BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Fiche résumé 18 – Séquence 6 : Ondes électromagnétiques

Ondes électromagnétiques dans le vide

I - Équation de propagation

- **Méthode pour la démonstration :** calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E})$ de deux façons différentes :
  - ▷ en utilisant la formule du double rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$, $\vec{\Delta}$ = laplacien vectoriel.
  - ▷ en utilisant directement les équations de Maxwell.

- **Équation de d'Alembert :** même équation de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide.

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3{,}00\cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

II - Ondes planes

- **Onde plane « tout court » :**

▷ *Qualitativement :* les surfaces d'onde sont des plans ;
▷ *Mathématiquement :* les champs ne dépendent que d'une seule variable d'espace cartésienne, p.ex. $\vec{E}(x,t)$.

- **Onde plane progressive :**

▷ *Qualitativement :* l'onde se propage dans un sens bien déterminé ;
▷ *Mathématiquement :* x et t se combinent en une seule variable réduite

$$\vec{E}(x,t) = f(x \pm ct)\,\vec{e}_{\mathrm{p}} = F\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\vec{e}_{\mathrm{p}} \qquad \begin{cases} \ominus \ \text{propagation dans le sens des } x \text{ croissants} \\ \oplus \ \text{propagation dans le sens des } x \text{ décroissants} \end{cases}$$

▷ *Graphiquement :* deux représentations possibles (type photo ou type signal enregistré par un capteur au cours du temps), qui peuvent éventuellement apparaître symétriques en fonction du sens de propagation de l'onde. Toujours réfléchir sur des points remarquables (sommet, points anguleux) pour faire les tracés.

- **Onde plane progressive harmonique :**

▷ *Mathématiquement :* propagation le long de l'axe (Ox) :

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t \pm kx + \varphi)\,\vec{e}_{\mathrm{p}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \underline{\vec{E}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx + \varphi)}\,\vec{e}_{\mathrm{p}} = \underline{\vec{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}$$

Cas général : $\vec{k}$ vecteur d'onde dirigé dans le sens propagation

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi)\,\vec{e}_{\mathrm{p}}) \qquad \longleftrightarrow \qquad \underline{\vec{E}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi)}\,\vec{e}_{\mathrm{p}} = \underline{\vec{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$$

Dérivation des champs complexes : analyser la convention d'exponentielle complexe.

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \pm\mathrm{i}\omega\underline{\vec{E}} \qquad\qquad \frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x} = \mp\mathrm{i}k_x\underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \vec{\nabla} = \mp\mathrm{i}\,\vec{k}$$

▷ *Relation de dispersion :* raisonnement type analyse-synthèse, on injecte l'expression (réelle ou complexe) de l'OPPH dans l'équation de d'Alembert.

$$\omega = kc \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = cT \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{etc.}$$

▷ *Relation de structure :* traduire en complexes les équations de Maxwell en raisonnant avec $\vec{\nabla}$.

$$\vec{B} = \vec{u}\wedge\frac{\vec{E}}{c}\,,$$

avec $\vec{u}$ la direction de propagation de l'onde. Résultat vrai pour toutes les OPP.

III - Polarisation

- **Définition :** direction du vecteur champ électrique de l'OEM, forcément orthogonale à la direction de propagation.
- **Onde non polarisée :** direction aléatoire fluctuant rapidement, cas de la lumière naturelle.
- **Polarisation rectiligne :** direction constante.
- **Polariseur :** production d'une polarisation rectiligne, le polariseur sélectionne la composante de l'onde sur son axe passant $\vec{n}$ et coupe la composante sur son axe bloquant $\vec{n}_\perp$.

$$\vec{E}_{\text{sortant}} = (\vec{E}_{\text{entrant}} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

IV - Transport d'énergie

- **Densité volumique d'énergie électromagnétique :**

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$$

Cas d'une OPPH : en moyenne temporelle $\langle w_{\text{em}}\rangle$ est uniforme et équirépartie entre les formes électrique et magnétique.

- **Rayonnement : vecteur de Poynting**

▷ *Définition :* $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

▷ *Sens physique :* puissance rayonnée par unité de surface ($\vec{\Pi}$ est l'exact analogue pour le rayonnement de $\vec{j}_{\text{th}}$ pour la conduction thermique). Puissance rayonnée au travers d'une surface $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,.$$

▷ *Cas d'une OPPH :* le vecteur de Poynting est dirigé dans le sens de propagation de l'onde $\leadsto$ cohérent avec l'intuition.

▷ *Cas du régime stationnaire :* le vecteur de Poynting peut conduire à des paradoxes (résultats non conformes au bon sens), mais les bilans énergétiques demeurent justes.

- **Utilisation des champs complexes :** les grandeurs énergétiques sont non-linéaires par rapport aux champs, donc seules les moyennes peuvent se calculer avec les complexes.

$$\begin{aligned}\langle \vec{j}\cdot\vec{E}\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}\cdot\underline{\vec{E}}^\star\right)\\ \langle E^2\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^\star) = \frac{1}{2}|\underline{\vec{E}}|^2\\ \langle \vec{E}\wedge\vec{B}\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)\end{aligned}$$

- **Bilan d'énergie électromagnétique :** l'énergie électromagnétique peut varier sous l'effet du rayonnement (échange) et de la dissipation (conversion en une autre forme d'énergie, p.ex. effet Joule).

▷ *Bilan global* : pour un volume de contrôle macroscopique immobile,

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\oiint \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{\mathcal{P}_{\text{abs}}}_{\text{dissipation}}\,.$$

avec U_{em} l'énergie électromagnétique stockée dans le volume en question.

▷ *Bilan local :* p_{abs} densité volumique de puissance absorbée.

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = -\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{\Pi}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{p_{\text{abs}}}_{\text{dissipation}} = -\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{\Pi}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{\text{Joule}}$$