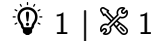



# Ondes électromagnétiques dans le vide

## Structure des OEM dans le vide

### Exercice 1 : Onde sphérique



 ▷ OPPH;  
▷ Vecteur de Poynting.

1 Le vecteur d'onde de l'onde sphérique est donné par  $\vec{k} = k\vec{e}_r$ .

2 Le champ magnétique est donné par

$$\vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0(r)}{c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi.$$

3 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r.$$

Sachant que  $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = 1/2$ , on en déduit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0(r)^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r.$$

4 La puissance rayonnée au travers d'une sphère de rayon  $r$  vaut

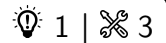
$$\mathcal{P} = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}.$$

Comme  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  est uniforme sur la sphère, on en déduit directement

$$\mathcal{P} = \frac{E_0(r)^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{2\pi r^2 E_0(r)^2}{\mu_0 c}.$$

Comme l'onde se propage dans le vide, elle n'est **ni absorbée ni amplifiée, elle ne fait que s'étaler** dans l'espace : la puissance  $\mathcal{P}$  est donc indépendante du rayon de la sphère. On en déduit

$$E_0(r)^2 = \frac{\mu_0 c}{2\pi r^2} \mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi} \mathcal{P}}.$$

**Exercice 2 : Un exemple d'OPPH**

- ▷ OPPH;  
▷ Vecteur de Poynting.

- 1 D'après la relation de dispersion,

$$f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Cette onde appartient au domaine **optique**, comme le montre d'ailleurs sa longueur d'onde de 600 nm.

- 2 Par définition, on peut identifier

$$\exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \exp \left[ i \left( \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t \right) \right]$$

ce qui donne

$$k_x x + k_y y + k_z z = \frac{K}{3} (2x + 2y - z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{k} = \frac{2K}{3} \vec{e}_x + \frac{2K}{3} \vec{e}_y - \frac{K}{3} \vec{e}_z}.$$

On déduit

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = K \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = K \quad \text{d'où} \quad \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}}.$$

- 3 Par définition, un plan d'onde est une surface sur laquelle le champ électrique est uniforme à tout instant, soit

$$\exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right] = \text{cte}.$$

Ainsi, les plans d'onde sont tous les plans parallèles d'équation

$$\boxed{2x + 2y - z = \text{cte}.$$

- 4 Compte tenu de la convention de signe dans l'exponentielle, l'équation de Maxwell-Gauss en représentation complexe s'écrit

$$+i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{soit} \quad k_x E_x + k_y E_y = 0 \quad \text{d'où} \quad E_y = -\frac{k_x}{k_y} E_x$$

Compte tenu de ce qui précède,  $k_x = k_y$  donc on en déduit

$$\boxed{E_y = -E_x = -E_0 \exp \left[ i \left( \frac{K}{3} (2x + 2y - z) - \omega t \right) \right]}.$$

- 5 D'après la relation de structure appliquée à l'OPPM,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{K E_x}{3\omega} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y).$$

En développant le produit vectoriel par la droite,

$$(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \wedge (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = (\vec{0} - 2\vec{e}_z - \vec{e}_y) - (2\vec{e}_z + \vec{0} - \vec{e}_x) = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - 4\vec{e}_z.$$

On en déduit alors

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{K E_x}{3\omega} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)}.$$

- 6 Avec les champs réels, la densité volumique d'énergie s'écrit

$$w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

et donc avec les champs complexes

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}^*}{2\mu_0} \right].$$

Compte tenu des expressions précédentes,  $\vec{E} = E_x(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$  donc

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = |E_x|^2 (1 + 1) = 2E_0^2$$

$$\text{et } \vec{B} = -\frac{E_x}{3c} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B}^* = \frac{|E_x|^2}{9c^2} (1 + 1 + 16) = \frac{2E_0^2}{c^2}$$

ce qui donne finalement

$$\langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle w_{\text{em}} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2}.$$

Elle est **uniforme**, comme attendu pour une OPPM.

**7** La moyenne du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}.$$

En développant par la gauche, le produit vectoriel donne

$$(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \wedge (\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = (\vec{0} + \vec{e}_z - 4\vec{e}_y) - (-\vec{e}_z + \vec{0} + 4\vec{e}_x) = -4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z.$$

Ainsi,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{|E_x|^2}{3c\mu_0} (-4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{3c\mu_0} (2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)}.$$

Le vecteur de Poynting est **colinéaire au vecteur d'onde**, comme attendu pour une OPPM.

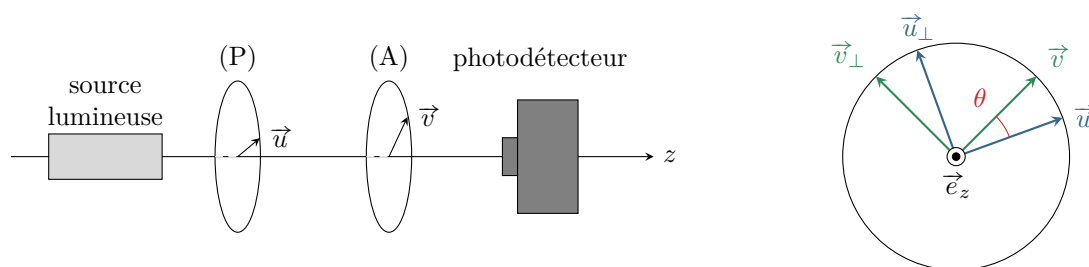
### Exercice 3 : Loi de Malus



▷ Polarisation ;

▷ Vecteur de Poynting.

**1** Voir figure 1.



**Figure 1 – Étude expérimentale de la loi de Malus.**

**2** Par définition, en sortie du polariseur, l'onde est polarisée rectilignement selon son axe passant. Ainsi,

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda} \end{cases},$$

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{u} .}$$

Comme l'onde est progressive dans le sens des  $z$  croissants, il n'y a pas de surprise à voir apparaître la variable  $ct - z$ .

3 En s'appuyant sur la figure 1 pour exprimer  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}_A$ , on obtient

$$\vec{E}_P(z, t) = E_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\cos \theta \vec{v} - \sin \theta \vec{v}_\perp).$$

En sortie du polariseur, la composante sur son axe passante est transmise et la composante orthogonale est coupée, d'où

$$\vec{E}_{PA}(z, t) = E_0 \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}.$$

Le champ magnétique s'obtient par la relation de structure,

$$\vec{B}_{PA} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_{PA}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{e}_z \wedge \vec{v}),$$

et comme par construction de la base  $\mathcal{B}_A$  on a  $\vec{e}_z \wedge \vec{v} = \vec{v}_\perp$ , alors

$$\vec{B}_{PA}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos \theta \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{v}_\perp.$$

Enfin,

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{\vec{E}_{PA} \wedge \vec{B}_{PA}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] (\vec{v} \wedge \vec{v}_\perp)$$

et ainsi

$$\vec{\Pi}_{PA} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right] \vec{e}_z.$$

4 Par définition de l'intensité lumineuse, en notant  $z_0$  la position du détecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] S \right\rangle$$

car le vecteur de Poynting est uniforme sur toute la surface du détecteur (l'onde est plane) et  $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ . On en déduit directement

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \left\langle \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z_0) \right] \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2 \theta \times \frac{1}{2}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

### Exercice 4 : Mesure de la concentration en CO2 dans l'atmosphère



- ▷ OPPH;
- ▷ Vecteur de Poynting;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 Le champ électrique de l'onde s'écrit

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x,$$

d'où on déduit le champ magnétique avec la relation de structure,

$$\vec{B}(z, t) = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}(z, t)}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

et enfin le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi}(z, t) = \frac{\vec{E}(z, t) \wedge \vec{B}(z, t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z.$$

**2** Raisonnons sur une section droite du faisceau de normale  $\vec{e}_z$ . Comme le vecteur de Poynting  $y$  est uniforme,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \times \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) S \right\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$$

soit

$$I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

**3** Procédons à un bilan d'énergie pour une tranche d'épaisseur  $dz$ . En moyenne temporelle, pendant  $dt$ , elle reçoit de l'énergie par rayonnement par sa face située en  $z$ , elle en cède par celle située en  $z + dz$ , et une partie de cette énergie est dissipée par absorption. Ainsi,

$$\langle dU_{em} \rangle = \mathcal{P}_{ray}(z) dt - \mathcal{P}_{ray}(z + dz) dt - \mathcal{P}_{abs} dt = 0.$$

La puissance rayonnée est reliée au flux du vecteur de Poynting, donc

$$\mathcal{P}_{ray}(z) = \left\langle \iint_{\text{face } z} \vec{\Pi}(z) \cdot d\vec{S} \right\rangle = S I(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{ray}(z + dz) = S I(z + dz).$$

La tranche contient  $n S dz$  molécules de  $\text{CO}_2$ , qui absorbent donc en moyenne une puissance

$$\mathcal{P}_{abs} = n S dz p = \sigma n S dz I.$$

En remplaçant les différents termes, il vient

$$S(I(z) - I(z + dz)) - \sigma n S dz I = 0 \quad \text{soit} \quad -S \frac{dI}{dz} dz - \sigma n S dz I = 0$$

ce qui se met bien sous la forme cherchée

$$\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0.$$

**4** Cette équation différentielle se résout en

$$I(z) = I_0 e^{-\sigma n z} \quad \text{avec} \quad I_0 = I(z=0)$$

ce qui permet d'exprimer l'absorbance,

$$A = \ln \frac{I_0}{I_0 e^{-\sigma n L}} = \sigma n L.$$


La longueur de l'échantillon  $L$  et la section efficace  $\sigma$  étant connues, l'absorbance est directement proportionnelle à la quantité  $n$  que l'on cherche à mesurer.

**5** L'équation d'état des gaz parfaits indique que la concentration d'un gaz (nombre de molécules par unité de volume) dépend directement de la température et de la pression, qu'il faut donc parfaitement contrôler pour que les mesures soient fiables. Procéder par étalonnage plutôt que par une mesure absolue permet de s'affranchir de manière robuste de toutes les imperfections du dispositif : réflexions parasites, etc.

**6** On constate évidemment une hausse quasi-linéaire (voire un début d'exponentielle ...) due aux émissions humaines de  $\text{CO}_2$  par la combustion de charbon, pétrole, gaz, etc. Les oscillations saisonnières sont dues au cycle de la végétation : comme il y a nettement plus de terres émergées dans l'hémisphère Nord, la consommation de  $\text{CO}_2$  par photosynthèse est maximale au printemps/été de cet hémisphère,

## Exercice 5 : Champs d'un laser

💡 3 | ✂️ 1

- 
 ▷ OPPH;  
 ▷ Vecteur de Poynting;  
 ▷ Résolution de problème.

On assimile l'air au vide. D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y.$$

Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

En modélisant le faisceau laser par un faisceau cylindrique de rayon  $a = 1 \text{ mm}$  (diffraction négligeable), la puissance moyenne portée par le faisceau vaut donc

$$\mathcal{P} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \times \pi a^2 = \frac{E_0^2 \pi a^2}{\mu_0 c}.$$


Pour une puissance  $\mathcal{P} = 1 \text{ mW}$ , on en déduit

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P} \mu_0 c}{\pi a^2}} \simeq 45 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

## Bilans d'énergie électromagnétique, au delà des OEM

## Exercice 6 : Bilan de puissance d'un conducteur

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2

- 
 ▷ Théorème d'Ampère;  
 ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

**1** Il s'agit de la **conductivité électrique**, notée  $\gamma$ . Celle du cuivre, l'un des meilleurs conducteurs, est de  $6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ; à titre de comparaison celle de l'eau de mer n'est que de l'ordre de  $5 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**2** D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

d'où on déduit l'intensité par calcul du flux au travers d'une section transverse, c'est-à-dire un cercle,

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad \boxed{I = \pi R^2 \gamma E}.$$

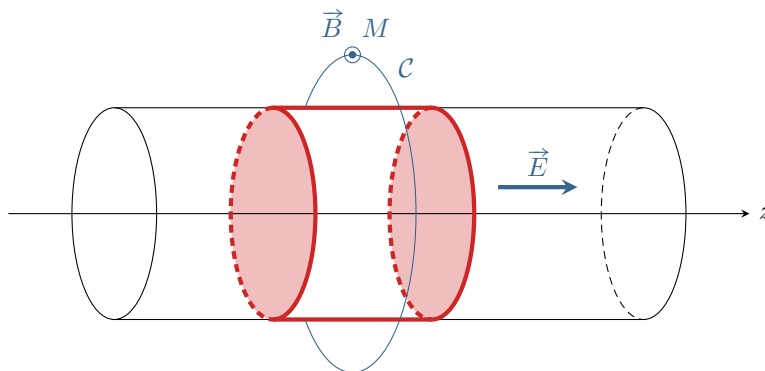


Figure 2 – Bilan de puissance électromagnétique d'un cylindre.

Pour le calcul du champ magnétique, plaçons nous en un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 2.

- Invariances et symétries :

- ▷ La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe ( $Oz$ ) et par rotation autour de cet axe, le champ magnétique ne dépend donc que du rayon  $r$ .
- ▷ Le plan passant par  $M$  est contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique lui est donc orthogonal : on en déduit qu'il est porté par  $\vec{u}_\theta$ .
- ▷ Conclusion :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : Raisonnons sur un contour  $\mathcal{C}$  circulaire de rayon  $r$  centré sur l'axe ( $Oz$ ) et passant par  $M$ . Comme le champ est de même norme sur ce contour, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de la position de  $M$  :

- ▷ si  $r > R$  alors  $I_{\text{enl}} = I = \pi R^2 \gamma E$ ;
- ▷ si  $r < R$  alors  $I_{\text{enl}} = \pi r^2 j = \pi r^2 \gamma E$

Finalement,

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi R^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 \pi r^2 \gamma E}{2\pi r} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

d'où en simplifiant

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 R^2 \gamma E}{2r} \vec{u}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} \vec{u}_\theta & r \leq R \end{cases}$$

**3** La puissance volumique dissipée par effet Joule s'écrit

$$p_{J,\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2.$$

La puissance dissipée dans le tronçon vaut donc

$$\mathcal{P}_J = \gamma E^2 \ell \pi R^2.$$

**4** Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Comme  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{u}_z$  et  $\vec{B}$  par  $\vec{u}_\theta$  alors  $\vec{\Pi}$  est porté par  $\vec{u}_r$ .

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \times E \times \frac{\mu_0 r \gamma E}{2} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta) = -\frac{r \gamma E^2}{2} \vec{u}_r.$$

Enfin, la puissance rayonnée au travers des parois du tronçon de cylindre est égale au flux sortant du vecteur de Poynting en  $r = R$ . Sur les surfaces verticales du cylindre (colorées de la figure 2), son flux est nul. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \vec{u}_r,$$

d'où

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{R \gamma E^2}{2} \times 2\pi R \ell$$

soit

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\gamma E^2 \pi R^2 \ell.$$

*La puissance rayonnée est négative, ce qui signifie que l'énergie ne sort pas mais entre dans le cylindre au travers des parois. On peut (et on doit !!) s'étonner de la direction innattendue du vecteur de Poynting, qui n'est pas dirigé le long du fil comme on l'imagine mais qui entre par les parois latérales. Plusieurs interprétations sont possibles, toutes sont « valables », mais aucune n'est parfaitement convaincante. Les deux principales à notre niveau sont les suivantes :*

- ▷ les circuits électriques servent simplement à contenir les sources mais que les transferts d'énergie sont réalisés par le champ électromagnétique que créent les sources autour du circuit : l'électricité n'est pas de la mécanique des fluides ;
- ▷ les grandeurs énergétiques de l'électromagnétisme ne sont contraintes que par l'équation de Poynting, c'est-à-dire seulement par leur divergence, c'est-à-dire via leurs dérivées : leur définition n'est pas unique, et on peut proposer un autre jeu de grandeur ( $\vec{\Pi}', u'_{em}$ ) qui conduirait aux mêmes résultats physiques mais aurait plus de sens dans ce cas particulier.

Plus modestement, on retiendra surtout que le vecteur de Poynting appliqué en régime stationnaire peut conduire à des paradoxes dans les interprétations !

5 On constate l'égalité des deux termes,

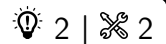
$$\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{ray} = 0.$$

Cela signifie que toute la puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre y entre par rayonnement, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas d'autre source de puissance dans le tronçon de cylindre étudié. Ce résultat est par ailleurs cohérent avec l'équation intégrale de Poynting,

$$\frac{d\mathcal{U}_{em}}{dt} = - \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} - \mathcal{P}_J = 0,$$

car en régime stationnaire l'énergie électromagnétique  $\mathcal{U}_{em}$  contenue dans le système est constante.

### Exercice 7 : Échanges énergétiques lors de la charge d'un condensateur



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

Le condensateur étudié est schématisé figure 3.

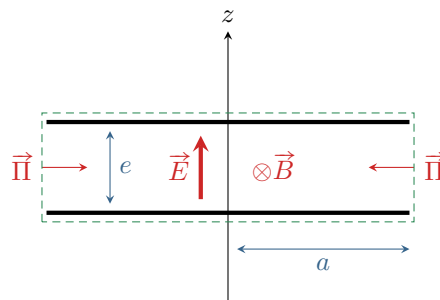


Figure 3 – Schéma des notations.

1 D'après la loi des mailles,

$$U_0 = Ri + u$$

et avec la loi de comportement du condensateur on en déduit

$$RC \frac{du}{dt} + u = U_0$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Cette équation admet  $U_0$  comme solution particulière, et les solutions homogènes sont de la forme  $A e^{-t/\tau}$ , ainsi

$$u(t) = A + U_0 e^{-t/\tau}$$

Comme le condensateur est initialement déchargé, alors

$$u(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A + U_0$$



d'où on a finalement

$$u(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

**2** Par définitions, la charge stockée sur le condensateur vaut

$$q = \sigma \pi a^2 = C u = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{e} u \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0}{e} u$$

et ainsi

$$\vec{E} = \frac{u(t)}{e} \vec{e}_z.$$

**3** Les sources de champ magnétique sont les courants et les variations de champ électrique. Il n'y a pas de courant entre les armatures, la seule source de champ magnétique est donc le champ électrique, ou plus exactement ses variations. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

ce qui montre que  $\vec{j}$  et  $\partial \vec{E} / \partial t$  jouent un rôle analogue. Leurs symétries ont donc les mêmes conséquences sur le champ magnétique.

D'après la question précédente,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On se place en un point  $M$  quelconque. Le plan passant par  $M$  et contenant l'axe  $(Oz)$  (plan  $M, \vec{e}_r, \vec{e}_z$ ) est plan de symétrie de  $\partial \vec{E} / \partial t$ ,  $\vec{B}$  est donc orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M, t) = B_\theta(M, t) \vec{e}_\theta.$$

**4** L'équation de Maxwell-Thomson donne

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire que  $\vec{B}$  est indépendant de  $\theta$ . De plus, l'équation de Maxwell-Ampère donne

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

On en déduit d'une part que

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire que  $\vec{B}$  est indépendant de  $z$ , et d'autre part que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt}.$$

Cette relation donne

$$\frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r$$

ce qui s'intègre en

$$r B_\theta = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Le champ  $\vec{B}$  ne pouvant diverger en  $r = 0$  où ses sources n'ont pas de singularité, la fonction  $f(t)$  est forcément nulle. On en déduit donc

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta.$$

Comme on intègre une dérivée partielle, la « constante » d'intégration est en fait une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction qui dépend des variables laissées constantes dans la dérivée partielle : ici,  $f$  doit a priori dépendre de  $z$ ,  $\theta$  et  $t$  ... mais elle ne dépend que de  $t$  car il a été montré par ailleurs

que  $\vec{B}$  ne dépend ni de  $z$  ni de  $\theta$ .

Par ailleurs, la méthode usuelle pour trouver un champ connaissant l'autre à partir des équations de Maxwell consiste à prendre le rotationnel du champ que l'on connaît : calculer un rotationnel est souvent infiniment plus simple que de l'intégrer ! Cette méthode est ici inopérante, et on peut même constater que l'équation de Maxwell-Faraday qu'il aurait été naturel d'utiliser conduit à une contradiction apparente :  $\text{rot } \vec{E}$  est nul ... alors que la dérivée temporelle de  $\vec{B}$  ne l'est pas ! Le paradoxe vient du fait que l'expression de  $\vec{E}$  est celle obtenue dans l'ARQS électrique, approximation pour laquelle les équations de Maxwell portant sur  $\vec{E}$  s'écrivent comme en statique, ce qui revient à négliger les variations temporelles de  $\vec{B}$ . À partir des expressions trouvées dans l'exercice, on peut calculer l'ordre de grandeur des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique :

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{u^2}{e^2} \quad \text{et} \quad w_m = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 a^2}{4\tau^2} w_e.$$

Le terme  $\varepsilon_0 \mu_0 a^2$  représente le carré de la durée nécessaire à une OEM pour se propager sur une longueur  $a$ , très inférieure au temps caractéristique d'évolution  $\tau$  par hypothèse d'ARQS. On constate alors que l'énergie est essentiellement sous forme électrique, ce qui justifie la pertinence de l'hypothèse d'ARQS électrique.

5 Par définition,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left( \frac{u}{e} \vec{e}_z \right) \wedge \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e} \frac{du}{dt} r \vec{e}_\theta \right)$$

ce qui se simplifie en

$$\vec{\Pi} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} r \vec{e}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting correspond à une puissance sortant, la puissance entrant dans le condensateur s'écrit donc (on intègre sur la surface en pointillés verts de la figure 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= - \oiint_{\text{condensateur}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_z - \iint_{\text{sup}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot (-dS \vec{e}_z) - \iint_{\text{lat}} \Pi_r \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{e^2} u \frac{du}{dt} a \times 2\pi a e \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = \varepsilon_0 \frac{1}{e} u \frac{du}{dt} \pi a^2.$$

Cette puissance vient de l'extérieur du condensateur, et la direction de  $\vec{\Pi}$  montre qu'elle entre par les parois latérales.

*Le fait que l'énergie entre dans le condensateur par les parois latérales, et pas par les fils électriques, est contre-intuitif et très paradoxal ! La résolution du paradoxe vient d'une analogie très naturelle mais trompeuse avec la mécanique des fluides : en mécanique des fluides, c'est le mouvement du fluide qui entraîne le transport d'énergie. Au contraire, en électricité, les fils électriques transportent les charges et courants, qui sont des sources de champ électromagnétique, et ce sont ces champs qui assurent le transport de l'énergie. Ce paradoxe se manifeste également dans le temps de réponse d'un circuit : en ARQS, tous les points d'un circuit électrique réagissent instantanément à une modification de tension en un point de ce circuit ... alors même que les électrons de conduction n'avancent qu'à environ  $0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  ! Ceci prouve que l'information n'est pas véhiculée par ces électrons mais par un autre canal, en l'occurrence une onde électromagnétique.*

*Un bilan analogue appliqué au générateur montrerait qu'il cède de la puissance. On peut en fait montrer que le générateur cède une puissance  $2\mathcal{P}$ , la moitié étant stockée par le condensateur et l'autre moitié dissipée par la résistance.*

6 On peut réécrire la puissance reçue sous la forme

$$\mathcal{P} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e} u \frac{du}{dt} = C u \frac{du}{dt} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C u^2 \right).$$

On reconnaît l'expression de l'énergie stockée dans le condensateur.

7 L'énergie reçue s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P} dt = \left[ \frac{1}{2} C u^2 \right]_0^\infty$$

Avec l'expression de  $u$  déterminée à la première question (ou avec la condition initiale et la solution particulière), on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

## Exercice 8 : Décharge d'un conducteur dans l'air

💡 3 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell ;  
▷ Bilan d'énergie électromagnétique.

1 La décharge est par hypothèse isotrope, donc  $\vec{j}$  est radial, et il y a invariance des distributions de charge et de courant par rotation autour de  $O$ .

▷ Conséquence 1 :  $\vec{E}(M, t) = E_r(r, t) \vec{e}_r$  ;

▷ Conséquence 2 :  $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$ .

2 L'équation de Poynting se réécrit

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -p_J$$

avec  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting, qui traduit la puissance rayonnée,  $u_{\text{em}}$  la densité volumique d'énergie électromagnétique, qui traduit le stockage d'énergie, et enfin  $p_J$  la puissance volumique dissipée par effet Joule.

Comme le champ magnétique est nul on en déduit

$$0 + \varepsilon_0 E_r(r, t) \frac{\partial E_r(r, t)}{\partial t} = -\gamma E_r(r, t)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} E_r = 0.$$

Cette équation se résout en

$$\vec{E}(M, t) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-t/\tau} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}.$$

La condition initiale  $\vec{E}(M, t=0)$  se détermine avec le théorème de Gauss.

3 L'équation de Maxwell-Gauss ne dépend pas du temps, donc le théorème de Gauss s'applique aussi en régime variable. En raisonnant sur la sphère de rayon  $R$ , qui coïncide avec la boule, on trouve

$$4\pi r^2 E_r(r, t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

4 Méthode 1 : intégrer sur tout l'espace la puissance volumique dissipée par effet Joule, ce qui donne

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \iiint \gamma E_r(r, t)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{=d\tau} = \frac{\gamma Q(t)^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

puis ensuite intégrer pour  $t$  allant de 0 à l'infini, d'où

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

On retrouve l'énergie propre de la boule, indépendamment de la conductivité de l'air qui ne régit que la vitesse du processus, ce qui est tout à fait normal.

Méthode 2 : calculer l'énergie électromagnétique dans tout l'espace à l'instant initial et à l'instant final et prendre la différence.

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_r(r, t)^2 \underbrace{4\pi r^2 dr}_{=d\tau} = \frac{Q(t)^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

d'où on déduit

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = U_{\text{em}}(0) - U_{\text{em}}(t \rightarrow \infty) = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$