Énergétique des écoulements
Théorème de Bernoulli

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Alimentation en eau

inspiré PT B 2015 | 2 | 1

- *Pertes de charge ;*
- *Prise de pression hydrostatique (tubes piézométriques) ;*
- *Puissance indiquée.*

Analyse dimensionnelle

Exercice 2 : Écritures du théorème de Bernoulli

1 | 0 |

- *Homogénéité.*

1 Vrai, homogène à une énergie massique.

2 Faux : gz est une énergie massique mais $\dfrac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique.

3 Faux : p/ρ et Δp dans la même équation.

4 Vrai, homogène à une puissance.

5 Vrai, homogène à une énergie massique.

6 Faux, z est une hauteur mais évidemment pas v^2.

7 Faux, membre de gauche homogène à une puissance et membre de droite à une énergie massique.

8 Vrai, homogène à une hauteur.

9 Faux : l'équation est homogène, mais la perte de charge traduit une dissipation et il manque donc le signe $-$.

10 Vrai, homogène à une puissance.

11 Vrai, homogène à une pression (ou une énergie volumique).

Écoulements parfaits

Exercice 3 : Débitmètre de Venturi

1 | 1 |

▷ *Écoulement parfait.*

1 L'écoulement étant incompressible,

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 > v_1\,.}$$

En négligeant les pertes de charge et en supposant le débitmètre horizontal, le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}\,,$$

on a donc $p_2 < p_1$ et donc

$$\boxed{\Delta p > 0\,.}$$

2 En remplaçant les vitesses $v_{1,2}$ par $D_V/S_{1,2}$ on obtient en réécrivant le théorème de Bernoulli

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{D_V^2}{2S_2^2} - \frac{D_V^2}{2S_1^2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{D_V^2}{2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\Delta p}{\rho}$$

et finalement

$$\boxed{D_V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\dfrac{1}{S_2^2} - \dfrac{1}{S_2^2}\right)}}\,.}$$

Exercice 4 : Formule de Torricelli

1 | 2 |

▷ *Écoulement parfait ;*
▷ *Conservation du débit ;*
▷ *Intégration par séparation de variables.*

> *« Approximation de régime quasi-permanent » signifie que la hauteur d'eau dans le réservoir varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer toutes les relations du régime permanent (conservation du débit, Bernoulli, etc.)*

1 L'eau étant un fluide incompressible, on a par conservation du débit volumique

$$D_V = S\,v_A = s\,v_B \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_B = \frac{S}{s} v_A \gg v_A\,.}$$

2 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice (on pourrait tout aussi bien dire « sur la ligne de courant allant de A à B »), évidemment sans puissance indiquée et en négligeant les pertes de charge,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0$$

car la pression dans un jet libre est égale à la pression atmosphérique. On en déduit

$$v_B^2 = 2gH$$

et ainsi le débit volumique

$$\boxed{D_V = s\sqrt{2gH}\,.}$$

3 La conservation du débit s'écrit

$$S\,v_A = s\,v_B = s\sqrt{2gH}\,.$$

Or la vitesse au point A est reliée à la dérivée de la hauteur d'eau dans le réservoir,

$$v_A = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

avec un signe $\ominus$ car $v_A > 0$ mais H diminue. On en déduit

$$-S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = s\sqrt{2gH} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\alpha\sqrt{2gH}\,.}$$

> *On peut aussi comprendre ce résultat par conservation du volume. Le volume d'eau δV sortant du réservoir pendant $\mathrm{d}t$ peut d'une part être relié au débit volumique de sortie,*
>
> $$\delta V = D_V\,\mathrm{d}t = s\sqrt{2gH}\,\mathrm{d}t$$
>
> *et d'autre part à la variation de hauteur d'eau dans le réservoir,*
>
> $$\delta V = D_V\,\mathrm{d}t = S\,[H(t) - H(t+\mathrm{d}t)] = -S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

4 Une telle équation s'intègre par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\alpha\sqrt{2g}\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{H_0}^{0}\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\alpha\sqrt{2g}\int_0^{\Delta t}\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$0 - 2\sqrt{H_0} = -\alpha\sqrt{2g}(\Delta t - 0)$$

et ainsi

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

Exercice 5 : Vidange d'un réservoir

inspiré oraux banque PT | 2 | 2 |

- *Écoulement parfait ;*
- *Conservation du débit ;*
- *Intégration par séparation de variables.*

Considérons un axe z vertical vers le haut dont l'origine se trouve au fond du réservoir. Les écoulements sont supposés parfaits, incompressibles, et suffisamment lents (quasi-stationnaires) pour pouvoir appliquer la relation de Bernoulli.

1 Comme $D \gg d$, on peut supposer la vitesse V de la surface libre du réservoir négligeable devant la vitesse de sortie. La relation de Bernoulli écrite entre la surface libre et la sortie du tuyau s'écrit

$$\cancel{\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho}} + \cancel{\frac{V^2}{2}} + gh = \cancel{\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho}} + \frac{{v_{\mathrm{s}}}^2}{2} - gL$$

d'où on déduit

$$\boxed{v_{\mathrm{s}} = \sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

Le cas sans tuyau s'obtient en prenant $L = 0$.

2 Le débit volumique de sortie s'écrit

$$D_V = \pi\frac{d^2}{4}v_{\mathrm{s}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_V = \pi\frac{d^2}{4}\sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

Le débit est d'autant plus élevé que la longueur L du tuyau d'évacuation est élevée.

3 L'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve. En notant V la vitesse à laquelle descend le niveau d'eau, on a donc

$$\frac{\pi D^2}{4} V = \frac{\pi d^2}{4} v_\mathrm{s} \,.$$

Or cette vitesse est évidemment reliée à la variation de hauteur d'eau par

$$V = \left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

puisque la dérivée est négative car h décroît. On en déduit alors

$$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(h+L)} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(h+L)}\,.}$$

4 Notons T le temps total de vidange du réservoir et h_0 la hauteur d'eau initiale. Par séparation des variables,

$$\begin{aligned}
\int_{h_0}^{0} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2g(h+L)}} &= -\frac{d^2}{D^2}\int_0^T \mathrm{d}t \\
\frac{1}{g}\int_0^{h_0} \frac{2g}{2\sqrt{2g(h+L)}}\,\mathrm{d}h &= +\frac{d^2}{D^2}\int_0^T \mathrm{d}t \\
\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g(h+L)}\right]_0^{h_0} &= \frac{d^2}{D^2} T \\
\frac{1}{g}\left(\sqrt{2g(h_0+L)} - \sqrt{2gL}\right) &= \frac{d^2}{D^2} T
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{T = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_0+L} - \sqrt{L}\right)\,.}$$

> *Parmi les tests de vraisemblance possibles sur ce résultat, on peut vérifier que le temps de vidange augmente bien lorsque le diamètre D du réservoir ou la hauteur initiale h_0 augmentent, c'est-à-dire qu'il faut plus longtemps pour vider un réservoir plus rempli. En revanche, la dépendance en d n'est pas facile à intuiter, et celle en L discutée précédemment pas facile à vérifier sur le résultat : ce ne sont donc pas de bons tests de vraisemblance.*

5 Appliquons la relation de Bernoulli entre la sortie de la conduite d'évacuation ($P = P_\mathrm{atm}$, $v = v_\mathrm{s}$, $z = -L$) et un point quelconque de cette conduite ($P(z)$ inconnue, $v = v_\mathrm{s}$ car diamètre uniforme, $z < 0$ mais quelconque) :

$$\frac{P(z)}{\rho} + \cancel{\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}} + gz = \frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \cancel{\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}} - gL \qquad \text{d'où} \qquad P(z) = P_\mathrm{atm} - \rho g(L+z)\,.$$

> *On remarque que l'on obtient un champ de pression de type hydrostatique. Cela peut s'interpréter grâce à l'incompressibilité de l'écoulement : tout le fluide descend la conduite « d'un bloc » à la même vitesse, donc en se plaçant dans le référentiel lié au fluide, également galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, on retrouve une situation d'hydrostatique.*

On constate que la pression est plus faible sur le haut de la conduite que sur le bas. D'après l'expression précédente, la valeur critique z_c à laquelle apparaît la cavitation est telle que $P(z_\mathrm{c}) = P_\mathrm{sat}$, soit

$$P_\mathrm{atm} - \rho g(L + z_\mathrm{c}) = P_\mathrm{sat} \qquad \text{soit} \qquad z_\mathrm{c} = \frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g} - L\,.$$

Le phénomène apparaît si cette hauteur critique est atteinte à l'intérieur de la conduite, soit $z_\mathrm{c} < 0$, ce qui donne

$$\frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g} - L < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L > \frac{P_\mathrm{atm} - P_\mathrm{sat}}{\rho g}\,.}$$

> *Attention, il n'est pas possible de généraliser ce résultat à l'intérieur du réservoir : la section étant différente, la vitesse n'y est pas égale à v_s, et donc l'expression de la pression n'est pas valable.*

Exercice 6 : Fourche hydraulique

2 | 2

- ▷ *Système à plusieurs sorties ;*
- ▷ *Écoulement parfait.*

D'après la conservation du débit volumique,

$$D_{v0} = D_{v1} + D_{v2} \qquad \text{soit} \qquad S_0 v_0 = S_1 v_1 + S_2 v_2 \qquad \text{donc} \qquad 2v_0 = v_1 + v_2\,. \tag{1}$$

Appliquons maintenant le théorème de Bernoulli aux deux lignes de courant représentées figure 1. On prend l'origine des altitudes au centre de la conduite d'entrée, si bien que les conduites de sortie sont aux altitudes $\pm h/2$.

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{{v_0}^2}{2} + 0 = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} + \frac{gh}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{P_0}{\rho} + \frac{{v_0}^2}{2} + 0 = \frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2} - \frac{gh}{2}$$

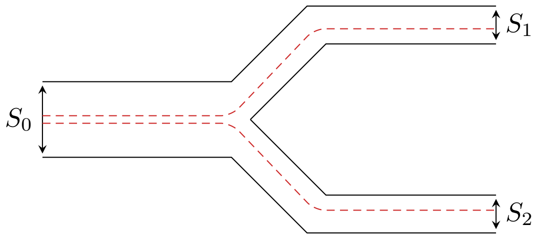

Figure 1 – Deux lignes de courant.

La pression d'entrée P_0 étant inconnue, on soustrait ces deux relations pour obtenir

$$\frac{{v_1}^2}{2} + \frac{gh}{2} - \frac{{v_2}^2}{2} + \frac{gh}{2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad {v_2}^2 - {v_1}^2 = 2gh\,. \tag{2}$$

Pour faciliter la résolution, il est malin d'écrire la relation (2) sous la forme

$$(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 2gh$$

car alors la relation (1) donne

$$(v_2 - v_1) \times 2v_0 = 2gh \qquad \text{soit} \qquad v_2 - v_1 = \frac{gh}{v_0}\,.$$

La somme et la différence donnent alors

$$\boxed{v_1 = \left(1 - \frac{gh}{2{v_0}^2}\right) v_0 \qquad \text{et} \qquad v_2 = \left(1 + \frac{gh}{2{v_0}^2}\right) v_0\,.}$$

Exercice 7 : Sonde de Pitot moyennée

2 | 1 |

- ▷ *Analyse d'un document vidéo ;*
- ▷ *Écoulement parfait ;*
- ▷ *Théorème de Bernoulli dans un écoulement externe.*

1 Les sondes de Pitot moyennées présentées dans la vidéo sont des systèmes sensibles, qui perturbent peu l'écoulement car elles sont de petite taille et qui peuvent fonctionner dans les deux sens d'écoulement.

2 Voir figure 2.

3 Raisonnons par symétrie. Le tracé des lignes de courant laisse penser que pour toute ligne de courant passant par la gauche de la sonde, il en existe une symétrique passant par la droite. Par conséquent, la ligne de courant correspondant à l'axe de la conduite arrive au point A de manière orthogonale à la sonde, soit $\overrightarrow{V}(A) = v_A\,\overrightarrow{e}_x$. Or en régime stationnaire, il n'y a pas/plus de fluide qui entre ni sort de la sonde (pas de communication entre les deux côtés de la membrane). Par conséquent, la vitesse v_A est nécessairement tangente à la sonde, c'est-à-dire $\overrightarrow{v}(A) \cdot \overrightarrow{e}_x = 0$ (même condition limite qu'au contact d'une paroi solide). En combinant avec la première condition,

$$\overrightarrow{v}(A) \cdot \overrightarrow{e}_x = v_A\,\overrightarrow{e}_x \cdot \overrightarrow{e}_x = v_A \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v_A = 0\,.}$$

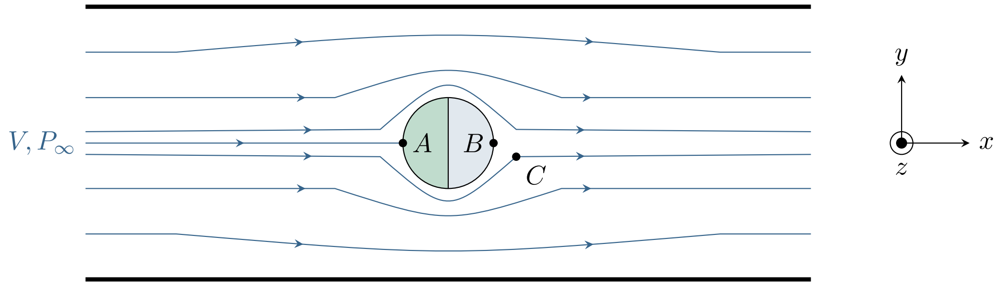

Figure 2 – Lignes de courant autour de la sonde de Pitot.

D'après le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant centrale,

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z_A = \frac{P_A}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g z_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2\,.}$$

4 Comme les effets d'altitude sont négligés, alors la pression est uniforme dans les deux compartiments de la sonde. La membrane, de surface S, subit :

- ▷ la force de pression côté dynamique, $\vec{F}_{\text{dyn}} = +P_A\, S\, \vec{e}_x$;
- ▷ la force de pression côté statique, $\vec{F}_{\text{stat}} = -P_B\, S\, \vec{e}_x$;
- ▷ la force de rappel élastique, $\vec{f} = -kx\,\vec{e}_x$.

Lorsque l'équilibre de la membrane est atteint,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{dyn}} + \vec{F}_{\text{stat}} + \vec{f} = \vec{0}\,.}$$

5 En projetant cette relation et en remplaçant les pressions,

$$\begin{aligned} P_A\, S - P_B\, S - kx &= 0 \\ \left(P_\infty + \frac{1}{2}\rho V^2 - P_\infty\right) S - kx &= 0 \\ \frac{1}{2}\rho S V^2 &= kx \end{aligned}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2kx}{\rho S}}}$$

Pertes de charge et éléments actifs

Exercice 8 : Écoulement cryogénique — oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Calcul de débit par intégration ;*
- ▷ *Pertes de charge ;*
- ▷ *Puissance indiquée.*

1 Les lignes de courant sont des droites, l'écoulement est donc laminaire. Le profil de vitesse dans une section est parabolique avec vitesse nulle aux parois, voir figure 3, en conséquence de la viscosité du fluide.

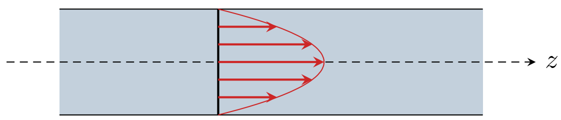

Figure 3 – Profil de vitesse dans l'écoulement.

2 Le débit massique se déduit du débit volumique par

$$\boxed{D_{\text{m}} = \rho D_{\text{v}} = 80\,\text{g}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

Le débit massique se calcule par une intégration sur une section transverse circulaire,

$$\begin{aligned}
D_\mathrm{m} &= \iint \rho\, v(r)\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\rho\, \Delta P}{4\eta L} \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R (R^2 - r^2)\, r \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi\, \rho\, \Delta P}{2\eta L} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi\, \rho\, \Delta P}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\pi\, \rho\, \Delta P\, R^4}{8\eta L}\,.}$$

3 L'écoulement est permanent et incompressible. D'après le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la conduite, en raisonnant sur les vitesses débitantes, et en tenant compte de la perte de charge ΔP_c,

$$\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = -\frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho}\,.$$

L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, et comme la conduite est de section constant alors $v_\mathrm{s} = v_\mathrm{e}$. Comme la conduite est horizontale, alors $z_\mathrm{s} = z_\mathrm{e}$. Enfin, $P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \Delta P$ par définition. Ainsi, il ne reste que

$$\boxed{\Delta P_\mathrm{c} = \Delta P\,.}$$

Si la conduite était verticale, on aurait

$$\boxed{\Delta P'_\mathrm{c} = \Delta P + \rho g (z_\mathrm{e} - z_\mathrm{s})\,.}$$

> *Le débit volumique est imposé, les pertes de charge ont donc ici un effet sur la pression au sein de l'écoulement.*

4 Pour maintenir le débit, il faut que la pompe compense exactement la perte de charge. Elle doit donc fournir une puissance

$$\mathcal{P} = D_\mathrm{m} \frac{\Delta P_\mathrm{c}}{\rho} = D_\mathrm{v}\, \Delta P\,.$$

Or d'après la question 2,

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi \rho R^4} D_\mathrm{m}\,.$$

Comme $D_\mathrm{m} = \rho D_\mathrm{v}$, on en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} {D_\mathrm{v}}^2 = 7\,\mathrm{W}\,.}$$

5 On constate sur l'expression de la puissance qu'elle devient nulle si le fluide n'est pas visqueux : il n'a pas besoin que de la puissance lui soit apportée pour pouvoir s'écouler. Cela est physiquement cohérent car c'est la viscosité qui est responsable de la perte de charge que le pompe vient compenser.

> *Cependant, l'utilisation de superfluides pose bien d'autres difficulté ... à commencer par le refroidissement à des températures de l'ordre de 4 K (limite pour que l'hélium soit superfluide).*

Exercice 9 : Lance incendie

oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Pertes de charge ;*
▷ *Puissance indiquée.*

1 Par définition,

$$\boxed{v = \frac{Q}{\pi d^2/4} = 2{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

2 L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique tout au long du tuyau et de la lance. Si la vitesse d'éjection en sortie de lance est très supérieure à la vitesse débitante dans le tuyau, c'est que la section de sortie de la lance est très inférieure à la section du tuyau.

3 Appliquons le théorème de Bernoulli entre le point A et la sortie de la lance, les pertes de charge étant pour le moment négligées,

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\cancel{z_A} = \frac{P_{\mathrm{atm}}}{\mu} + \frac{{v_{\mathrm{e}}}^2}{2} + gh \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P_A = P_{\mathrm{atm}} + \frac{\mu({v_{\mathrm{e}}}^2 - v^2)}{2} + \mu gh = 7{,}8\,\mathrm{bar}\,.}$$

4 La relation de Bernoulli permet de constater que le produit μv^2 est homogène à une pression. Ainsi,

$$[\kappa] = [f]\frac{[\mu v^2]}{[d]} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{Pa\cdot m^{-1}} = [f]\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{m}}$$

ce qui montre que ***f* est sans dimension**.

5 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du bassin et la sortie de la lance, incluant la puissance indiquée fournie par la pompe et les pertes de charges régulières sur toute la longueur ℓ du tuyau :

$$\mu Q\left[\left(\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\mu} + \frac{{v_{\mathrm{e}}}^2}{2} + gh\right) - \left(\frac{P_{\mathrm{atm}}}{\mu} + \frac{0^2}{2} + 0\right)\right] = \mathcal{P} - Q\kappa\ell$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mu Q {v_{\mathrm{e}}}^2}{2} + \mu Q g h + Q\kappa\ell = 6{,}8\,\mathrm{kW}\,.}$$

Attention aux préfacteurs dimensionnels ! Utiliser la puissance indiquée nécessite d'écrire la relation de Bernoulli avec le débit massique, d'où le préfacteur μQ. La perte de charge régulière totale $\kappa\ell$, ce qui permet de trouver le préfacteur Q par comparaison avec le terme de gauche.

On peut procéder à plusieurs tests de vraisemblance sur le résultat, et en particulier constater qu'augmenter la vitesse d'éjection, la hauteur de la lance, le débit volumique ou les pertes de charge exige que la pompe fournisse une puissance plus élevée, ce qui est cohérent.

Exercice 10 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie

2 | 1

▷ *Pertes de charge et diagramme de Moody ;*
▷ *Puissance indiquée.*

L'installation est schématisée figure 4.

1 Le remplissage de l'arrosoir exige un débit volumique $Q = 0{,}5\,\mathrm{L\cdot s^{-1}} = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$. La vitesse débitante dans la conduite est donc

$$\boxed{V = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 2{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la conduite est donc

$$\boxed{Re = \frac{\mu V D}{\eta} = 4{,}2\cdot 10^4\,.}$$

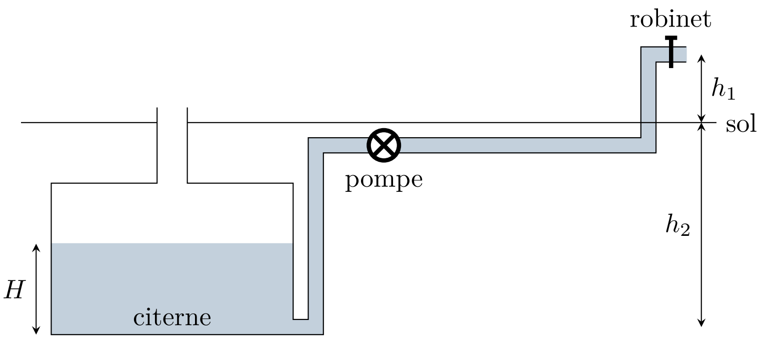

Figure 4 – Schéma de l'installation hydraulique.

2 La rugosité relative de la conduite est donnée par $\varepsilon = e/D = 1 \cdot 10^{-4}$. À partir des valeurs indiquées à droite du diagramme, on en déduit la courbe à suivre, indiquée par la flèche figure 5. On repère ensuite le point où cette courbe coupe la verticale $Re = 4{,}2 \cdot 10^4$. L'ordonnée de ce point donne la valeur du coefficient de friction,

$$\boxed{\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-2}\,.}$$

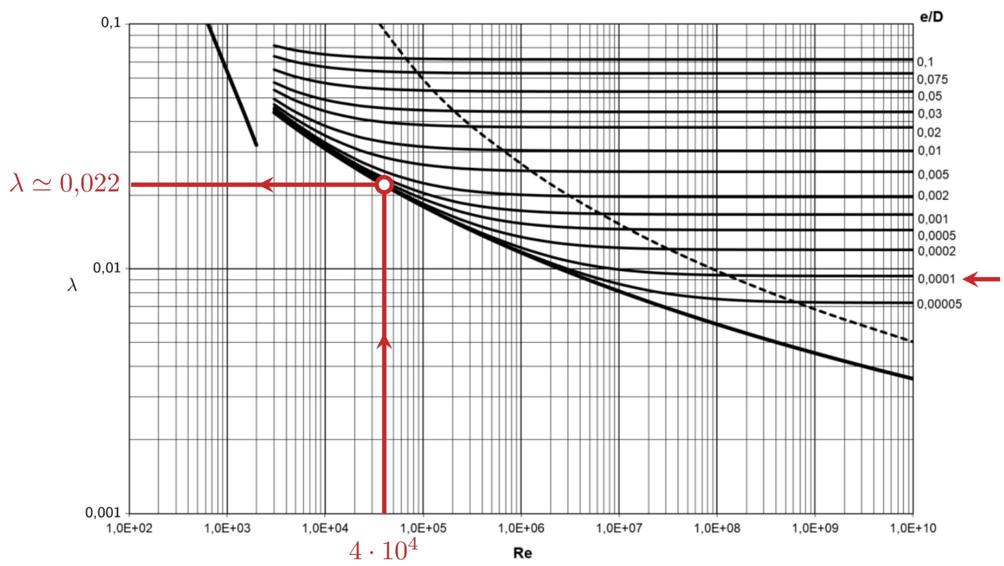

Figure 5 – Abaque de Moody complétée.

On en déduit la chute de pression,

$$\boxed{\Delta p = \lambda \frac{\mu L V^2}{2D} = 1{,}7 \cdot 10^5\,\text{Pa} = 1{,}7\,\text{bar}\,.}$$

3 Appliquons la relation de Bernoulli entre le haut de la citerne d'eau ($P = P_{\text{atm}}$, $v \simeq 0$ en la supposant très large, $z = -(h_2 - H) = H - h_2 < 0$) et la sortie du robinet ($P = P_{\text{atm}}$ car jet libre, $z = h_1$). On prend bien sûr en compte la puissance indiquée $\mathcal{P}_{\text{i}}$ fournie par la pompe et la perte de charge.

$$D_{\text{m}} \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\mu} + \frac{V^2}{2} + g h_1 \right) - D_{\text{m}} \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\mu} + 0 + g(H - h_2) \right) = \mathcal{P}_{\text{i}} - D_{\text{m}} \frac{\Delta p}{\mu}\,.$$

> *Les facteurs D_{m} et μ à faire apparaître devant la perte de charge Δp se retrouvent par comparaison avec les pressions apparaissant dans le membre de gauche (qu'il faut connaître !).*

Sachant que le débit volumique est donné par $Q = D_{\text{m}}/\mu$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{i}} = Q\,\Delta p + \mu\,Q\,\frac{V^2}{2} + g(h_1 + h_2 - H) = 110\,\text{W}\,.}$$

4 La puissance indiquée est reliée à la puissance électrique consommée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathcal{P}_\text{élec} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\text{élec} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{0{,}6} \simeq 180\,\mathrm{W}\,.}$$

5 Outre la perte de charge régulière, il aurait aussi fallu prendre en compte des **pertes de charges singulières** au niveau des coudes des canalisations et du robinet.

Exercice 11 : Production d'énergie hydroélectrique

oral banque PT | 2 | 2

- *Puissance indiquée ;*
- *Pertes de charge.*

1 Le débit volumique représente le volume de fluide traversant une section donnée de la conduite chaque seconde, ou ici de façon équivalente le volume de fluide sortant de la conduite chaque seconde.

2 Le lac étant très grand par rapport à la conduite, on peut considérer qu'à la surface

$$v_1 \simeq 0\,.$$

La vitesse (débitante) en sortie de la conduite se déduit du débit volumique,

$$v_2 = \frac{Q_\mathrm{vol}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \frac{4Q_\mathrm{vol}}{\pi D^2} = 5{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

3 L'écoulement est incompressible et permanent. Comme on cherche la puissance maximale disponible, on néglige les pertes de charge. La relation de Bernoulli appliquée entre la surface du lac et la sortie de la conduite donne

$$D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2} + g z_2\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} + g z_1\right) = -\mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance indiquée *cédée* par le fluide à la turbine. Comme $D_\mathrm{m} = \rho\, Q_\mathrm{vol}$, on en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho\, Q_\mathrm{vol}\left[g(z_1 - z_2) - \frac{{v_2}^2}{2}\right] = 5{,}8\,\mathrm{MW}\,.}$$

> *On peut remarquer que cette puissance ne dépend pas de la position de la turbine au sein de la conduite : elle est la même que la turbine soit proche de la surface du lac ou au contraire proche de la sortie de la conduite.*
>
> *Ce résultat met donc en défaut deux raisonnements spontanés (contradictoires !) : on pourrait croire que la puissance est plus élevée en bas de la chute d'eau car l'eau aurait davantage de temps pour accélérer ... ou au contraire qu'elle est plus élevée en haut car les pertes de charge qui dissipent de l'énergie ont lieu dans la conduite. Ces raisonnements sont faux, car ils sont issus d'une transposition trop naïve de la mécanique des solides. En raison de l'incompressibilité de l'eau, il y a conservation du débit volumique et la vitesse de l'écoulement est la même dans toute la conduite.*
>
> *De façon plus imagée, si l'écoulement était accéléré sur le bas de la conduite alors cela créerait un vide qui aspirerait l'eau située au dessus, et donc l'accélérerait autant. Réciproquement, si l'écoulement était freiné sur le bas de la conduite alors cela formerait un bouchon qui ralentirait tout l'écoulement.*

4 La valeur donnée est cohérente avec celle qu'on vient de déterminer ... ouf ! La différence vient des pertes de charge, non prises en compte dans la question précédente. Celles-ci sont de deux types : régulières le long de la conduite, et singulière à l'entrée. On peut par exemple exprimer la perte de charge sous forme d'une altitude Δz_c. Ici, la puissance perdue s'écrit

$$\mathcal{P}_\mathrm{diss} = \rho Q_\mathrm{vol}\, g\, \Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4\mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4\frac{\mathcal{P}}{\rho\, g\, Q_\mathrm{vol}} = 9{,}5\,\mathrm{m}\,.}$$

Tout se passe donc comme si l'écoulement était parfait (pas de perte de charge) mais que l'écart $z_2 - z_1$ était réduit de 9,5 m, c'est-à-dire comme si le niveau du lac était plus bas de 9,5 m.

> *Pour savoir comment positionner les facteurs D_m, ρ, Q_{vol}, etc. on raisonne dimensionnellement à partir du théorème de Bernoulli ... qu'il faut donc connaître par cœur et sans erreur.*

Exercice 12 : Transport d'huile alimentaire — 2 | 2

▷ *Pertes de charge régulières et singulières ;*
▷ *Puissance indiquée.*

Commençons par calculer la vitesse débitante dans la conduite, qui apparaît dans tous les calculs :

$$u = \frac{q}{\pi d^2} = 0{,}17\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

1 Il suffit de reprendre l'expression de la perte de charge régulière par unité de longueur en substituant correctement les termes :

$$\Delta P_{\mathrm{reg}} = \Delta P_{\mathrm{lin}}\,L = \frac{1}{2d} \times \frac{64\,\eta}{ud\rho} \times \rho u^2 \times L = 32\frac{\eta u L}{d^2}$$

d'où on déduit, en faisant bien attention aux conversions d'unités,

$$\boxed{\eta = \frac{d^2\,\Delta P_{\mathrm{reg}}}{32uL} = 0{,}22\,\mathrm{Pa\cdot s}\,.}$$

> *On peut se rendre compte dimensionnellement, par exemple en comparant les deux expressions, qu'il est nécessaire de multiplier la perte de charge linéaire par la longueur de la conduite.*

2 Calculons le nombre de Reynolds,

$$\mathrm{Re} = \frac{ud\rho}{\eta} = 692\,,$$

ce qui correspond bien à un écoulement laminaire.

3 Par additivité des pertes de charge,

$$\Delta P = \Delta P_{\mathrm{reg}} + \Delta P_{\mathrm{s}} = 15{,}4\,\mathrm{mbar}\,.$$

La perte de charge singulière n'est pas si importante que ça comparativement aux pertes de charges régulières, car le fluide est très visqueux.

4 Cette perte de charge singulière équivaut à une perte de charge régulière sur une longueur L' de conduite telle que

$$\Delta P_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\kappa\rho u^2 = \Delta P_{\mathrm{lin}}\,L' = 32\frac{\eta u L'}{d^2}$$

ce qui donne

$$\boxed{L' = \frac{1}{64}\frac{d^2\kappa\rho u}{\eta} = 50\,\mathrm{cm}\,.}$$

5 Appliquons la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la conduite, séparées d'une hauteur H, en prenant en compte les pertes de charge. On pose $\Delta P = P_{\mathrm{e}} - P_{\mathrm{s}} > 0$ la chute de pression totale le long de la conduite,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{P_{\mathrm{s}}}{\rho} + \cancel{\frac{u^2}{2}} + gH\right) - \left(\frac{P_{\mathrm{e}}}{\rho} + \cancel{\frac{u^2}{2}} + g\times 0\right) &= -\frac{\Delta P_{\mathrm{reg}} + \Delta P_{\mathrm{s}}}{\rho}\\
-\Delta P + \rho g H &= -(\Delta P_{\mathrm{reg}} + \Delta P_{\mathrm{s}})\\
&\boxed{\Delta P = \Delta P_{\mathrm{reg}} + \Delta P_{\mathrm{s}} + \rho g H\,.}
\end{aligned}$$

ce qui donne numériquement 270 mbar. On constate que l'essentiel de la chute de pression dans la conduite est due à la gravité.

$\boxed{6}$ Reprenons la relation de Bernoulli, cette fois-ci en termes de puissance pour y inclure la pompe, et en imposant $P_\text{s} = P_\text{e}$:

$$\rho q \left(\cancel{\frac{P_\text{s}}{\rho}} + \cancel{\frac{u^2}{2}} + gH\right) - \left(\cancel{\frac{P_\text{e}}{\rho}} + \cancel{\frac{u^2}{2}} + g \times 0\right) = -\rho q \frac{\Delta P_\text{reg} + \Delta P_\text{s}}{\rho} + \mathcal{P}$$

$$\rho q g H = -q(\Delta P_\text{reg} + \Delta P_\text{s}) + \mathcal{P}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\mathcal{P} = q\,\Delta P = 150\,\text{W}\,,}$$

en reconnaissant la chute de pression calculée précédemment ... présence qui n'a rien de surprenant puisque la pompe doit justement compenser cette chute de pression !

Problème ouvert

Exercice 13 : Clepsydre

oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Résolution de problème.*

Si le débit de vidange D_0 est constant, c'est que la vitesse de sortie l'est aussi : notons-là $v_0 = D_0/\pi R_0^2$. La relation de Bernoulli appliquée entre la surface libre du réservoir et l'orifice de sortie supposé en $z = 0$ s'écrit

$$\cancel{\frac{P_\text{atm}}{\rho}} + \frac{v(z)^2}{2} + gz = \cancel{\frac{P_\text{atm}}{\rho}} + \frac{D_0^2}{2\pi^2 R_0^4} + 0\,.$$

En outre, la conservation du débit volumique entre la section de réservoir située à la hauteur z et la section de sortie s'écrit

$$\pi R(z)^2 v(z) = D_0 \qquad \text{soit} \qquad v(z) = \frac{D_0}{\pi R(z)^2}\,.$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$\frac{D_0^2}{2\pi^2 R(z)^4} + gz = \frac{D_0^2}{2\pi^2 R_0^4}$$

$$\frac{1}{R(z)^4} = \frac{1}{R_0^4} - \frac{2\pi^2 gz}{D_0^2}$$

$$\left(\frac{R_0}{R(z)}\right)^4 = \left(1 - \frac{2\pi^2 R_0^4 gz}{D_0^2}\right)$$

$$\frac{R_0}{R(z)} = \left(1 - \frac{2\pi^2 R_0^4 gz}{D_0^2}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{R(z) = R_0 \left(1 - \frac{2\pi^2 R_0^4 gz}{D_0^2}\right)^{-1/4}}$$