BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 10 – Mécanique des fluides

Description des écoulements

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 2, 5, 7, 9
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1 à 3 et 5 à 9
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1 à 4 ; 7 à 9 ; et 11
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 1 à 4 et 7 à 12

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

10.1 - Dans une conduite cylindrique de rayon R, le champ des vitesses d'un écoulement laminaire est donné par le profil de Poiseuille :

$$\vec{v}(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z \,.$$

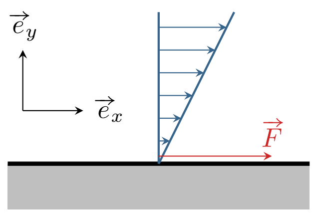
Représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement, et calculer le débit volumique.

10.2 - Considérons un écoulement au dessus d'une surface solide définissant le plan $y = 0$. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$v(y) = v_0 \frac{y}{h} \vec{e}_x \qquad \text{avec} \qquad v_0 > 0 \,.$$

Représenter la situation sur un schéma, en y indiquant la force exercée par le fluide sur une surface S du solide. Calculer cette force.

Éléments de réponse :



À partir du tracé du champ de vitesse, on comprend que le fluide « tire » le solide vers la droite, ce qui permet d'identifier la direction et le sens de $\vec{F}$. On calcule ensuite sa norme en adaptant la formule du cours à la géométrie étudiée,

$$||\vec{F}|| = \eta \left| \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(y{=}0) \right| S = \eta \frac{v_0}{h} S \,.$$

Enfin, on conclut en ajoutant le vecteur et le signe à la main à partir du schéma :

$$\vec{F} = +\eta \frac{v_0}{h} S \vec{e}_x \,.$$

10.3 - Pour un écoulement dont le champ de vitesse **en coordonnées cartésiennes** est donné par l'interrogateur, représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vitesse. En déduire si l'écoulement est compressible et tourbillonnaire.

Le but de cette question est la connaissance des expressions de div *et* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$.

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Écoulement de Poiseuille plan

1 | 2 |

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Opérateurs vectoriels ;*
- ▷ *Débit volumique ;*
- ▷ *Forces visqueuses.*

Considérons un fluide en écoulement au travers d'une fine conduite rectangulaire, voir figure 1, de hauteur $2a$ selon (Oz), de largeur $2b \gg 2a$ selon (Oy) et de longueur $L \gg 2a, 2b$ selon (Ox). Une surpression ΔP est imposée en $x = 0$, ce qui entraîne un écoulement de fluide. Suffisamment loin de l'entrée de la canalisation, le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = V_{\max}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\vec{u}_x\,.$$

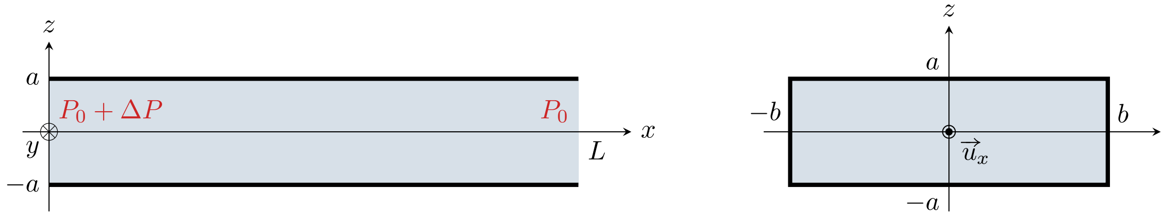


Figure 1 – Écoulement dans une conduite rectangulaire. La figure de gauche représente une vue de côté, celle de droite une vue de face de la conduite.

1 - Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.

2 - L'écoulement considéré est-il parfait ou visqueux ?

3 - L'écoulement est-il compressible ? Tourbillonnaire ?

4 - Calculer le débit volumique au travers d'une section droite de la conduite.

5 - Montrer que la résultante des forces de viscosité exercées par le fluide sur la conduite vaut

$$\vec{F} = \frac{3\eta L}{a^2} D_V\,\vec{u}_x\,.$$

✎ ***Correction*** — ***1 -*** *Les lignes de courant sont des droites dirigées par $\vec{u}_x$. Le profil de vitesse dans une section droite de l'écoulement a une allure parabolique, avec une vitesse nulle sur les parois et maximale au centre, comme représenté figure 2.*

> ***Question d'analyse 1*** *- Comment fait-on pour identifier les lignes de courant ?*

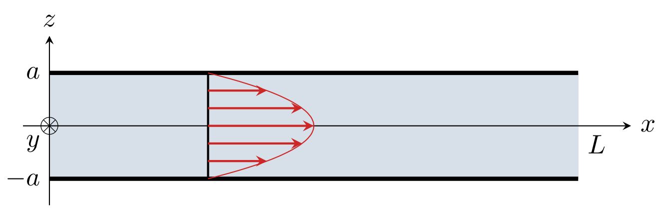


Figure 2 – Profil de vitesse de l'écoulement de Poiseuille plan.

2 - *Il s'agit d'un écoulement visqueux car la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi en $x = \pm a$.*

> ***Question d'analyse 2*** *- Qu'aurait donné le champ de vitesse d'un écoulement parfait ?*

3 - *L'écoulement est incompressible, car*

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0\,.$$

Question d'analyse 3 - *Justifier la nullité des trois dérivées.*

En revanche, il est tourbillonnaire puisque le rotationnel du champ de vitesse

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{u}_y = -\frac{2V_{\max}\,z}{a^2}\vec{u}_y$$

n'est pas uniformément nul.

Question d'analyse 4 - *Poser explicitement le calcul du rotationnel et justifier la nullité de chaque terme qui se simplifie.*

4 - *Considérons une section droite (quelconque) de la conduite. Le vecteur surface élémentaire s'y écrit $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = dy\,dz\,\vec{u}_x$ donc*

$$\begin{aligned}
D_V &= V_{\max}\int_{-b}^{+b} dy \int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)dz\\
&= V_{\max}\times 2b\times\left[z-\frac{z^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a}\\
&= 2bV_{\max}\left(a-\frac{a^3}{3a^2}+a-\frac{a^3}{3a^2}\right)\\
&= 2bV_{\max}\left(2a-\frac{2}{3}a\right)\\
&= \frac{8}{3}abV_{\max}\,.
\end{aligned}$$

Question d'analyse 5 - *Justifier l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$.*

5 - *La conduite compte quatre parois, nous allons donc calculer la force visqueuse sur chacune de ces parois avant de sommer pour obtenir la résultante. Dans tous les cas, on constate sur le profil de vitesse que le fluide « tire » sur la paroi dans la direction $+\vec{u}_x$, ce qui donne la direction de la force. Sur la paroi du haut, la force a pour norme*

$$F_{\text{haut}} = \eta\times\left|\frac{\partial v_x}{\partial z}(z\!=\!a)\right|\times 2bL = \eta\times\left|\frac{-2a}{a^2}V_{\max}\right|\times 2bL = \frac{4bL}{a}\eta V_{\max}\,.$$

Question d'analyse 6 - *Quelle est l'origine du terme $2bL$?*

Question d'analyse 7 - *Calculer explicitement la dérivée partielle et vérifier son expression.*

La force est la même sur la paroi du bas : on peut le comprendre qualitativement par symétrie ... ou poser le calcul et constater que le seul signe qui change disparaît dans la valeur absolue. De plus, les parois latérales ne subissent pas de force visqueuse car la vitesse ne dépend pas de y.

Question d'analyse 8 - *Écrire l'expression permettant de calculer la force visqueuse sur la paroi « de gauche » située en $y=-b$, et confirmer l'argument donné par l'énoncé.*

Finalement, après calcul,

$$\vec{F} = 2F_{\text{haut}}\vec{u}_x = \frac{8bL}{a}\eta V_{\max}\vec{u}_x\,,$$

et on peut identifier le débit volumique par exemple en exprimant $V_{\max} = 3D_V/8ab$, ce qui donne

$$\vec{F} = \frac{\cancel{8b}\,L}{a}\eta\times\frac{3D_V}{\cancel{8b}\,a}\vec{u}_x = \frac{3\eta L}{a^2}D_V\,\vec{u}_x$$

Musculation calculatoire

Exercice 2 : Du calcul ... 0 | 2

▷ *Opérateurs vectoriels.*

1 - Calculer le gradient des champs suivants :

$$f_1(x,y,z) = xy^2 - yz^2 \qquad f_2(x,y,z) = 1+\frac{y}{x-y} \qquad f_3(x,y,z) = (1+z)\,\mathrm{e}^{-x/a}$$

2 - Calculer la divergence et le rotationnel des champs suivants :

$$\overrightarrow{V}_1 = (2xy + z^3)\,\overrightarrow{e}_x + x^2\,\overrightarrow{e}_y + 3xz^2\,\overrightarrow{e}_z \qquad \overrightarrow{V}_2 = \sin(xy)\,\overrightarrow{e}_x + \cos(xz)\,\overrightarrow{e}_z \qquad \overrightarrow{V_3} = -\omega y\,\overrightarrow{e}_x + 2\omega x\,\overrightarrow{e}_y$$

3 - Montrer que pour tout champ scalaire f on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \overrightarrow{0}$. On utilisera le théorème de Schwartz, qui permet de permuter les dérivées partielles croisées par rapport à des variables indépendantes : par exemple,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

4 - Montrer que pour tout champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ on a $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}) = 0$.

Champ de vitesse

Exercice 3 : Tornade — 1 | 1

- *Profil de vitesse ;*
- *Divergence et rotationnel.*

Le champ des vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par

$$\overrightarrow{v}(r) = \begin{cases} \omega r\,\overrightarrow{e}_\theta & \text{si} \quad r \leq a \\ \dfrac{K}{r}\,\overrightarrow{e}_\theta & \text{si} \quad r \geq a \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes.

1 - Sachant que le champ des vitesses ne présente pas de discontinuité, déterminer K.

2 - Représenter le champ des vitesses en traçant la fonction $v(r)$ puis en traçant quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.

3 - Montrer que l'écoulement de l'air est incompressible.

4 - Cet écoulement est-il tourbillonnaire ?

Donnée : en coordonnées cylindriques et pour un champ $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}(r)$ ne dépendant que de r,

- $\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = -\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\,\overrightarrow{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\,\overrightarrow{e}_z$

Exercice 4 : Houle — 2 | 2

- *Profil de vitesse ;*
- *Divergence et rotationnel ;*
- *Ondes progressives.*

La hauteur d'eau de la houle peut être modélisée comme une sinusoïde

$$h = h(x,t) = H\cos(\omega t - kx)$$

associée au champ de vitesse dans l'eau

$$\overrightarrow{v}(x,y,z) = H\omega\,\mathrm{e}^{kz}\left[\cos(kx - \omega t)\overrightarrow{u}_x + \sin(kx - \omega t)\overrightarrow{u}_z\right]$$

où l'axe x est sa direction de propagation et l'axe z un axe vertical ascendant dont l'origine est choisie au niveau moyen de la mer. Par définition, le nombre d'onde k est relié à la longueur d'onde la houle par $k = 2\pi/\lambda$.

1 - De quel type d'onde s'agit-il ? Dans quelle direction se propage-t-elle ?

2 - Représenter graphiquement le champ de vitesse à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ (qui correspond au sommet d'une vague), $x = \lambda/4$ et $x = \lambda/2$ (creux d'une vague).

3 - L'écoulement est-il compressible ?

4 - L'écoulement est-il tourbillonnaire ?

Débits

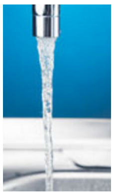
Exercice 5 : Profondeur de la Seine à Rouen 1 | 0

▷ *Débit volumique.*

Le débit moyen de la Seine à Rouen est de l'ordre de $300\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$ pour une vitesse de courant typique de $3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. La largeur du fleuve est d'environ $200\,\mathrm{m}$. Estimer sa profondeur.

Exercice 6 : Robinet 1 | 1

▷ *Conservation du débit volumique.*



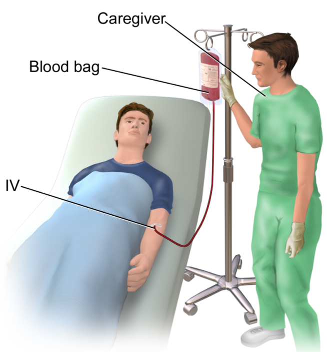
Lorsque de l'eau coule d'un robinet ouvert, on constate que le diamètre du filet d'eau rétrécit à mesure qu'il s'éloigne du robinet.

1 - Expliquer qualitativement le phénomène.

2 - Des mesures sur une photographie montrent qu'après une chute de $20\,\mathrm{cm}$, le diamètre du jet passe de $d_1 = 78$ pixels à $d_2 = 45$ pixels. En quelle proportion la vitesse a-t-elle varié ?

Exercice 7 : Transfusion sanguine 2 | 2 |

▷ *Débit volumique ;*
▷ *Viscosité ;*
▷ *Relation de l'hydrostatique.*



Cet exercice s'intéresse à une transfusion sanguine, au cours de laquelle du sang stocké dans une poche de $200\,\mathrm{mL}$ issue d'un don est injecté en intraveineuse à un patient en une heure. Le sang s'écoule au travers d'un tuyau souple de rayon $b = 2{,}5\,\mathrm{mm}$ au bout duquel se trouve une aiguille horizontale de longueur $\ell = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ et de rayon $a = 0{,}15\,\mathrm{mm}$. Le haut de la poche et supposé à pression atmosphérique P_0 alors que la pression dans la veine est supérieure de $\Delta P = 7\,\mathrm{mbar}$ à la pression atmosphérique. Le sang se comporte comme un fluide newtonien [1] de viscosité $\eta = 1{,}6\,\mathrm{mPa\cdot s}$ et de masse volumique $\rho = 1{,}1\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$.

1 - Déterminer le débit volumique Q au travers du dispositif.

2 - Calculer la vitesse débitante dans le tuyau souple et l'aiguille. En déduire une approximation raisonnable à propos du sang se trouvant dans le tuyau, et la nature de l'écoulement dans l'aiguille.

Compte tenu de la question précédente, l'écoulement dans l'aiguille peut être décrit par un profil de Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\vec{v} = \frac{a^2}{4\eta\ell}(P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s})(1 - \alpha r^2)\,\vec{e}_z\,,$$

avec P_e et P_s les pressions à l'entrée et la sortie de l'aiguille.

3 - Montrer que $\alpha = 1/a^2$.

4 - Déterminer la différence de pression $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s}$ nécessaire pour que la transfusion ait le débit voulu.

5 - À quelle hauteur H au dessus du bras du patient la poche doit-elle se trouver ?

1. En réalité, le sang n'est pas un fluide newtonien : sa viscosité dépend des contraintes qu'il subit, et donc en pratique du diamètre du vaisseau au travers duquel il s'écoule. Plus ce diamètre est faible, moins le sang est visqueux : c'est un fluide dit *rhéofluidifiant.*

Exercice 8 : Sténose artérielle 2 | 2

▷ *Débit volumique.*

On étudie la circulation sanguine dans une artère, modélisée par un écoulement stationnaire dans un cylindre de longueur $L_0 = 7\,\mathrm{cm}$ et de rayon $R_0 = 0{,}7\,\mathrm{cm}$. Le sang est modélisé par un fluide newtonien de viscosité $\eta = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$. L'écoulement au sein de l'artère a un profil de type Poiseuille : en coordonnées cylindriques,

$$\vec{v} = \frac{\Delta P \, R_0^{\,2}}{4\eta L_0} \left(1 - ar^2\right) \vec{e}_z \,,$$

où ΔP est la différence de pression entre les deux extrémités de l'artère. Sa vitesse débitante vaut $U = 10\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.

1 - Déterminer a.

2 - En déduire la valeur de ΔP. Quel mécanisme biologique est à l'origine de cette différence de pression ?

3 - On définit la résistance hydraulique de l'artère à partir de la différence de pression et du débit volumique Q par $R_H = \Delta P / Q$. Justifier cette dénomination par analogie avec d'autres phénomènes connus, puis exprimer R_H en fonction des données du problème.

On s'intéresse à une sténose artérielle, dont l'effet est de réduire le rayon de l'artère. On la modélise par la configuration de la figure 3, en prenant $R_1 = R_0/2$.

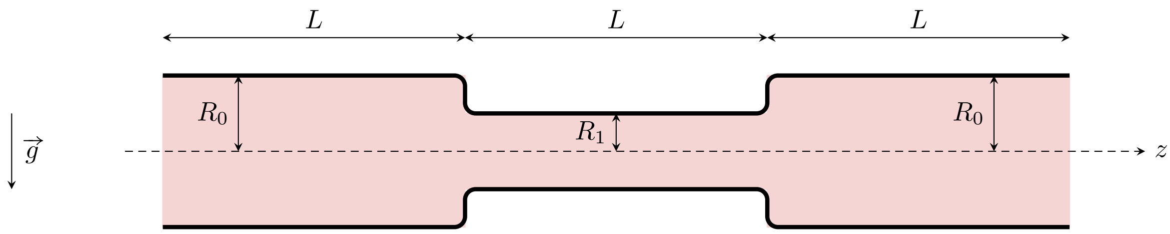


Figure 3 – **Schéma d'une sténose artérielle.**

4 - Déterminer les expressions des résistances hydrauliques R_H d'une section saine de longueur L et R'_H de la portion sténosée. Montrer que la résistance hydraulique de l'artère complète $R_{H,\mathrm{st}} = 2R_H + R'_H$ et la calculer en fonction des paramètres physiques. Quel qualificatif donner à cette configuration ?

5 - Comparer les débits volumiques avec et sans sténose pour l'artère étudiée. Commenter.

Un pontage artériel consiste à créer un écoulement en parallèle de la sténose en utilisant une tubulure de rayon R_2 et de même longueur $3L$ que la sténose afin de retrouver le débit initial.

6 - En déduire le rayon R_2 nécessaire pour réaliser ce pontage.

Forces visqueuses

Exercice 9 : Glissement sur un plan incliné lubrifié oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Force de viscosité ;*
▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*

On étudie le glissement d'un solide de masse M sur un plan incliné d'un angle α. Ce plan est lubrifié par une fine couche (épaisseur e constante et uniforme) d'un fluide visqueux (viscosité η) sur laquelle glisse le solide, voir figure 4.

1 - Proposer un paramétrage adapté à la situation.

2 - Donner l'expression du champ de vitesse dans la couche de lubrification en fonction de la vitesse V du solide le long du plan incliné.

3 - En déduire l'expression de la force de frottement subie par le solide.

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V du solide et en déduire la vitesse limite qu'il atteint.

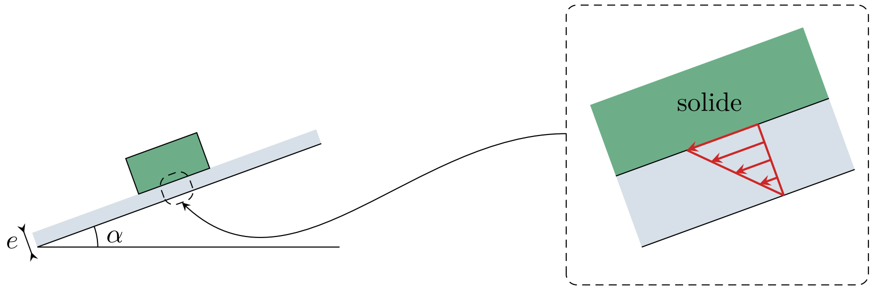
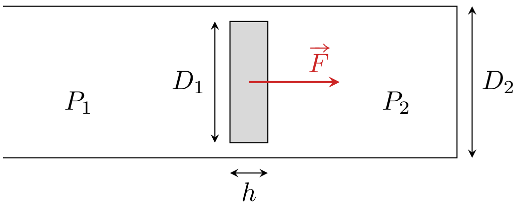


Figure 4 – **Glissement d'un solide sur un plan incliné lubrifié.** La figure de droite représente en zoom le champ des vitesses dans la couche de lubrifiant.

Exercice 10 : Déplacement d'un piston à huile

oral banque PT | 3 | 2

- *Débit volumique ;*
- *Force de viscosité ;*
- *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*



On considère un piston formé d'un cylindre plein (diamètre D_1, épaisseur h) coulissant dans un cylindre creux (diamètre $D_2 > D_1$). Le fluide à l'intérieur du piston est de l'huile de masse volumique μ et de viscosité η. On suppose $P_2 = 2P_1$. Un opérateur appuie de manière quasi-statique sur le piston avec une force F.

1 - Estimer simplement le gradient de pression GP dans l'interstice.

2 - On admet que la vitesse débitante du fluide dans l'interstice s'écrit $v_\mathrm{d} = \alpha\,\mathrm{GP}/\eta$, où α est une constante dépendant uniquement des diamètres. Déterminer le débit volumique de fuite.

3 - Estimer la force de frottement visqueux sur le piston.

4 - En déduire la force que doit exercer l'opérateur pour pouvoir pousser le piston.

Exercice 11 : Démonstration du profil de Poiseuille

3 | 2

- *Profil de vitesse ;*
- *Forces de pression et de viscosité ;*
- *Divergence.*

Cet exercice s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux (viscosité η) dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur L, imposé par une différence de pression ΔP imposée entre les deux extrémités de la conduite. L'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et laminaire. Le but de l'exercice est d'établir l'expression du profil de vitesse de l'écoulement.

Donnée : opérateur divergence en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,.$$

1 - Justifier à l'aide des symétries du problème que le champ des vitesses est cherché en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\vec{v}(M) = v_z(r,z)\,\vec{e}_z\,.$$

2 - Montrer que v_z est indépendant de z.

Ce résultat implique que le mouvement de toute particule fluide est rectiligne uniforme. Nous allons étudier le mouvement d'un système fermé (Σ) constitué d'un cylindre de fluide de rayon $r < R$ et de longueur $\mathrm{d}z$ infinitésimale centré sur l'axe de la conduite.

Hypothèses de travail :

- le poids de (Σ) est négligeable devant les autres actions mécaniques qu'il subit ;
- le champ de pression p dans la conduite est fonction de z uniquement : $p = p(z)$;

▷ le système (Σ) subit des forces de viscosité par le fluide qui l'entoure, données par la loi phénoménologique

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{visq}} = \eta \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_z$$

avec $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{visq}}$ la force tangentielle subie par un élément de surface $\mathrm{d}S$.

3 - Exprimer la résultante $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P$ des forces de pression s'exerçant sur (Σ) en fonction du gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$.

4 - Déterminer la résultante $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{visq}}$ des forces visqueuses s'exerçant sur (Σ) en fonction de $\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}r$.

5 - En déduire que les champs de vitesse et de pression sont reliés par

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,.$$

6 - Montrer à partir de cette équation que le gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ est constant. Donner sa valeur en fonction de ΔP et L.

7 - Identifier une condition limite et déterminer complètement le champ de vitesse.

Exercice 12 : Viscosimètre de Couette cylindrique

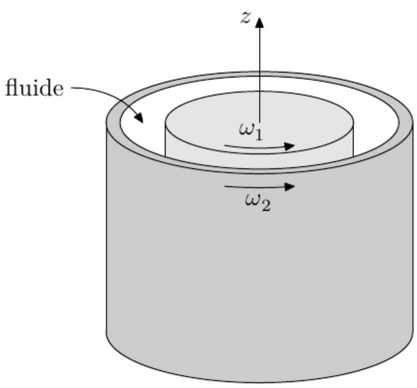
Centrale TSI 2022 | 2 | 3

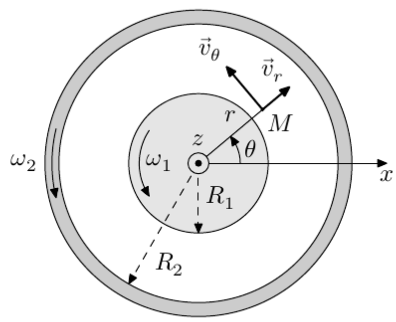
▷ *Profil de vitesse ;*
▷ *Force de viscosité ;*
▷ *Moment cinétique.*

II.B.2) Afin de déterminer la valeur de la viscosité η d'un fluide on s'intéresse au viscosimètre de Couette (figure 8) où le fluide est introduit entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de longueur L. Les cylindres possèdent une vitesse de rotation constante dans le temps. Le cylindre intérieur est de rayon R_1 et est entrainé à la vitesse angulaire ω_1 alors que le cylindre extérieur est de rayon R_2 et est entrainé à la vitesse angulaire ω_2. Les cylindres sont suffisamment longs dans la direction (Oz) pour négliger les effets de bord et pour qu'il n'y ait pas de composante axiale v_z de la vitesse $\vec{v}$ du fluide. En un point M du fluide on se place en régime stationnaire et en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Divergence en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$





Vue de dessus

Figure 8 Principe d'un viscosimètre de Couette

Q 48. Par des arguments d'invariance similaires à cuex utilisés lors de la détermination des champs électromagnétiques $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, déterminer de quel(s) paramètre(s) dépend la vitesse $\vec{v}$ du fluide en M.

Q 49. Le fluide est supposé incompressible ce qui se traduit par $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Montrer que la composante radiale $\vec{v}_r$ de la vitesse $\vec{v}$ est nulle.

Pour la suite, on admet que la norme de la vitesse v du fluide peut s'écrire $v = (Ar + \dfrac{B}{r})$ où A et B sont deux constantes.

Q 50. Le fluide étant visqueux, quelles sont les conditions aux limites sur les deux cylindres pour v ?

Q 51. En déduire les expressions de A et B en fonction de R_1, R_2, ω_1 et ω_2.

Dans la pratique, on prend comme conditions expérimentales $\omega_1 = 0$ et $R_2 - R_1 \ll R_1$ ce qui permet d'assimiler localement l'espace entre les deux cylindres à l'espace entre deux plans.

Q 52. Par analogie avec la force de cisaillement entre deux plans, montrer que l'expression de la force élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ de cisaillement s'exerçant sur une surface $\mathrm{d}S$ du cylindre intérieur s'écrit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = 2\eta A \,\mathrm{d}S\, \vec{u}_\theta.$$

Q 53. Calculer le moment $\mathrm{d}\Gamma$ par rapport à l'axe de rotation (Oz) de cette force $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$.

Q 54. En déduire que le moment total Γ exercé par les forces de cisaillement sur le cylindre intérieur suivant l'axe (Oz) s'écrit

$$\Gamma = 4\pi\eta L \frac{\omega_2 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Q 55. Quel moment doit-on appliquer sur le cylindre intérieur afin d'avoir $\omega_1 = 0$?

Q 56. Comment mesurer alors la viscosité η ?