$\varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi} \times \ln \frac{R+a}{R} \times a,$$

donc le flux propre du primaire est

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = N_1 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=L_1} i_1$$

2 Par le même raisonnement,

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.$$

3 Toutes les spires sont identiques, donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=M} i_1$$

On constate alors que

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

4 La loi de comportement des bobines, modifiée par l'induction mutuelle, et avec $i_2 = 0$ car secondaire ouvert donne

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On en déduit alors

$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \cos(\omega t).$$

Si u_1 était constante, le courant i_1 serait constant également et la loi de comportement donnerait $u_2 = 0$.

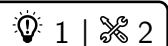
On retrouve ici la loi des tensions d'un transformateur, en identifiant le rapport de transformation $m = N_2/N_1$.

5 Du rapport des amplitudes on déduit directement

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 20.$$

Équations de Maxwell

Exercice 5 : Manipulation des équations de Maxwell



▷ Équations de Maxwell.

1 Par définition,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

ce qui est conforme à l'équation de Maxwell-Gauss car $\rho = 0$ par hypothèse. De même,

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ce qui est là aussi conforme à l'équation de Maxwell-Thomson.

2 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = f'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$f'(z) = \frac{1}{\tau} g(z)$$

3 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = -g'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x.$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère

$$g'(z) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau} f(z) e^{-t/\tau}.$$

4 En dérivant par rapport à z l'équation obtenue par Maxwell-Faraday, on obtient

$$f''(z) = \frac{1}{\tau} g'(z)$$

et en combinant avec la question précédente on obtient

$$f''(z) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau^2} f(z) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants portant sur la seule variable z . Son polynôme caractéristique admet pour racines

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau}$$

┆ Dans un cas aussi simple, pas besoin de passer par le discriminant !

La solution particulière est nulle et la solution homogène est

$$f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right) + \beta \exp\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right)$$

Les conditions données par l'énoncé imposent que $\beta = 0$ et que $f(z=0) = E_0 = \alpha$. On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_x.$$

5 D'après ce qui précède,

$$g(z) = \tau f'(z) = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right)$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_y.$$

Exercice 6 : Chauffage par induction

- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Puissance volumique d'effet Joule ;
- ▷ Intégration de dérivées partielles.

1 Voir la figure 2. En orientant l'axe z par rapport au courant i (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

avec n le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

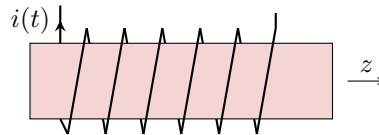


Figure 2 – Dispositif de soudure inductive.

2 L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant \vec{j} et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée « équations » consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et en utilisant le formulaire

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à r ,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

L'analyse des invariances est identique à celle menée en électrostatique. En revanche, celle des symétries est beaucoup plus subtile à cause du champ magnétique variable, et hors de portée en PT : comme c'est $\text{rot } \vec{E}$ qui intervient dans l'équation de Maxwell-Faraday, alors un plan de symétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$ est plan d'antisymétrie de \vec{E} ... ce qui est la propriété inverse par rapport à la charge électrique, car ρ apparaît dans l'équation de Maxwell-Gauss qui porte sur $\text{div } \vec{E}$.

4 D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule,

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma \mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t).$$

Elle est maximale lorsque r est maximal, c'est donc sur les bords du cylindre que le métal chauffe le plus et qu'il fond en premier.

On retrouve un phénomène d'effet de peau analogue à celui que nous rencontrerons en étudiant les ondes électromagnétiques : dans un conducteur en régime variable, les courants sont repoussés à l'extérieur du matériau.

Exercice 7 : Émission radioactive

d'après divers oraux | 💡 2 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell.

1 L'amas émet des charges positives, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a $q(t=0) = 0$: aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique : $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Ainsi, tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M, t)$ doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

Au delà de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{E} / \partial t$. Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour chaque « famille » de sources. Les symétries des courants imposant d'avoir $\vec{B} = \vec{0}$, le champ électrique ne pourra rien y changer.

3 • **Symétries** : la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais comme \vec{E} doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{e}_r.$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$... mais ce n'est pas la peine ici car $\vec{B} = \vec{0}$, tout se passe exactement comme en statique.

• **Invariances** : à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc \vec{E} ne dépend que de r .

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi dans l'ARQS : on raisonne sur une sphère de rayon r centré sur l'amas.

▷ calcul du flux : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r$.

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps r/v_0 pour qu'une particule α sorte de la sphère de rayon r , donc la charge contenue dans la sphère à un instant t est la charge de l'amas à l'instant $t - r/v_0$.

$$Q_{\text{int}} = q \left(t - \frac{r}{v_0} \right)$$

• **Conclusion** :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{r}{v_0}\right)\right) \vec{e}_r.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \\ \rho(r, t) &= \frac{Q_0}{4\pi v_0\tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)\end{aligned}$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned}\vec{j}(r, t) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \\ \vec{j}(r, t) &= \frac{Q_0}{4\pi \tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r.\end{aligned}$$

On retrouve $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$... on aurait pu s'y attendre!

Pour aller plus loin

Exercice 8 : Lévitacion magnétique

💡 3 | ✂ 3

- ▷ Inductance propre ;
- ▷ Flux magnétique ;
- ▷ Force de Laplace.

1 Le flux de \vec{B} au travers de la bobine (2) s'écrit

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{(2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \times \mu_0 n i_1(t) (1 - \cos \alpha) \times \pi b^2$$

et puisque par définition $\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$ on en déduit

$$M = \mu_0 n N \pi b^2 (1 - \cos \alpha).$$

2 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 3.

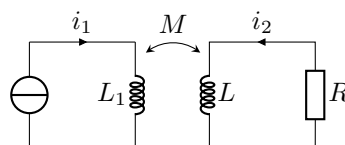


Figure 3 – Schéma électrique équivalent aux deux bobines couplées.

D'après la loi des mailles,

$$L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R i_2 = 0$$

et comme on est en régime sinusoïdal établi alors

$$jL\omega I_2 + jM\omega I_1 + R I_2 = 0$$

d'où on déduit

$$\underline{I}_2 = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} \underline{I}_1 = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} I_0.$$

On en déduit d'abord

$$I_m = |\underline{I}_2| \quad \text{donc} \quad \boxed{I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} I_0.}$$

Pour trouver $\cos \varphi$ le plus simple est d'identifier la partie réelle sous la forme $\text{Re } \underline{I}_2 = I_m \cos \varphi$,

$$\underline{I}_2 = -\frac{(jM\omega)(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 = -\frac{ML\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} I_0 - j\frac{MR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} I_0$$

si bien que

$$\boxed{\cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.}$$

3 Raisonnons sur le cylindre suggéré par l'énoncé. Puisque $r \ll a$, on suppose

$$B_z(r, z, t) \simeq B_z(r=0, z, t)$$

si bien que B_z est uniforme sur les deux surfaces planes du cylindre. Le flux magnétique sortant d'une surface fermée étant nul, Ainsi,

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{lat}} \vec{B} \cdot dS \vec{e}_r + \iint_{\text{sup}} \vec{B} \cdot dS \vec{e}_z + \iint_{\text{inf}} \vec{B} \cdot (-dS \vec{e}_z).$$

soit encore

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{-\pi r^2 B_z(0, z, t)}_{\text{face inférieure}} + \underbrace{\pi r^2 B_z(0, z + dz, t)}_{\text{face supérieure}} + \underbrace{2\pi r dz B_r(r, z, t)}_{\text{paroi latérale}} = 0$$

On identifie alors une dérivée,

$$\pi r^2 \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z} dz + 2\pi r dz B_r(r, z, t) = 0$$

et ainsi

$$\boxed{B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z}.}$$

4 La difficulté de cette question vient du fait que α dépend de z de façon pas évidente du tout. D'après la question précédente,

$$B_r(r=b, z, t) = -\frac{b}{2} \times \mu_0 n i_1 \frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz}.$$

Calculons séparément la dérivée de $1 - \cos \alpha$ avec $\alpha = \alpha(z)$,

$$\frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz} = +\sin \alpha \frac{d\alpha}{dz}.$$

Or $\tan \alpha = a/z$, donc

$$\frac{d \tan \alpha}{dz} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{a}{z^2}$$

ce qui permet d'identifier

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{a}{z^2} \cos^2 \alpha = -\frac{1}{a} \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha = -\frac{1}{a} \sin^2 \alpha.$$

et enfin

$$\frac{d(1 - \cos \alpha)}{dz} = -\frac{1}{a} \sin^3 \alpha.$$

En combinant, on retrouve bien

$$B_r(r=b, z, t) = \frac{b}{2} \times \mu_0 n i_1 \times \frac{1}{a} \sin^3 \alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{B_r(r=b, z, t) = \frac{\mu_0 n i_1(t) b}{2a} \sin^3 \alpha.}$$

5 La force de Laplace élémentaire subie par un tronçon de spire de la bobine (2) s'écrit

$$d\vec{F} = i_2 d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i_2 d\ell \vec{u}_\theta \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z) = -i_2 d\ell B_r \vec{u}_z + i_2 d\ell B_z \vec{u}_r$$

En calculant la résultante sur la bobine, les composantes radiales en deux points diamétralement opposés se simplifient, seule demeure la composante verticale. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -i_2 B_r(b, z, t) \int_{(2)} d\ell \vec{u}_z \\
 &= -i_2 B_r(bz, t) \times 2\pi N b \vec{u}_z \\
 &= -2\pi N b I_m \cos(\omega t + \varphi) \times \frac{\mu_0 n b}{2a} I_0 \cos(\omega t) \sin^3 \alpha \vec{u}_z \\
 &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_z \\
 &= -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \times \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \vec{u}_z
 \end{aligned}$$

d'où en moyenne

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{\mu_0 \pi N n b^2}{2a} I_m I_0 \sin^3 \alpha \cos \varphi \vec{u}_z,$$

puisque $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$

6 On a montré question 2 que $\cos \varphi < 0$, on en déduit donc que la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ est dirigée selon $+\vec{u}_z$, c'est-à-dire vers le haut. Il existe donc une altitude z pour laquelle elle compense exactement le poids et qui correspond à la position d'équilibre de la bobine (2).

Partant de la position d'équilibre, si la bobine (2) est déplacée vers le haut (z augmente) sous l'effet d'une perturbation alors $\tan \alpha$ et $\sin \alpha$ diminuent. La résultante du poids et de la force de Laplace devient donc dirigée vers le bas, ce qui ramène la spire à sa position d'équilibre : cette position est donc **stable**.

7 Un champ magnétique variable est source de champ électrique. L'aluminium étant un conducteur électrique, ce champ électrique crée un courant \vec{j} au sein du matériau : les spires de la bobine (2) modélisent **les lignes de courant de \vec{j}** dans le plateau d'aluminium. En raisonnant en termes de densité volumique de force de Laplace, on en déduit que le plateau subit lui aussi une force moyenne verticale vers le haut qui présente des propriétés analogues à \vec{F} . Il y a donc bien une analogie qualitative entre les deux dispositifs.