BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Cours 13 – Électromagnétisme

Version prof

Potentiel électrostatique
Condensateur

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 1 « Électrostatique ».

Les notions abordées sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues. Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans le cas d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrostatique.
Condensateur plan modélisé par la superposition de deux distributions surfaciques infinies de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ du champ électrostatique créé par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Associer, en dehors des sources, les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Capacité numérique : tracer quelques lignes de champ et équipotentielles pour une distribution donnée.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Les équations locales des champs statiques sont introduites comme des cas particuliers des équations de Maxwell. Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulation locale et intégrale.	Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme locale et intégrale.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : annexe 3 « Outils numériques ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
Représentation graphique d'un champ scalaire ou vectoriel.	Utiliser les fonctions de base **contour** et **streamplot** de la bibliothèque **matplotlib**, leurs spécifications étant fournies, pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champ.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

▷ Écrit : épreuve A 2019 ; épreuve de modélisation 2020.
▷ Oral : souvent.

Le chapitre précédent a permis d'introduire les propriétés et des méthodes de calcul du champ électrostatique. Nous allons ici aborder une autre formulation de l'électrostatique, basée sur une autre grandeur reliée au champ $\vec{E}$, le potentiel électrostatique V. L'intérêt est double :

- ▷ d'une part, le potentiel est un champ scalaire donc un peu plus simple à manipuler ;
- ▷ d'autre part, il a une grande importance pratique car de nombreuses grandeurs physiques usuelles, notamment les tensions électriques, sont exprimées en termes de potentiel électrostatique.

I - Une autre formulation de l'électrostatique

I.A - Définition du potentiel électrostatique

• Équation de Maxwell-Faraday

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{En tout point } M \text{ de l'espace, } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Dans le cas particulier du régime stationnaire, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

R

Rappel : en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ + rappeler $\vec{\nabla}$

Espace 1

Contenu physique :

Q

▷ En régime variable, il existe un couplage entre champ électrique et champ magnétique : un champ magnétique variable peut créer un champ électrique.

$\rightsquigarrow$ phénomène d'induction

Espace 2

▷ Ce couplage disparaît en régime stationnaire.

• Existence du potentiel électrostatique

Un champ vectoriel $\vec{U}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{0}$ peut toujours s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire ψ,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \psi \text{ tel que } \vec{U} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi\,.$$

> ***Remarque :*** *ce résultat peut se « deviner » avec $\vec{\nabla}$ et la nullité du produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même,*
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\psi = \vec{0}\,.$$

Conséquence :

On appelle **potentiel électrostatique** le champ scalaire V tel que

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,.$$

On dit alors que le champ $\vec{E}$ **dérive** du potentiel V.

Le potentiel V s'exprime en volts. Il est défini à une constante additive près.
Il possède les mêmes propriétés d'invariance que $\vec{E}$, donc dépend des mêmes variables.

R

Attention ! Pour des raisons historiques, il y a un signe dans la définition du potentiel.

> ***Remarque culturelle :*** *En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday ne s'écrit plus $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, donc $\vec{E}$ ne dérive plus simplement d'un potentiel scalaire. On peut montrer qu'il faut y ajouter un potentiel vecteur $\vec{A}$ (hors programme en PT) tel que*
>
> $$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,.$$

- **Non-unicité**

Considérons le champ électrostatique créé par deux potentiels, $V(M)$ et $V'(M) = V(M) + V_0$ avec V_0 une constante.

$\vec{E}' = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V' = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \vec{E}$ car les dérivées d'une constante sont nulles

Espace 3

Utilité pratique :
on peut choisir la valeur du potentiel en un point particulier de l'espace.

Espace 4

- **Continuité**

D'après la définition à partir de la force de Coulomb, le champ électrique prend toujours une valeur finie (sauf éventuellement au niveau d'une charge ponctuelle ou linéïque, ce qui relève davantage d'accidents de modélisation plutôt que de problèmes physiques).

⇝ conséquence importante pour le potentiel électrostatique :

R

> Le potentiel électrostatique est un champ partout continu,
> sauf au niveau des charges ponctuelles.

I.B - Calculer le potentiel à partir du champ

Calculer le champ connaissant le potentiel est facile : il suffit de calculer des dérivées partielles. Procéder en sens inverse est moins simple : il faut intégrer, mais la relation est vectorielle. Sur la plupart des cas (simples !) que nous serons amenés à considérer, le plus efficace est de projeter puis intégrer la définition $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$.

- **Exemple d'une charge ponctuelle**

M !

Application 1 : Potentiel créé par une charge ponctuelle

Rappeler le champ électrique créé par une charge ponctuelle située en O (origine du repère). En déduire le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul à l'infini.

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle s'écrit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

Comme le champ ne dépend que de r alors le potentiel aussi (mêmes invariances). Par ailleurs, le gradient d'une fonction qui ne dépend que de r s'écrit en coordonnées sphériques (à connaître) :

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

Par séparation de variables,

$$\int_0^{V(r)} \mathrm{d}V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

d'où on conclut

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Espace 5

Le potentiel créé par une charge ponctuelle placée en O s'écrit

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Pour un ensemble de charges ponctuelles q_n placées aux points P_n,

$$V(M) = \sum_n \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0\, P_n M}$$

> ***Remarque :*** *contrairement à ce que la définition peut laisser penser, il y a le même signe dans l'expression du champ et du potentiel car l'intégration apporte un signe supplémentaire.*

- **Exemple d'un cylindre uniformément chargé**

Application 2 : Potentiel créé par un cylindre uniformément chargé

M !

Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur infinie, uniformément chargé en volume avec la densité ρ_0. Le champ créé peut se déterminer à partir du théorème de Gauss : nous l'avons fait au chapitre précédent. En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe du cylindre, il s'écrit

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\[2mm] \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul en $r = 0$.

Comme le champ ne dépend que de r alors le potentiel aussi (mêmes invariances). Par ailleurs, le gradient pour un champ scalaire ne dépendant que de r s'écrit en cylindriques (à connaître)

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r$$

Il faut commencer le calcul par le domaine d'espace où l'on connaît une condition limite, soit ici $r < R$:

$$\int_0^{V(r)} \mathrm{d}V = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\int_0^r r\mathrm{d}r$$

ce qui donne

$$\boxed{V(r<R) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2\,.}$$

On traite ensuite l'autre domaine d'espace, en utilisant la continuité du potentiel pour obtenir la condition limite :

$$V(r\!=\!R) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}R^2\,,$$

et ainsi en séparant les variables

$$\int_{V(R)}^{V(r)} \mathrm{d}V = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^r \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

d'où on conclut

$$\boxed{V(r>R) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}R^2 - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}\,.}$$

Espace 6

Que se passe-t-il en $r \to \infty$? Comment l'interpréter ?

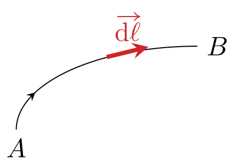
divergence : bizarrerie mathématique (non physique) liée à la modélisation (non physique également) par une distribution infinie.

Espace 7

Généralisation :

On ne peut pas imposer la valeur à l'infini du potentiel créé par une distribution infinie de charges.

- **Cas général : circulation du champ électrostatique**



On appelle **circulation** d'un champ vectoriel $\vec{U}$ le long d'une courbe $\widehat{AB}$ l'intégrale

$$\mathcal{C} = \int_{\widehat{AB}} \vec{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est en tout point tangent à $\widehat{AB}$ et dirigé de A vers B.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est appelé vecteur **longueur élémentaire** ou **élément de longueur**, par analogie avec le vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$. Son expression est la même que celle du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$: la notation et le nom diffèrent car l'un est défini dans un contexte purement géométrique et l'autre dans un contexte mécanique.

> ***Remarque :*** *vous connaissez déjà un exemple de circulation : le travail d'une force.*

Intermède mathématique : rappelons qu'on appelle **différentielle** d'une fonction f de plusieurs variables sa variation infinitésimale $\mathrm{d}f$ sous l'effet d'une variation infinitésimale de toutes ses variables. Par exemple, pour une fonction de trois variables $f = f(x, y, z)$,

$$\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) - f(x, y, z)$$

et par un (en fait trois) développement(s) limité(s) on comprend que

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} \mathrm{d}z\,.$$

Dans le cas où f est une fonction des trois variables d'espace, on identifie alors

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\,.$$

Application à l'électrostatique : circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe $\widehat{AB}$.

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}V = -\left[V(B) - V(A)\right]\,.$$

Espace 8

On en déduit le résultat suivant :

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe $\widehat{AB}$
ne dépend que du potentiel aux points A et B, mais pas des détails de la courbe :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V(A) - V(B)\,.$$

Le champ électrostatique est dit **à circulation conservative**.

En particulier, la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée est toujours nulle,

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0\,.$$

$\rightsquigarrow$ définition électromagnétique de la tension électrique ! une ddp est une circulation d'un champ électrostatique.

Q

Espace 9

> ***Remarque :*** *la dénomination est analogue à celle d'une force conservative, dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, mais pas du détail de la trajectoire.*

On obtient ici une méthode générale de calcul du potentiel en un point M quelconque : calculer la circulation du champ le long d'une courbe allant d'un point de référence où le potentiel est connu jusqu'au point M.

I.C - Interprétation énergétique

Raisonnons sur une particule test de charge q_0 se trouvant au point M où règne le champ $\vec{E}(M)$.

Force subie par la particule : force de Lorentz électrostat $\vec{F} = q_0\vec{E} = -q_0\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$.

Travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -q_0\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(q_0 V) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\mathrm{d}(q_0 V)$$

Espace 10

Le travail élémentaire de la force de Lorentz s'identifie donc à la variation infinitésimale d'une énergie potentielle.

R

La force de Lorentz électrostatique dérive d'une énergie potentielle
reliée au potentiel électrostatique par

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p,L}} = q_0 V$$

Le potentiel étant défini à une constante additive près, cela se retrouve comme il se doit sur l'énergie potentielle.

Pour approfondir : Une question naturelle est celle du lien entre cette approche par l'énergie potentielle et la densité volumique d'énergie électrostatique introduite dans le chapitre précédent … et la réponse n'est pas immédiate. De façon générale, l'énergie totale d'un système $\mathcal{S}$ formé de la réunion de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ s'écrit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + U_{1\leftrightarrow 2}$$

avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les énergies propres des sous-systèmes 1 et 2, et $U_{1\leftrightarrow 2}$ l'énergie d'interaction entre les deux sous-systèmes. Ici, on peut définir $\mathcal{S}_1$ comme étant la distribution de charges $\mathcal{D}$ qui crée le potentiel V et $\mathcal{S}_2$ comme la charge test q_0, qui ne fait pas partie de la distribution $\mathcal{D}$. L'énergie potentielle q_0V correspond alors au terme d'interaction $U_{1\leftrightarrow 2}$, alors que la densité d'énergie électrostatique est reliée à l'énergie propre $\mathcal{E}_1$ de la distribution $\mathcal{D}$. Remarquons qu'il arrive que l'énergie d'interaction soit négligeable devant les énergies propres : c'est par exemple l'hypothèse usuelle de la théorie de la thermodynamique, où l'énergie est supposée additive. ■

I.D - Équation de Poisson

L'équation de Poisson est une équation locale qui relie directement le potentiel à ses sources, c'est-à-dire la distribution de charges.

Partir de l'équation de Maxwell-Gauss puis détailler le calcul en cartésiennes :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad -\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Espace 11

R!

On appelle **laplacien** (scalaire) l'opérateur qui à un champ scalaire f associe le champ scalaire

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cart.}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

L'opérateur laplacien scalaire s'applique à un champ scalaire et renvoie un champ scalaire.

Comme toujours, l'expression du laplacien ne se généralise pas aux autre systèmes de coordonnées.

R!

Équation de Poisson :

Dans un milieu de densité volumique de charge ρ, le potentiel électrostatique vérifie

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Résoudre cette équation demande de connaître des conditions aux limites. Lorsque c'est le cas, il s'agit d'une méthode très efficace pour déterminer le potentiel et donc le champ en tout point de l'espace.

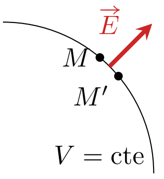
> ***Remarque :*** *dans le vide, l'équation de Poisson devient $\Delta V = 0$, que l'on appelle équation de Laplace.*

II - Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Une **ligne de champ** est une courbe en tout point tangente au champ électrostatique, orientée dans le sens du champ. Une **surface équipotentielle** ou **isopotentielle** est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique a la même valeur en tout point.

II.A - Direction du champ et sens de variation de potentiel

- **Direction des lignes de champ**



Considérons deux points M et M' infiniment proches, ce qui permet approximer leur différence de potentiel par une différentielle, puis de la relier au gradient :

$$V(M') - V(M) = \mathrm{d}V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{MM'} = -\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{MM'}\,.$$

En supposant ces deux points sur la *même* équipotentielle, on a $V(M) = V(M')$, et donc

$$\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

ce qui montre que $\vec{E}(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$. Le point M' étant quelconque, ce résultat est vrai pour tout point M' infiniment proche de M sur son équipotentielle, autrement dit pour tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$ tangent à l'équipotentielle passant par M.

On en déduit que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à l'équipotentielle passant par M, et donc que la ligne de champ associée l'est aussi.

Les lignes de champ électrostatiques sont orthogonales aux équipotentielles. R

> ***Remarque :*** *Ce résultat est en fait une propriété mathématique générale concernant le gradient : le gradient d'une fonction est orthogonal aux surfaces où cette fonction est constante.*

- **Sens des lignes de champ**

L'orthogonalité indique la *direction* des lignes de champ, mais pas leur *sens*.

$\rightsquigarrow$ sens du gradient d'un champ scalaire :
le gradient pointe dans la direction où ce champ augmente le plus.

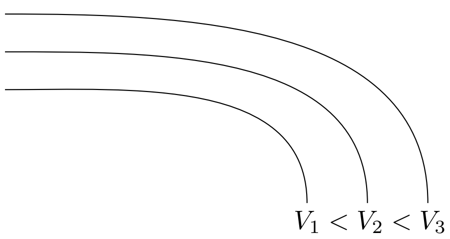
Espace 12

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$,

Le champ électrostatique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants. R

Espace 13

Illustration : dessiner les lignes de champ M



Conséquence : comme les lignes de champ ne peuvent pas « remonter » les potentiels,

Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée.

$\rightsquigarrow$ où sont situés le début et la fin ?

II.B - Voisinage des charges électriques

- **Pour le champ**

Un exemple pour comprendre : cas d'une charge ponctuelle

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

- $q > 0$
- $q < 0$

Généralisation :

Les lignes de champ électrostatique « partent » des charges positives et « se terminent » sur les charges négatives.

> ***Remarque :*** *Si les lignes de champ se coupent en un point, deux cas sont possibles :*
> ▷ *si elles sont toutes convergentes ou toutes divergentes alors il y a une charge ponctuelle en ce point ;*
> ▷ *si elles ne sont que sécantes alors le champ électrostatique y est nul.*

- **Pour le potentiel**

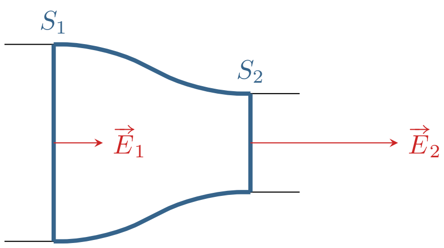
Exemple d'une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Les extrema locaux de potentiel se trouvent au niveau des charges électriques : maximum au niveau d'une charge positive, minimum au niveau d'une charge négative.

II.C - Intensité du champ

- **À partir des lignes de champ**



Raisonnons sur un **tube de champ**, c'est-à-dire une surface délimitée par un ensemble de lignes de champ, tronqué par deux sections droites orthogonales. On le suppose suffisamment fin pour pouvoir approximer que le champ est uniforme sur les deux sections droites. On suppose également se placer dans une zone vide de charge : $\rho = 0$.

Traduction à l'échelle locale :

en tout point du tube de champ, $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

Espace 14

Conséquence à l'échelle intégrale, c'est-à-dire pour la portion de tube de champ : Flux sortant nul sur les surfaces latérales, donc tout simplement

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -S_1E_1 + S_2E_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{G.O.}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_2}\,.$$

Espace 15

R

Un resserrement des lignes de champ dans une zone vide de charge traduit un champ électrique plus intense.

Ce résultat est la conséquence de la conservation du flux entre l'entrée et la sortie du tube de champ, elle-même conséquence d'un champ de divergence nulle en tout point.

Attention ! Ce résultat n'est plus vrai à l'intérieur d'une distribution de charge où $\rho \neq 0$.

> **Pour approfondir :** Vous aurez reconnu le même résultat qu'en mécanique des fluides : un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse d'un écoulement incompressible. Cela vient de l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement, qui implique que le champ de vitesse est à divergence nulle. On peut alors appliquer le théorème de Green-Ostrogradski à un tube de courant et établir un « théorème de Gauss de la mécanique des fluides », qui nous mène à la conservation du débit, que nous avions établie de manière plus physique que mathématique, et au lien avec les lignes de courant. ■

- **À partir des équipotentielles**

Par définition le champ est relié aux dérivées du potentiel : il est donc élevé là où le potentiel varie fortement. Dans une image en lignes de niveau, on comprend que ces variations rapides se traduisent graphiquement par des équipotentielles rapprochées.

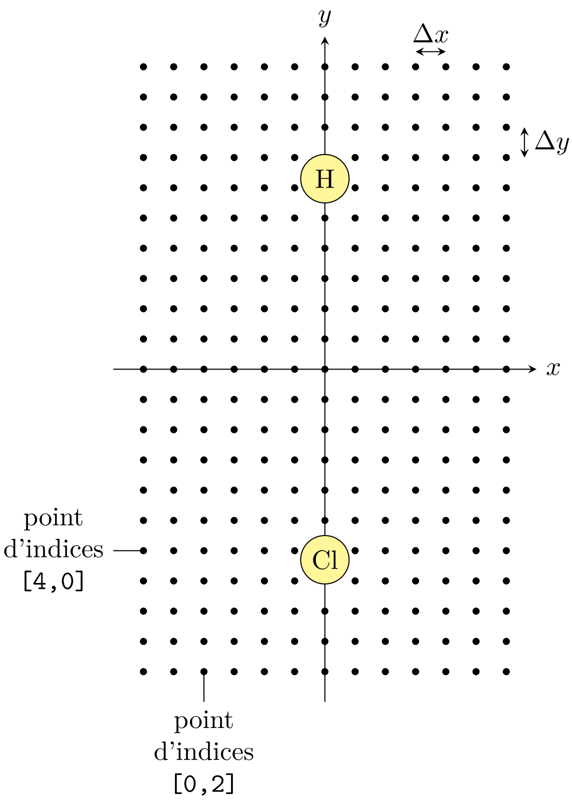
Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique plus intense. R

II.D - Tracé numérique d'équipotentielles et de lignes de champ

Hormis dans les cas les plus simples, l'allure des équipotentielles et des lignes de champ peut difficilement être tracée à la main : on a donc recours à des calculs numériques. Cependant, il n'est évidemment pas possible de calculer numériquement le potentiel « en tout point » de l'espace, et on se restreint donc à un ensemble discret de points régulièrement répartis sur une **grille** dont les points sont séparés par un **pas d'espace**, pouvant potentiellement différer dans les trois directions.

> ***Remarque :*** *cette idée est exactement analogue à celle de la discrétisation du temps dans la résolution d'une équation différentielle par le schéma d'Euler.*

Exemple : molécule de chlorure d'hydrogène HCl.



- Les deux atomes sont séparés d'une distance $a = 127\,\mathrm{pm} = 127 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$;
- Compte tenu de la différence d'électronégativité chaque atome est porteur d'une charge partielle $\pm q = \pm 2{,}9 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{C}$;
- L'invariance par rotation autour de l'axe de la molécule permet de se ramener à une étude dans un plan.

Pour calculer le potentiel et le champ créés par la molécule, on choisit une grille symétrique, de pas régulier $\Delta y = \Delta x$, de taille $N_x \times N_y$ avec $N_x = N_y$ pour simplifier.

Attention ! En géométrie l'usage est de donner l'abscisse x avant l'ordonnée y, mais avec les matrices on donne plutôt la ligne i avant l'ordonnée j ... et `matplotlib` compte les lignes du bas vers le haut. De quoi rapidement donner des nœuds au cerveau !

Attention ! On ne rapporte ici que les éléments importants d'algorithmique. Le code complet « qui marche », incluant les indispensables imports de packages et définitions de constantes, est disponible sur le site de la classe.

❶ Construction de la grille

La grille est représentée numériquement par un tableau bidimensionnel (c'est-à-dire une matrice), dont les indices i, j sont associées à l'abscisse et l'ordonnée des points. Pour la définir, il est très efficace d'utiliser la fonction `meshgrid` du module `numpy` : les valeurs d'abscisses et d'ordonnées sont d'abord données sous forme de tableau `numpy` unidimensionnels `xx` et `yy` puis convertis sous forme de matrices `x` et `y` telles que `x[i,j]` renvoie l'abscisse du point de coordonnées `i,j` dans la matrice.

```
xx = np.linspace(-h/2 , h/2, num=Nx) # grille symétrique de hauteur h
yy = np.linspace(-h/2 , h/2, num=Ny)
x, y = np.meshgrid(xx, yy)
```

❷ Calcul du potentiel

Rappelons que le potentiel créé par une charge ponctuelle q à distance r de cette charge vaut

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Dans notre cas, le potentiel total en un point M quelconque s'obtient par superposition des potentiels créés par les atomes de chlore et d'hydrogène

$$V(M) = V_{\mathrm{H}}(M) + V_{\mathrm{Cl}}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r_{\mathrm{H}}(M)} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\, r_{\mathrm{Cl}}(M)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{H}}(M)} - \frac{1}{r_{\mathrm{Cl}}(M)}\right)\,.$$

Numériquement, le potentiel est contenu dans une matrice `V` remplie par une double boucle.

```
V = np.empty((Nx,Ny))
for i in range(len(xx)):
    for j in range(len(yy)):
        r_H = np.sqrt( (x[i,j]-x_H)**2 + (y[i,j]-y_H)**2 )
        r_Cl = np.sqrt( (x[i,j]-x_Cl)**2 + (y[i,j]-y_Cl)**2 )
        V[i,j] = q/(4*np.pi*eps0) * (1/r_H - 1/r_Cl)
```

❸ Calcul du champ

Connaissant le potentiel, les composantes du champ peuvent alors être calculées numériquement par le schéma d'Euler : puisque

$$E_x(x,y) = -\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_y (x,y)$$

alors d'après le schéma d'Euler

```
E_x[i,j] = - (V[i,j+1] - V[i,j])/dx # l'abscisse est la colonne !
```

Néanmoins, cette méthode est un peu pénible à implémenter car il faut se méfier des bords de la matrice pour ne pas avoir l'indice `j+1` qui déborderait. Il existe également une fonction `gradient` directement implémentée dans `numpy`, utilisant un schéma numérique plus précis que le schéma d'Euler et gérant directement ces effets de bord :

```
Ey, Ex = np.gradient(-V)
```

Avec cette fonction, `Ex` et `Ey` sont directement des matrices de mêmes dimensions que `V`.

❹ Tracés

Le module `pyplot` de la bibliothèque `matplotlib` permet de réaliser les tracés simplement.

- ▷ La fonction `plt.contour` permet de tracer les équipotentielles, et plus généralement des lignes de niveau. Elle prend quatre arguments : les deux <u>matrices</u> avec les coordonnées `x` et `y` (d'où l'intérêt de `meshgrid` !), le potentiel `V` à tracer, et un entier donnant le nombre d'équipotentielles que l'on souhaite.
- ▷ La fonction `plt.streamplot` trace quant à elle les lignes de champ. Elle prend quatre arguments : deux matrices pour les coordonnées et deux autres pour les composantes du champ.

```
plt.figure()
plt.contour(x,y,V, 500)   # 500 équipotentielles
plt.streamplot(x,y,Ex,Ey)
```

> ***Remarque :*** *les équipotentielles étant très resserrées au voisinages des atomes (champ très intense), il est souvent nécessaire d'en tracer un grand nombre pour en voir quelques unes sur la figure loin des sources.*

En ajoutant un certain nombre d'options décoratives pour que la figure soit plus lisible, on obtient le tracé de la figure 1. Le code complet produisant la figure est disponible sur le site de la classe.

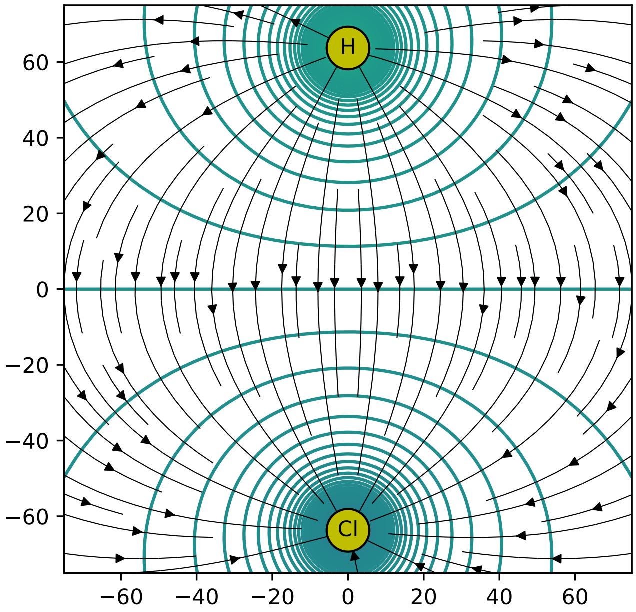


Figure 1 – **Équipotentielles et lignes de champ pour la molécule HCl.** Les équipotentielles sont représentées par les traits épais, les lignes de champ en traits fins orientés par les flèches.

III - Modélisation électrostatique d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices se faisant face séparées par un isolant.

III.A - Modèle du condensateur plan infini

Modèle simple : condensateur plan infini. compléter schéma avec $+Q$ en haut, $-Q$ en bas + tracer LDC

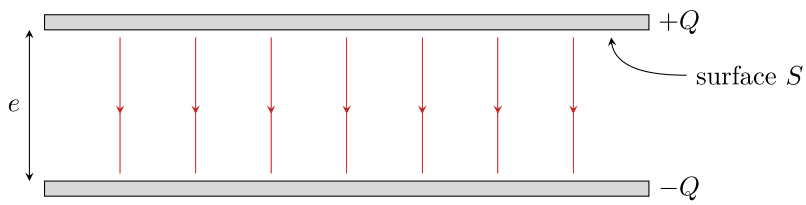
Q

- « condensateur plan » : armatures planes de même surface S, distantes de e ;
- « condensateur infini » :

  distance entre armatures très faible devant leur taille, soit $e \ll \sqrt{S}$, et effets de bord négligés

Espace 16

- les armatures sont supposées **en influence totale** : toute ligne de champ issue d'une armature aboutit sur l'autre, ce qui implique que les deux armatures portent une charge exactement opposées ;
- l'isolant est assimilé au vide ;
- on adopte une description surfacique de la répartition de charge sur les armatures : $\sigma = Q/S$.



III.B - Champ électrique créé par le condensateur

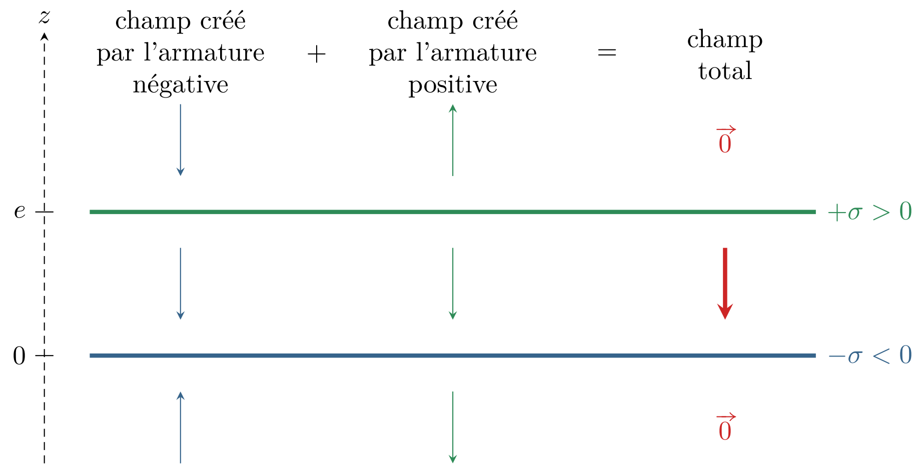
Méthode : le condensateur est composé de deux plans infinis ... or on connaît le champ créé par un tel plan : raisonnement par superposition

Espace 17

Rappel : le champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé en surface avec une densité σ_0, de normale $\vec{e}_z$, situé en $z = z_0$, est uniforme par morceaux et vaut

$$\vec{E} = \text{sgn}(z - z_0)\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

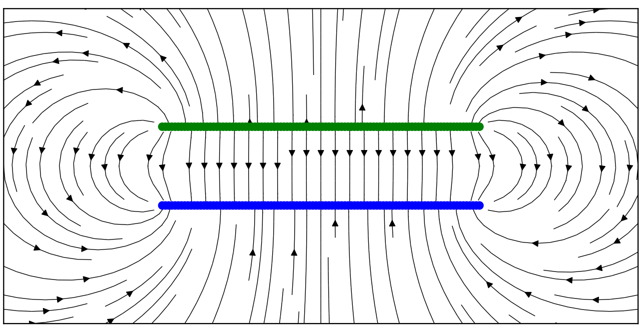
$\rightsquigarrow$ les deux armatures plans découpent l'espace en trois domaines dans lesquels le champ est uniforme.



Le champ créé par un condensateur plan infini est nul à l'extérieur du condensateur et uniforme à l'intérieur, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, et de norme $\sigma/\varepsilon_0 = Q/S\varepsilon_0$.

> ***Remarque :*** *on retrouve des discontinuités du champ au passage des plans chargés en surface, conformément à la relation de passage.*

Retour sur l'hypothèse d'armatures infinies : la figure ci-dessous représente les lignes de champ (cf. paragraphe II.D) créées par un condensateur plan de taille finie, simulé numériquement par une juxtaposition de charges ponctuelles.



les effets de bord ont un effet notable sur le champ à l'intérieur du condensateur sur une distance de l'ordre de l'épaisseur interarmatures

Espace 18

III.C - Capacité

- **Approche par la charge**

On appelle **capacité d'un condensateur** la grandeur C telle que

$$Q = C\,U$$

où $Q = \sigma S > 0$ est la charge totale portée par l'armature positive
et $U > 0$ est la tension entre les deux armatures du condensateur, positive par convention.

R !

⇝ déterminer la capacité du condensateur dans cette approche demande de calculer la tension à ses bornes en fonction de la densité surfacique de charge σ sur les armatures.

▷ Expression de la tension aux bornes du condensateur en fonction de σ :

D !

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{donc} \qquad \int_{V(0)}^{V(e)} \mathrm{d}V = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^e \mathrm{d}z$$

et ainsi

$$U = V(e) - V(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

Espace 19

▷ Conclusion :

$$U = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S} \qquad \text{d'où} \qquad C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}\,.$$

Espace 20

⇝ *Inconvénient de cette méthode :* comme la définition utilisée pour C fait intervenir explicitement la charge Q, il faut forcément passer par l'expression du champ électrostatique, ce qui peut être long à redémontrer.

- **Approche énergétique**

On appelle **capacité d'un condensateur** la grandeur C telle que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie électrostatique totale stockée dans le condensateur
et $U > 0$ est la tension entre les deux armatures du condensateur, positive par convention.

R !

▷ Équation de Poisson :

D !

$$\Delta V = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = 0 \text{ soit par intégration } E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = A = \text{cte}$$

Espace 21

▷ Expression du champ en fonction de la tension :

$$\int_{V(0)}^{V(e)} \mathrm{d}V = -E_z \int_0^e \mathrm{d}z \text{ soit } U = -E_z\, e \text{ et ainsi } E_z = -\frac{U}{e}.$$

Espace 22

▷ Calcul de l'énergie électrostatique :

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{e^2} \times Se$$

Espace 23

▷ Conclusion :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}U^2 \text{ donc } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}.$$

Espace 24

⇝ *Avantage de cette approche :* il suffit d'exprimer le champ électrostatique en fonction de la tension aux bornes du condensateur, sans faire intervenir explicitement la charge.

- **Conclusion**

R !

La capacité d'un condensateur plan vaut

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Elle ne dépend que de la géométrie du condensateur,
mais pas de la charge qu'il porte ni de la tension à ses bornes.

Dans le cadre d'un sujet de concours, ces deux approches peuvent être utilisées de manière équivalente ... mais il faut maîtriser les deux et suivre scrupuleusement l'énoncé, car elles peuvent être imbriquées : par exemple, il peut vous être demandé d'établir l'expression de C en raisonnant sur la charge puis dans un second temps d'établir la relation entre énergie électrostatique et capacité.

- **Généralisation à un isolant quelconque**

Q

Si l'isolant entre les armatures n'est pas du vide, il faut remplacer tout au long du calcul la permittivité diélectrique du vide ε_0 par la permittivité diélectrique ε de l'isolant qu'on écrit sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}\,.$$