

Interférences par division du front d'onde

Plan du cours

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Micro-rappel de Terminale sur la diffraction | 2 |
| II | Trous d'Young | 3 |
| II.A | Dispositif et modélisation | 3 |
| II.B | Rappel de PTSI : différence de marche à grande distance | 4 |
| II.C | Différence de marche à l'infini | 7 |
| II.D | Figure d'interférences | 9 |
| III | Extension spatiale de la source, cohérence spatiale | 10 |
| III.A | Source étendue parallèlement aux franges. | 10 |
| III.B | Source étendue perpendiculairement aux franges | 10 |
| III.C | Fentes d'Young. | 16 |
| IV | Extension spectrale de la source, cohérence temporelle | 17 |
| IV.A | Fentes d'Young éclairées par un doublet spectral | 17 |
| IV.B | Fentes d'Young éclairées par une source à spectre continu | 18 |
| V | Réseaux par transmission | 19 |
| V.A | Principe : interférences à N ondes | 19 |
| V.B | Formule des réseaux | 20 |
| V.C | Utilisation en spectroscopie. | 22 |

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 3 « Optique », bloc 3 « Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young ».

Dans cette partie, les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|--|--|
| Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie. Ordre d'interférences p . | Exprimer et utiliser l'ordre d'interférences. Mettre en œuvre une expérience d'interférences : trous d'Young ou fentes d'Young. Montrer la non-localisation des franges d'interférences. |
| Franges d'interférences. Interfrange. | Justifier la forme des franges observées. |
| Variations de l'ordre d'interférences avec la position ou la longueur d'onde de la source. Perte de contraste par élargissement spatial ou spectral de la source. | Utiliser un critère de brouillage des franges pour interpréter des observations expérimentales. |

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 3 « Optique », bloc 2 « Superposition d'ondes lumineuses ».

L'étude de la superposition de N ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.


| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|--|---|
| Superposition de N ondes monochromatiques cohérentes, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique. Réseau par transmission. | Établir l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à N ondes. Relier qualitativement le nombre de traits d'un réseau à la largeur des franges brillantes. |

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2019.
- ▷ Oral : régulièrement.

Nous avons montré dans le cours précédent que deux ondes ne pouvaient être cohérentes que si elles étaient issues de la même source primaire mais avaient suivi deux chemins différents pour atteindre le point d'observation, ce qui nécessite d'utiliser un interféromètre.




Dans un **interféromètre à division du front d'onde**, une source émet les mêmes trains d'onde dans plusieurs directions, dont une partie au moins est déviée par un miroir ou grâce au phénomène de diffraction, ce qui permet de les superposer.

I - Micro-rappel de Terminale sur la diffraction



On appelle **diffraction** l'étalement d'une onde dans l'espace dû à son passage au travers ou autour d'un obstacle.

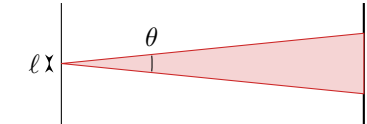
Toutes les figures de diffraction présentent une tâche centrale brillante entourée d'autres motifs. L'allure précise est caractéristique de l'objet diffractant : à partir de la figure de diffraction, il est possible de retrouver la forme et les dimensions de l'objet diffractant. C'est d'ailleurs par diffraction de rayons X que l'on détermine la structure microscopique des solides cristallins, de l'ADN, des protéines, des virus, etc.



La figure de diffraction à grande distance possède les mêmes symétries et invariances que l'objet diffractant.

objet diffractant

écran



$\ell \lambda$

θ

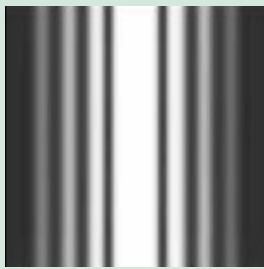
Plus l'objet diffractant est étroit, plus la figure de diffraction est large : la figure de diffraction par un objet de taille caractéristique $\ell > \lambda$ a une largeur angulaire $\theta \sim \lambda/\ell$

Espace 1

Remarque : Ne pas croire que la diffraction nécessite $\ell < \lambda$! Par exemple, les ondes lumineuses sont diffractées par des objets de taille de l'ordre du mm, soit $\ell \simeq 2000\lambda$. Le résultat ci-dessus n'est d'ailleurs qu'un développement limité au premier ordre, valable pour $\lambda \ll \ell$.

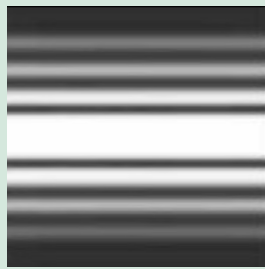
Application 1 : À la recherche de l'objet diffractant

Identifier l'objet diffractant ayant produit les figures ci-dessous.



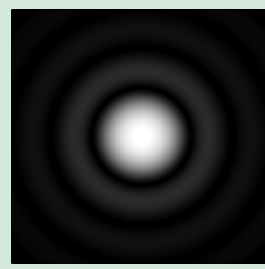
Fente verticale

Espace 2



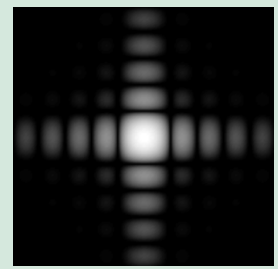
Fente horizontale

Espace 3



Disque

Espace 4



Carré

Espace 5

II - Trous d'Young

II.A - Dispositif et modélisation



Le dispositif des trous d'Young est constitué d'un écran opaque percé de deux trous circulaires.

UN trou : diffraction

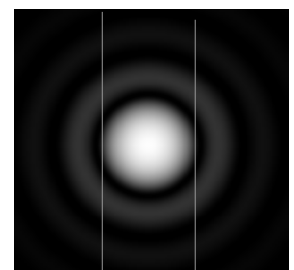
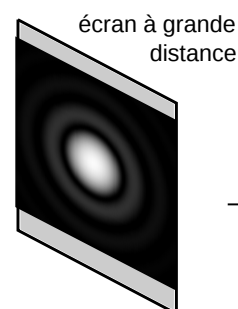
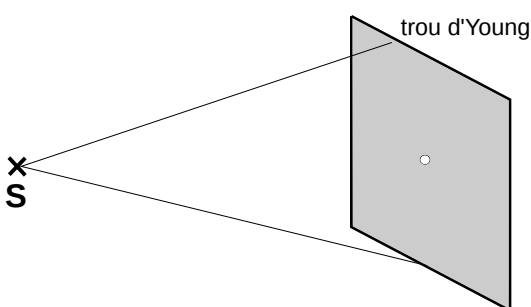
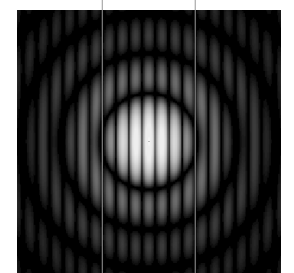
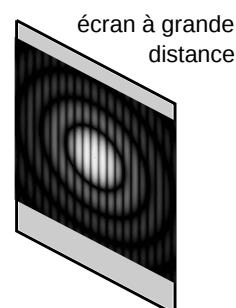
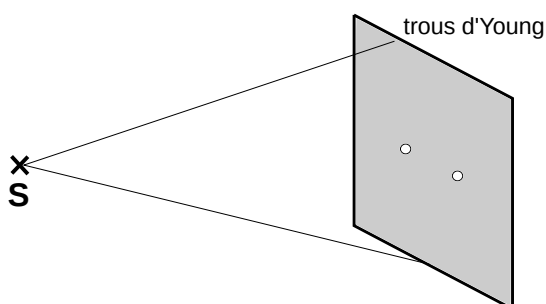


Figure de diffraction

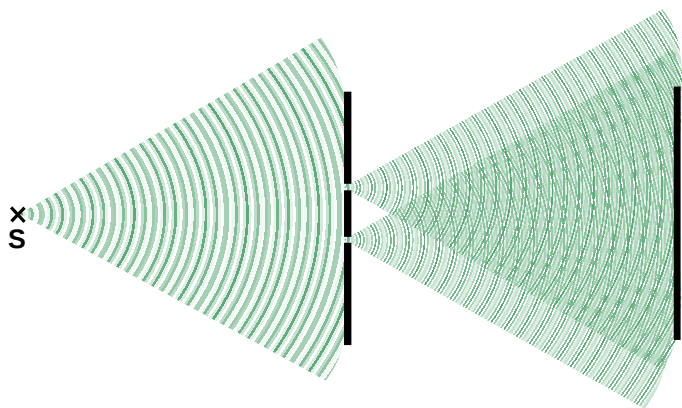
DEUX trous : diffraction + interférences



Dans la figure de diffraction produite par un trou, on voit des interférences



On appelle **champ d'interférences** la zone de l'espace dans laquelle les deux ondes se superposent.



Pour les trous d'Young, les interférences sont observables en tout point du champ d'interférences ... mais on montrera que c'est parfois moins simple au chapitre suivant.

Notre objectif est de comprendre la figure d'interférences, mais pas d'étudier la figure de diffraction : même si elle est la cause des interférences, elle sera « négligée » par la suite.

- les ondes diffractées seront supposées parfaitement isotropes : si un seul des trous est ouvert alors l'éclairement sur l'écran est uniforme ;
- concrètement, la modélisation développée dans la suite de ce paragraphe permet de décrire l'éclairement à proximité du centre de l'écran.

II.B - Rappel de PTSI : différence de marche à grande distance

• Hypothèses et notations

- ▷ Les trous d'Young sont éclairés par une source ponctuelle S supposée monochromatique, et les deux **sources secondaires** S_1 et S_2 sont également ponctuelles et monochromatiques.
- ▷ Les sources secondaires sont situées dans le plan $y = 0$, mais le point M a une ordonnée y a priori non nulle : le schéma de la figure 1 donne donc une vue « écrasée » de la situation.
- ▷ Dans un dispositif expérimental, on a classiquement d et D de l'ordre de 10 à 20 cm, a de l'ordre de 1 mm et une figure d'interférence qui mesure quelques cm sur l'écran. Ainsi, la source et l'écran sont à grande distance des trous,

$$d, D \gg a,$$

et l'observation se fait à proximité du centre de l'écran,

$$d, D \gg x, y.$$

- ▷ On se place dans l'air d'indice 1 : les chemins optiques sont directement égaux aux distances géométriques. Le calcul de la différence de marche se résume donc à des calculs de longueur.

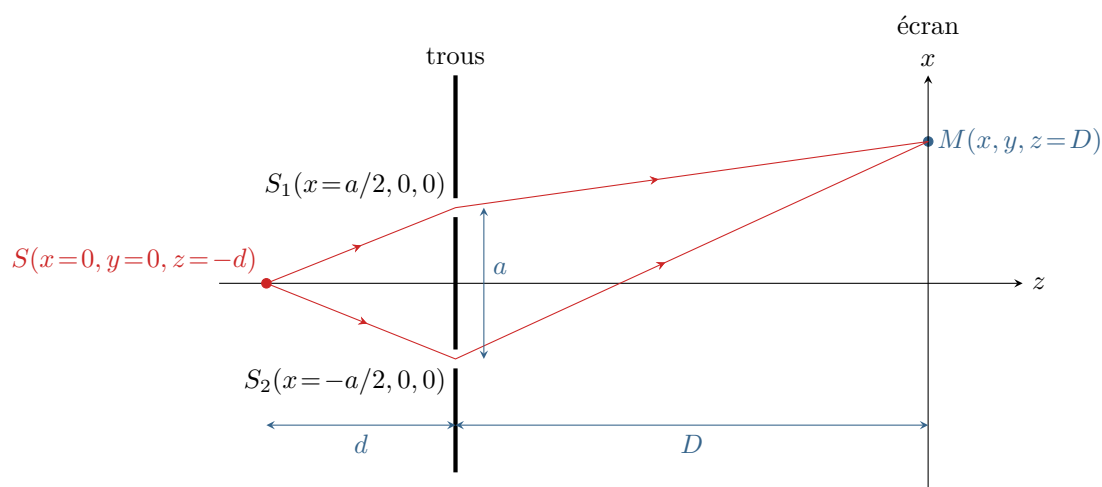


Figure 1 – Schéma du montage.

- **Démonstration de la différence de marche à grande distance**

❶ **Simplification du calcul par symétrie :** Par définition, la différence de marche est la différence de chemin optique suivi par les rayons passant par les trous ① et ②. En décomposant, on a donc

D!

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

Or par symétrie $(SS_1) = (SS_2)$, donc

$$\delta = (S_2M) - (S_1M).$$

Espace 6

❷ **Expression géométrique de la longueur S_1M :** utilisons une approche en termes de coordonnées.

Les coordonnées des points extrêmes sont $S_1(a/2, 0, 0)$ et $M(x, y, D)$ donc

$$\overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + D \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad S_1M^2 = \overrightarrow{S_1M} \cdot \overrightarrow{S_1M} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2$$

et en développant l'identité remarquable et en réorganisant les termes on arrive à

$$S_1M^2 = D^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2.$$

Espace 7

Remarque : le calcul tel qu'on vient de le faire est exactement équivalent au théorème de Pythagore en trois dimensions : à vous de choisir la forme que vous préférez.

Développement limité :

Factorisation par D^2 puis calcul de la racine.

$$S_1M = D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2}\right)^{1/2} \underset{D \gg a, x, y}{\simeq} D \left(1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2}\right)$$

Espace 8

❸ **Expression géométrique de la longueur S_2M** : Le point S_2 a pour coordonnées $(-a/2, 0, 0)$: le calcul de (S_2M) est donc formellement identique à celui de (S_1M) en remplaçant a par $-a$.

$$S_2M = D \left(1 + \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D^2} \right)$$

Espace 9

❹ **Conclusion :**

$$\begin{aligned} \delta &= D \left(x' + \frac{x'^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y'^2}{2D^2} \right) - D \left(x' + \frac{x'^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y'^2}{2D^2} \right) \\ &= D \frac{ax}{2D^2} + nD \frac{ax}{2D^2} \\ \delta &= \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

Espace 10

Dans un dispositif de trous d'Young distants de a le long d'un axe (Ox) , placés dans l'air d'indice 1, la différence de marche en un point M d'un écran placé à une distance D des trous ne dépend que de sa coordonnée x et vaut

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}.$$

Ordre d'interférences et déphasage :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(M) = 2\pi p(M) = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$$

Espace 11

La démonstration de δ est très importante et il faut absolument que vous sachiez la refaire vite et bien. L'expression de δ est à connaître par cœur, celles de p et $\Delta\phi$ à savoir retrouver très vite.

II.C - Différence de marche à l'infini

Dans les exercices, il est fréquent de considérer que les sources secondaires se trouvent à l'infini par rapport à l'écran d'observation. Cela peut être une approximation d'une expérience réelle à l'échelle d'une salle de TP, ou bien un excellent modèle par exemple pour analyser des observations astronomiques. Un autre cas fréquent est celui de l'observation des interférences dans le plan focal image d'une lentille, représenté figure 2. Ce paragraphe a pour but de démontrer l'expression de la différence de marche dans cette dernière situation.

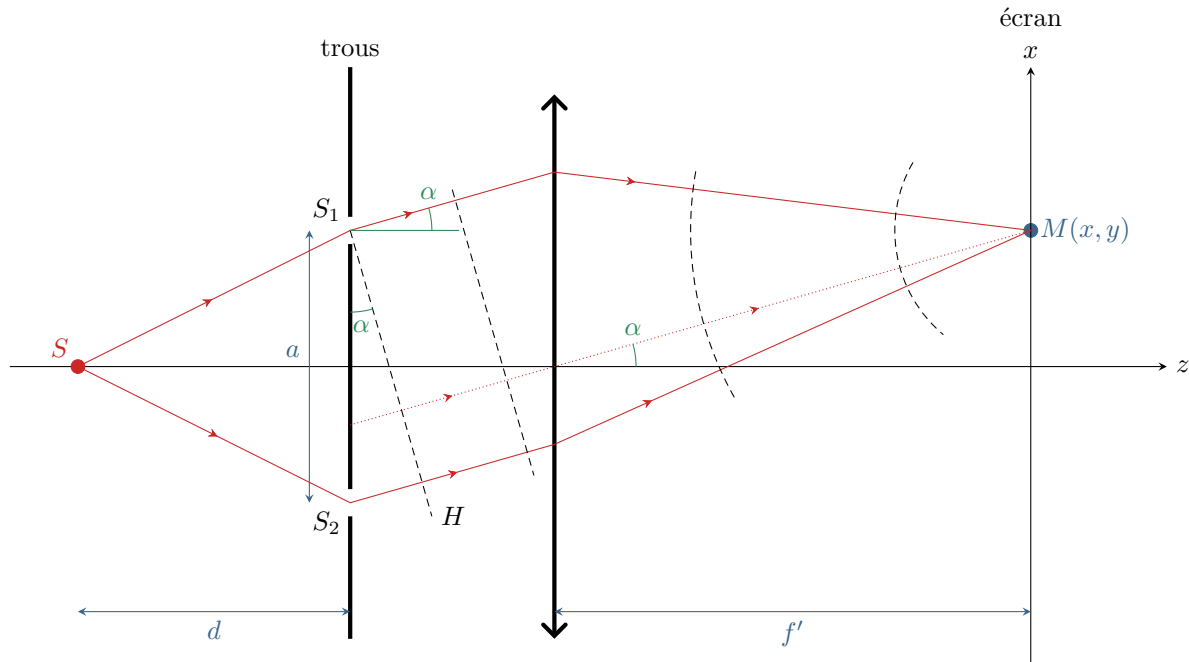


Figure 2 – Observation d'interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente.

• Construction des rayons qui interfèrent

- ▷ comme le point M se trouve dans le plan focal image de la lentille, alors on sait que les rayons qui y aboutissent sont tous parallèles les uns aux autres avant la lentille;
- ▷ on construit le rayon en traits pointillés passant par le centre optique de la lentille : c'est un rayon fictif (il ne passe ni par S_1 ni par S_2 , donc il ne peut pas y avoir de lumière se propageant le long de ce rayon) ... mais comme il n'est pas dévié, il indique la direction de tous les rayons avant la lentille;
- ▷ on en déduit le tracé des deux rayons qui interfèrent réellement : ce sont les deux rayons issus de S_1 et S_2 parallèlement au rayon pointillé et qui convergent ensuite vers M .

(M!)

• Utilisation du principe du retour inverse de la lumière en optique ondulatoire

Une fois les rayons tracés, le calcul de la différence de marche repose sur le principe du retour inverse de la lumière.

Principe du retour inverse de la lumière :

Si la lumière allait du point d'observation vers la source, alors les rayons lumineux seraient les mêmes.

Il y a donc égalité des chemins optiques entre deux points A et B quel que soit le sens de parcours :

$$(AB) = (BA)$$

(R)

Remarque : la première partie sur l'identité des rayons est (à notre niveau) à un postulat, en revanche la seconde partie sur l'égalité des chemins optiques (AB) et (BA) se déduit de la définition du chemin optique : le rayon direct et le rayon inverse sont identiques donc parcourent la même distance dans les mêmes milieux.

Graphiquement : si jamais la source était située au point d'observation, alors d'après le théorème de Malus les surfaces d'onde seraient en tout point orthogonales aux rayons qui aboutissent à la source.

↪ on peut représenter des « surfaces d'onde inverses » sur la figure.

Remarque : le terme « surface d'onde inverse » me semble clair et utile pour expliquer, mais il ne fait pas partie du vocabulaire traditionnel de l'optique.

Conséquence sur les chemins optiques :

(M)

si la lumière allait de M vers S , alors S_1 et H seraient dans le même plan d'onde, et donc $(MS_1) = (MH)$. D'après le principe du retour inverse, $(MS_1) = (S_1M)$ et $(MH) = (HM)$, d'où on déduit

$$(S_1M) = (HM).$$

Espace 12

💣💣💣 **Attention !** Les surfaces d'onde inverses ne sont pas des vraies surfaces d'onde : les points qui s'y trouvent n'ont pas la même phase ... sinon cela signifierait qu'il n'y aurait pas d'interférences en M !

• Calcul de la différence de marche

Simplification du calcul :

(D!)

$$\delta = \left[\underbrace{(SS_2)}_{\text{symétrie}} + (S_2H) + \underbrace{(HM)}_{\text{retour inv}} \right] - \left[(SS_1) + (S_1M) \right]$$

Espace 13

Pour simplifier le calcul, on admet que le résultat ne dépend pas de y (ce qui se justifie par invariance, ou par analogie avec le paragraphe précédent), ce qui permet de raisonner pour $y = 0$, et donc simplement dans le plan de la figure.

Idée de la démonstration : exprimer α de deux façons différentes, d'une part avec les sources secondaires, d'autre part avec le point M sur l'écran, et les identifier.

Relation trigonométrique dans le triangle rectangle S_1S_2H :

$$\sin \alpha = \frac{S_2H}{S_1S_2} = \frac{S_2H}{a}$$

(D!)

Relation trigonométrique dans le triangle formé par O (centre de la lentille), le centre de l'écran, et M :

$$\tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

L'angle α étant petit, on peut linéariser et identifier les fonctions trigonométriques,

$$\frac{S_2H}{a} = \frac{x}{f'} \quad \text{d'où} \quad \delta = S_2H = \frac{ax}{f'}.$$

Espace 14

II.D - Figure d'interférences

On suppose se placer dans le cas de l'observation à grande distance, mais compte tenu de l'analogie des expressions des différences de marche, les résultats sont directement transposables au cas d'une observation à l'infini en remplaçant D par f' . D'après la formule de Fresnel

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \right) \right].$$

L'éclairement est périodique en x mais il est indépendant de la coordonnée y de M , il est donc invariant par translation le long de cet axe : les franges sont rectilignes dans la direction (Oy) .

Remarque : ce résultat se voit dès l'expression de la différence de marche, puisqu'elle détermine à elle seule l'état d'interférence en un point donné.

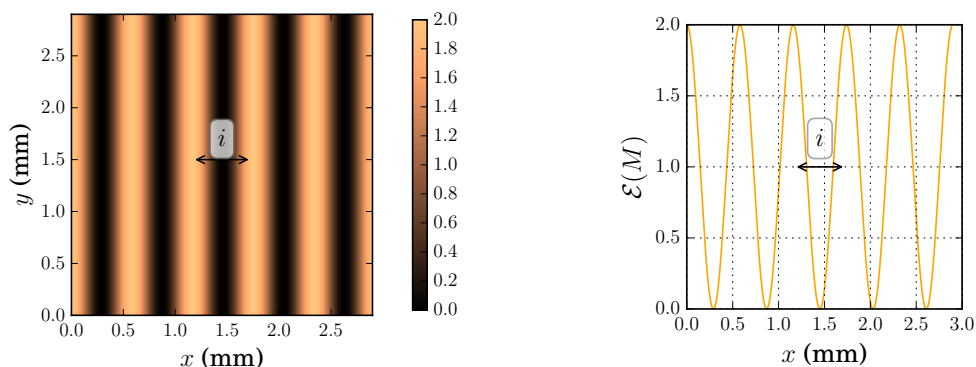


Figure 3 – Expérience des trous d'Young. Simulation réalisée pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.



On appelle **interfrange** i la période spatiale de la figure d'interférences.

L'interfrange correspond à la distance entre deux franges sombres ou deux franges brillantes consécutives.

$$\Delta\varphi(x+i) = \Delta\varphi(x) + 2\pi \quad p(x+i) = p(x) + 1 \quad \delta(x+i) = \delta(x) + \lambda.$$

(R)

Le plus simple est de raisonner à partir de l'ordre d'interférences :

$$p(x) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D} \text{ donc } \frac{a(x+i)}{\lambda D} = \frac{ax}{\lambda D} + 1 \text{ soit } \frac{ai}{\lambda D} = 1$$

d'où on conclut $i = \frac{\lambda D}{a}$.

(M!)

Espace 15

III - Extension spatiale de la source, cohérence spatiale

Utiliser une source de grande taille est a priori intéressant car cela permet d'augmenter la luminosité (ne pas confondre avec le contraste !) de la figure d'interférences.



Une source étendue se modélise comme une juxtaposition de sources ponctuelles incohérentes, l'éclairement total étant la somme des éclairements issus de chaque point de la source.



III.A - Source étendue parallèlement aux franges

On a montré que la figure d'interférences était indépendante de l'ordonnée y du point d'observation, donc que les franges étaient rectilignes dans cette direction. Ce paragraphe étudie l'effet de l'extension spatiale de la source en la supposant étendue selon (Oy) mais toujours infiniment fine selon (Ox) et placée en $x = 0$.

On suppose les trous d'Young toujours éclairés par une source ponctuelle monochromatique S , mais elle est désormais située en $Y \neq 0$, comme représenté figure 4 en vue « écrasée ». Malgré la translation selon (Oy) , la source primaire S est toujours dans le plan médiateur des trous d'Young donc on a toujours

$$(SS_1) = (SS_2).$$

↪

une translation de la source selon (Oy) laisse la figure d'interférences inchangée.

Espace 16

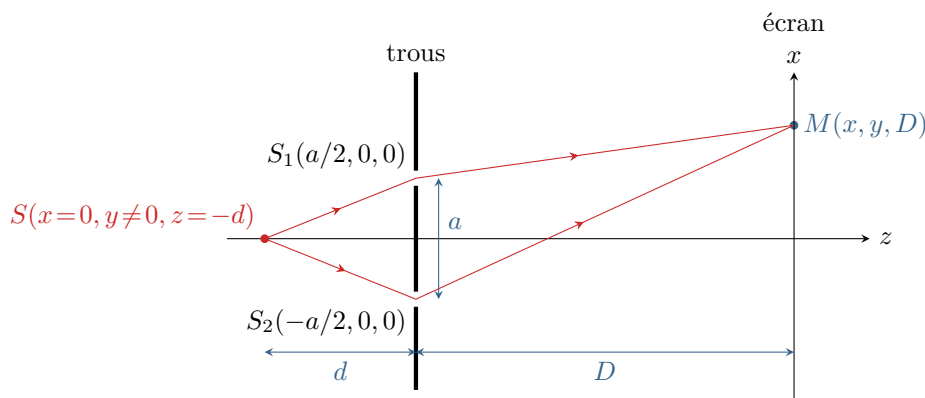


Figure 4 – Schéma du montage.

Ainsi, deux sources décalées le long de l'axe (Oy) produisent exactement la *même* figure d'interférences, même si elles sont incohérentes, ce qui permet de doubler l'éclairement et donc de rendre la figure plus lumineuse ... et ce raisonnement tient pour un nombre quelconque de sources.



Utiliser une source étendue dans la direction parallèle aux franges est bénéfique, car cela augmente la luminosité de la figure d'interférences en préservant le contraste.



III.B - Source étendue perpendiculairement aux franges

III.B.1 - Effet d'une translation de la source

Application 2 : Trous d'Young éclairés par une source décalée par rapport à l'axe optique

Considérons deux trous d'Young éclairés par une source ponctuelle décalée par rapport à l'axe optique du montage à une abscisse X . Compte tenu de l'invariance par translation selon (Oy) , on suppose pour alléger le calcul que la source, les trous d'Young et le point d'observation sont tous situés dans le plan $y = 0$.

- 1 - En généralisant les résultats précédents, donner sans calcul la différence de marche en un point M de l'écran.
- 2 - Exprimer alors l'éclairement. Quel est l'impact de la translation de la source sur la figure d'interférences ?

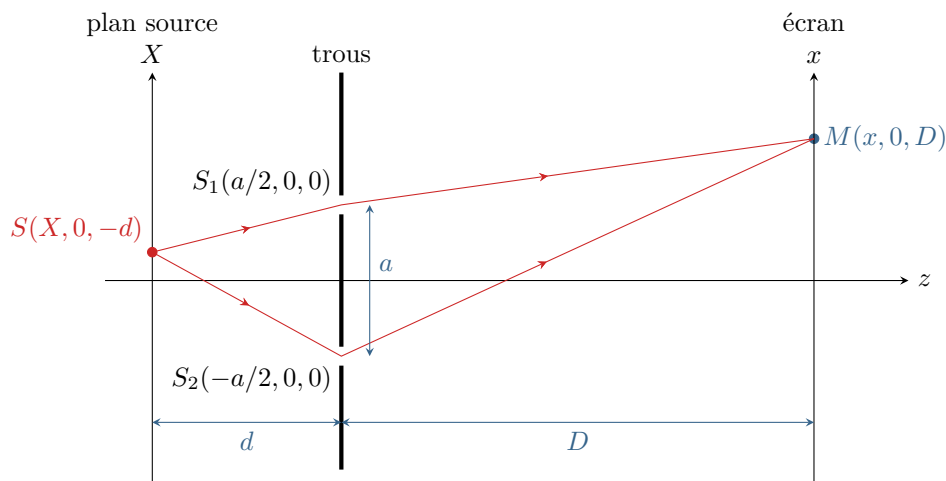


Figure 5 – Translation de la source dans la direction perpendiculaire aux franges.

- Calcul de la différence de marche

En décomposant les chemins optiques,

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)] = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

On a montré au paragraphe II.B que

$$(S_2M) - (S_1M) = \frac{ax}{D}.$$

La géométrie étant identique, on en déduit sans calcul que

$$(SS_2) - (SS_1) = \frac{aX}{d}$$

et ainsi

$$\delta = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}.$$

Espace 17

↪ déplacer la source augmente la différence de marche d'une constante indépendante du point d'observation.

- Conséquence sur la figure d'interférences

D'après la formule de Fresnel,

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{aX}{d} \right) \right]$$

Le terme impliquant la position X de la source est indépendant du point d'observation, il est donc égal en tout point de la figure d'interférences : tout se passe comme s'il y avait un « déphasage spatial » dans l'éclairement.

↪ effet sur l'écran :

la figure d'interférences est décalée (analogie avec un signal sinusoïdal en temps).

Espace 18

III.B.2 - Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

Application 3 : Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles

Les trous d'Young sont maintenant éclairés par *deux* sources ponctuelles incohérentes, S et S' , symétriques par rapport à l'axe du montage, c'est-à-dire en $X = \pm b/2$. On note $p(M)$ et $p'(M)$ l'ordre d'interférence au point M correspondant à chacune des sources.

- 1 - Indiquer qualitativement l'effet de la présence des deux sources sur la figure d'interférences.
- 2 - Exprimer l'éclairement en un point M de l'écran. Interpréter physiquement l'expression obtenue, en identifiant un terme d'interférences et un facteur de contraste.
- 3 - À quelle condition sur p et p' la figure d'interférences est-elle totalement brouillée ?

• Analyse qualitative : simulations numériques

Cas extrêmes : La figure de gauche est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à i , si bien qu'elles paraissent identiques, et celle de droite pour un décalage égal à $i/2$, si bien qu'elles sont « en opposition de phase ».

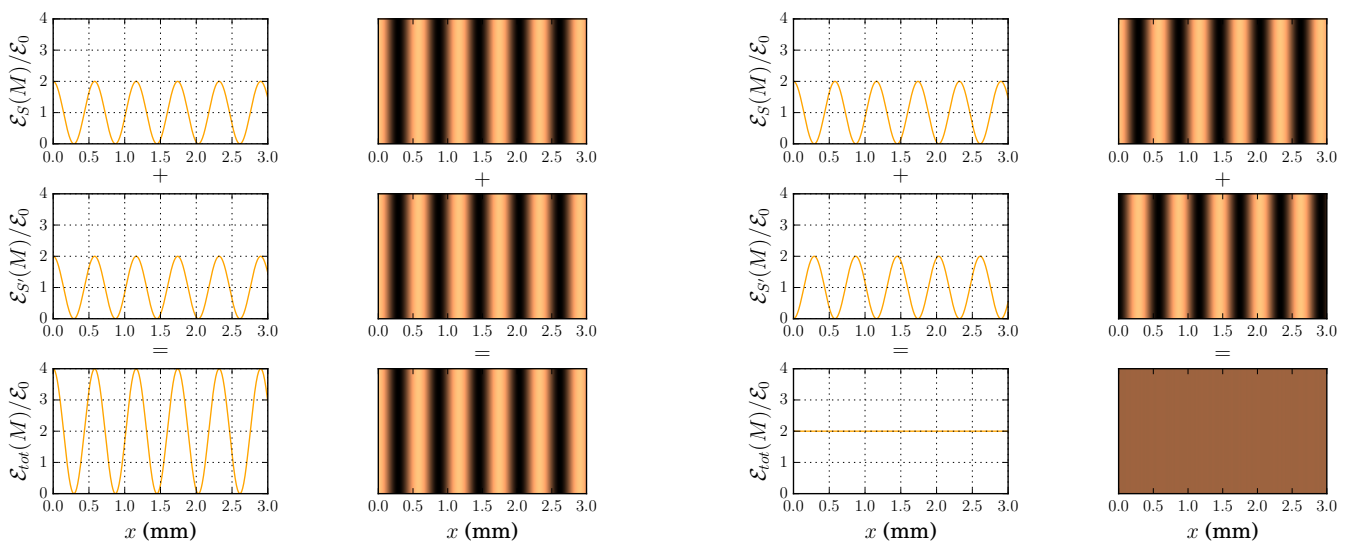


Figure 6 – Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées. Simulations réalisées pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

Cas quelconque : voir figure 7. La figure est tracée pour un décalage des figures d'interférences égal à $i/4$.

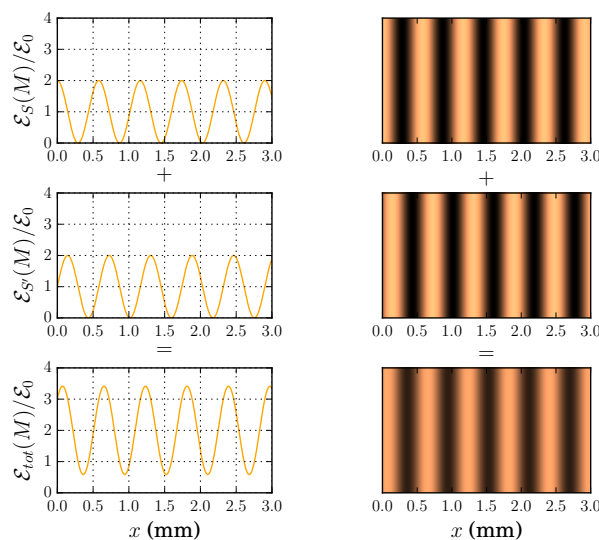


Figure 7 – Trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles décalées. Simulation réalisée pour $\lambda = 580 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

Conclusion qualitative :

- ▷ Les deux figures d'interférences issues des deux sources se superposent, mais comme elles sont décalées l'une par rapport à l'autre, cela conduit à une perte de contraste : les franges sombres ne sont pas parfaitement noires, les franges brillantes ne sont pas complètement lumineuses.
- ▷ La perte de contraste peut éventuellement aller jusqu'à un brouillage total de la figure d'interférences.



🔴🔴🔴 **Attention !** « Brouillage total » n'est pas du tout synonyme de « interférences destructives ». Lorsque la figure d'interférences est totalement brouillée, l'éclairement sur l'écran est uniforme (il n'y a plus du tout d'interférences) mais non nul.

- **Mise en équation**

Les résultats établis dans ce paragraphe n'ont pas besoin d'être appris par cœur, en revanche il s'agit d'un exercice très classique à savoir refaire vite et bien.

Les deux sources S et S' sont placées de manière symétrique en $\pm b/2$ par rapport à l'axe optique du montage, donc

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = \frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D} \quad \text{et} \quad \delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = -\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D}$$

soit en termes d'ordre d'interférence

$$p(M) = \frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad p'(M) = -\frac{ab}{2\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}.$$

Éclairement total :

Les sources sont incohérentes mais chacun des deux éclairissements se calcule à partir de la formule de Fresnel.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p)] + 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0 [2 + \cos(2\pi p) + \cos(2\pi p')] \\ &= 2\mathcal{E}_0 \left[2 + 2 \cos\left(2\pi \frac{p-p'}{2}\right) \cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Espace 19

Interprétation :

- ▷ Terme en $p + p'$:

$$\cos\left(2\pi \frac{p+p'}{2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right).$$



Ce terme est identique à celui que l'on obtiendrait avec une seule source placée en $X = 0$, c'est-à-dire au milieu des deux sources S et S' . Il est appelé **terme d'interférences**. Il dépend de x , et donne la position des franges brillantes et sombres ainsi que l'interfrange, qui est inchangé par rapport au cas d'une unique source ponctuelle.

- ▷ Terme en $p - p'$:

$$\cos\left(2\pi \frac{p-p'}{2}\right) = \cos\left(2\pi \frac{ab}{2\lambda d}\right)$$

Ce terme est indépendant de x , donc il prend la même valeur en tout point de l'écran. Il donne le contraste global de la figure d'interférences. Il est appelé **facteur de contraste**. Le contraste est égal à la valeur absolue du facteur de contraste.

• Critère de brouillage

Il y a brouillage total de la figure d'interférences si les franges sombres créées par une source se superposent aux franges brillantes créées par la deuxième source.

Le facteur de contraste s'annule si $2\pi \frac{p-p'}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ soit $p-p' = n + 1/2$.

Espace 20

III.B.3 - Trous d'Young éclairés par une source étendue

Les résultats établis précédemment avec deux sources ponctuelles se généralisent :



Lorsque les trous d'Young sont éclairés par une source étendue perpendiculairement aux franges, le décalage des figures d'interférences produites par chaque point de la source induit une perte de contraste qui peut aller jusqu'à un brouillage total.

• Critère semi-quantitatif de brouillage (admis)



Par convention, la figure d'interférences formée par une source étendue est dite **brouillée** dès lors que la différence d'ordre d'interférences entre les ondes issues de son centre et de ses extrémités est supérieure à $1/2$

$$\Delta p = p_{\text{ext}}(M) - p_{\text{centre}}(M) > 1/2$$

La largeur de source à partir de laquelle le critère de brouillage prévoit une figure brouillée est appelée **largeur de cohérence spatiale** de la source.

(R)

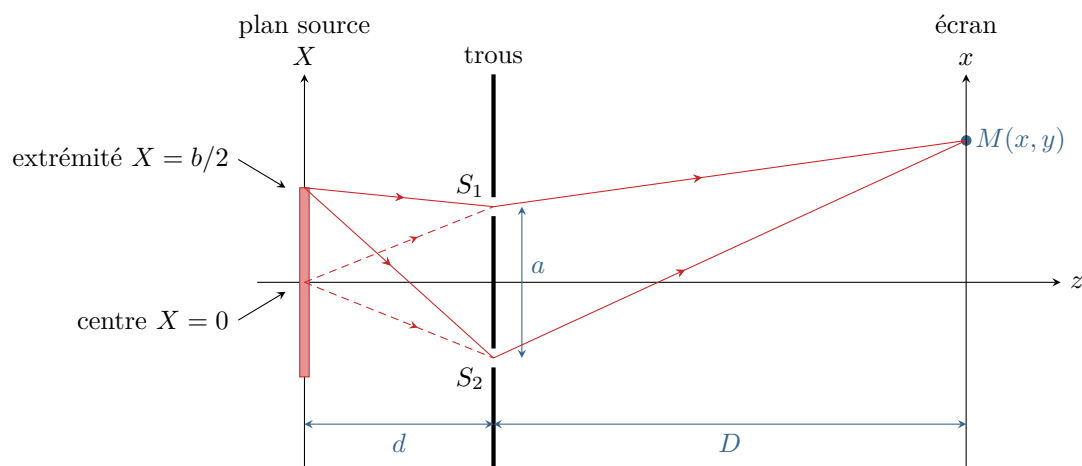


Figure 8 – Trous d'Young éclairés par une source étendue.

Interprétation qualitative :

lorsque ce critère est vérifié, il y a brouillage entre les figures d'interférences créées par certains points de la source. On comprend donc que cela dégrade le contraste.

Espace 21

Remarque : on constatera de manière récurrente dans les calculs qu'en pratique, avec une source étendue, la valeur de Δp ne dépend jamais du point d'observation : comme indiqué à la fin du chapitre précédent, la cohérence spatiale induit une perte de contraste uniforme sur l'écran.

• Cas d'une fente source

Application 4 : Trous d'Young éclairés par une source large

Considérons deux trous d'Young éclairés par une fente source de largeur b centrée sur l'axe optique.

1 - Exprimer les ordres d'interférences $p_0(x)$ et $p_{b/2}(x)$ au point de l'écran d'abscisse x créés par les points de la source situés respectivement en $X = 0$ et $X = b/2$. En utilisant le critère de brouillage, en déduire la largeur de cohérence spatiale de la source.

2 - Un calcul exact permet de montrer que l'éclairement au point M s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\lambda d}{\pi ab} \sin \left(\frac{\pi ab}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

Identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste. Déterminer la valeur de b correspondant à la première annulation du facteur de contraste. Comparer les deux approches.

1 Largeur de cohérence spatiale :

$$p_{b/2}(x) = \frac{a \times b/2}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D} \quad \text{et} \quad p_0(x) = \frac{a \times 0}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

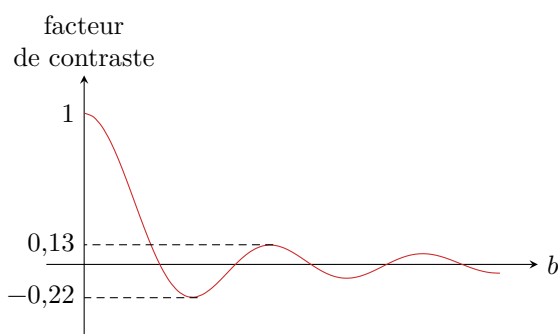
La figure d'interférences est brouillée lorsque que

$$\Delta p = \frac{ab}{2\lambda d} > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{ab}{2\lambda d} > \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad b > \frac{\lambda d}{a} = b_c.$$

Espace 22

1 Comparaison à un calcul exact : identifier terme d'interférences et facteur de contraste

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\lambda d}{\pi ab} \sin \left(\frac{\pi ab}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$



Première annulation de contraste :

$$\frac{\pi ab}{\lambda d} = \pi \quad \text{soit} \quad b = \frac{\lambda d}{a}$$

Espace 23

→ La largeur de cohérence spatiale de la source est celle qui donne la première annulation du contraste, ce qui est un bon ordre de grandeur : si $b > b_c = \lambda d/a$, le contraste ne dépasse pas 0,22, ce qui est peu.

🔴🔴🔴 **Attention !** Ne pas croire pour autant que la figure d'interférences est « parfaitement » contrastée si la source est plus étroite que la largeur de cohérence spatiale et « pas du tout » si elle est plus large : la variation de contraste est un phénomène progressif.

→ le critère semi-quantitatif de brouillage ne donne qu'un ordre de grandeur.

►► **Pour approfondir** : Démontrons l'expression de l'éclairement observé sur l'écran en utilisant une source étendue de largeur b . Pour ce faire, découpons par la pensée la source étendue en bandes infinitésimales de largeur dX incohérentes les unes avec les autres. Supposons la source uniforme : l'éclairement $d\mathcal{E}_0$ produit sur l'écran par une bande de largeur dX en l'absence d'interférences est simplement proportionnelle à dX ,

$$d\mathcal{E}_0 = \alpha dX.$$

L'éclairement total \mathcal{E}_0 produit par la source en l'absence d'interférences vaut donc

$$\mathcal{E}_0 = \int d\mathcal{E}_0 = \int_{-b/2}^{b/2} \alpha dX = \alpha b \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{b}.$$

D'après la formule de Fresnel, l'élément de source situé en X produit en un point M de l'écran un éclairement

$$d\mathcal{E}(M) = 2 \frac{\mathcal{E}_0 dX}{b} [1 + \cos(2\pi p_X(M))] \quad \text{avec} \quad p_X(M) = \frac{aX}{\lambda d} + \frac{ax}{\lambda D}$$

Les différentes bandes étant incohérentes,

$$\mathcal{E}(M) = \int d\mathcal{E}(M) = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{d} + \frac{x}{D}\right)\right) \right\} dX$$

En calculant l'intégrale et à l'aide de la relation trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

on aboutit au résultat donné précédemment, dans lequel on peut identifier un facteur de contraste et un terme d'interférences :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \underbrace{\frac{\lambda d}{\pi ab} \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}_{\text{contraste}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right)}_{\text{interférences}} \right]$$

Le facteur de contraste est donné par la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, appelée *sinus cardinal*. Elle se rencontre très fréquemment dans le contexte de l'optique ondulatoire.

Remarquons par ailleurs que le facteur de contraste peut prendre des valeurs négatives : on parle d'*inversion de contraste*. Expérimentalement, si l'on augmente progressivement la largeur b de la source, l'inversion de contraste se manifeste par le fait que les franges sombres deviennent brillantes et réciproquement. ■

• Conclusion générale



Utiliser une source étendue dans la direction perpendiculaire aux franges permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences, mais au prix d'une diminution de contraste.



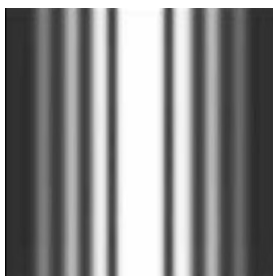
III.C - Fentes d'Young

Dans le but d'obtenir une figure plus lumineuse, on peut aussi poser la question d'élargir les objets diffractants en remplaçant les pupilles circulaires des trous d'Young par des fentes pour laisser passer plus de lumière. Les résultats précédents se généralisent sans peine.



Utiliser des fentes d'Young parallèles à la place de trous d'Young permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences.

Cependant, comme la figure d'interférences apparaît à l'intérieur de la figure de diffraction par l'un des trous ou l'une des fentes l'observation sur l'écran est modifiée, voir figure 9.



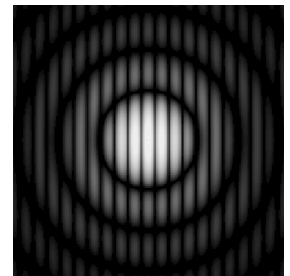
Une fente



Deux fentes



Un trou



Deux trous

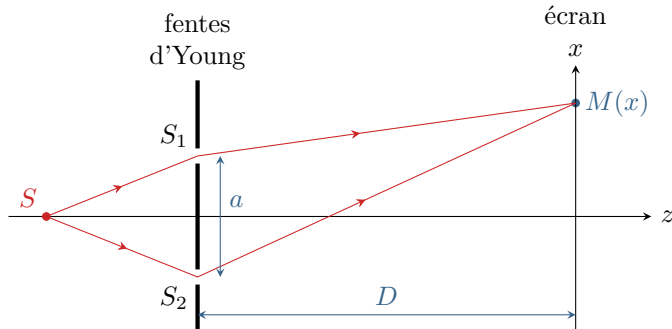
Figure 9 – Comparaison entre fentes d'Young et trous d'Young.

Par ailleurs, si les fentes sont trop larges dans la direction perpendiculaires aux franges d'interférences alors la figure de diffraction risque de devenir trop étroite pour pouvoir observer correctement des interférences.



Tous les résultats établis jusqu'à présent se généralisent au cas des fentes d'Young. L'animation ci-contre (flashez ou cliquez sur le QR code), développée par l'école Supoptique, permet de les observer. Elle est très bien faite, je vous encourage à l'utiliser largement lors de vos révisions.

IV - Extension spectrale de la source, cohérence temporelle



L'objectif de ce paragraphe est d'étudier l'influence du caractère polychromatique de la source sur la figure d'interférences obtenue. On considère un interféromètre de fentes d'Young, invariant par translation selon (Oy) . Dans tout ce paragraphe, la source est supposée ponctuelle et située sur l'axe optique du montage.

Pour des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle monochromatique placée sur l'axe optique du montage :

- ▷ ordre d'interférences au point M : $p(x) = ax/\lambda D$
- ▷ interfrange : $p(x+i) = p(x) + 1$ donc $i = \lambda D/a$

↪ modifier la longueur d'onde modifie l'interfrange.



La figure d'interférences est plus « dilatée » aux grandes longueurs d'onde qu'aux petites.

IV.A - Fentes d'Young éclairées par un doublet spectral

Pour illustration qualitative, on considère que le spectre de la source ne contient que deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 : on parle de doublet spectral. Deux longueurs d'onde différentes ne donnant pas lieu à des interférences,

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\lambda_1}(M) + \mathcal{E}_{\lambda_2}(M).$$

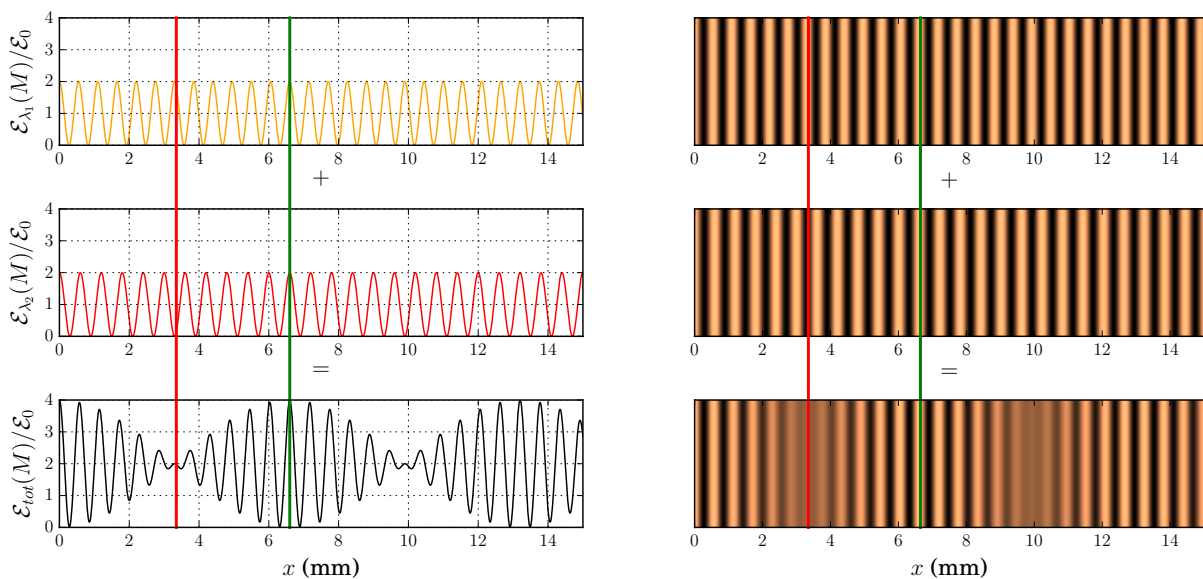


Figure 10 – Fentes d'Young éclairées par un doublet spectral. Simulation réalisée pour $\lambda_1 = 550 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$, $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$.

Interprétation : comme les interfranges ne sont pas égaux, les franges brillantes d'une longueur d'onde se superposent par endroits aux franges brillantes de l'autre longueur d'onde (p.ex. au niveau du trait vert), ce qui donne une figure lumineuse et contrastée, mais par endroit aux franges sombres (p.ex. au niveau du trait rouge), ce qui donne lieu à ces endroits à un brouillage de la figure d'interférences.

💡💡💡 **Attention !** L'extension spatiale de la source entraîne une perte de contraste globale, uniforme sur toute la figure d'interférences. Au contraire, l'extension spectrale entraîne une modulation du contraste, qui n'est uniforme.

IV.B - Fentes d'Young éclairées par une source à spectre continu

Considérons maintenant le cas d'une source dont le spectre d'émission est continu de largeur $\Delta\lambda$, c'est-à-dire restreint à un intervalle $[\lambda_0 - \Delta\lambda/2; \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$.

• Simulation numérique

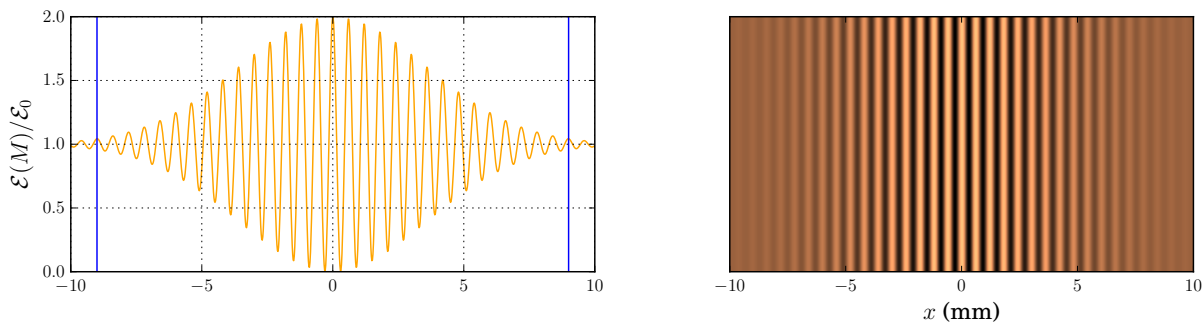
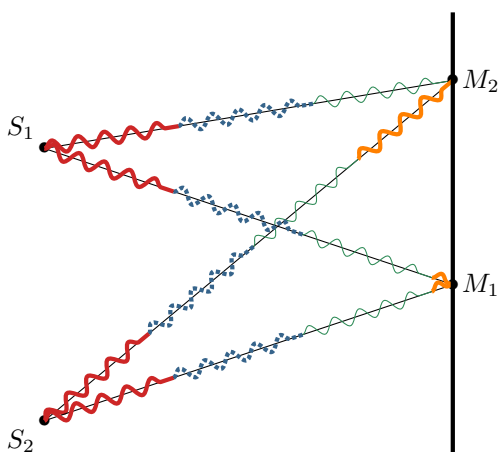


Figure 11 – Fentes d'Young éclairées par une source à spectre continu. Simulation réalisée pour $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = 40 \text{ nm}$ (ce qui est très supérieur à une raie spectrale réelle, mais permet de bien voir le phénomène), $D = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ mm}$. Le spectre de la source est choisi gaussien, les traits verticaux bleus matérialisent l'abscisse à partir de laquelle le critère de brouillage est vérifié.

• Critère de brouillage

Rappel : Le modèle des trains d'ondes décrit le caractère polychromatique de la source en considérant des sauts de phase aléatoires de l'onde lumineuse à un intervalle de temps τ_c régulier, appelé **temps de cohérence** de la source. La longueur d'un train d'onde, appelée **longueur de cohérence temporelle** de la source, est reliée à la largeur en longueur d'onde par

$$L_c = c\tau_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$



Le déphasage entre deux trains d'ondes étant aléatoire, superposer deux trains d'ondes différents ne peut pas donner lieu à des interférences. Ainsi,

- ▷ si les trains d'ondes qui se superposent en un point sont la majorité du temps identiques (point M_1 ci-contre), la figure d'interférence en ce point sera bien contrastée ;
- ▷ si les trains d'ondes qui se superposent en un point sont la majorité du temps différents (point M_2 ci-contre), la figure d'interférence en ce point sera bien contrastée.

↪ distinguer ces deux situations demande de comparer la différence de marche δ à la longueur de cohérence de la source L_c .

Par convention, la figure d'interférences formée par une source ponctuelle à spectre continu est considérée comme **brouillée** en un point M si la différence de marche en ce point est supérieure à la longueur de cohérence temporelle de la source, c'est-à-dire à la longueur d'un train d'onde.

En pratique, il s'agit d'une décroissance progressive du contraste lorsque δ augmente.



►► **Pour approfondir** : Ce critère peut également se formuler à partir de l'ordre d'interférence. Il revient à considérer la figure brouillée en un point M lorsque la différence d'ordre d'interférences $\Delta p(M)$ entre la longueur d'onde centrale λ_0 et les longueurs d'onde extrêmes $\lambda_{\min/\max}$ y est supérieure à $1/2$. Vérifions-le.

Le point M étant fixé, la différence de marche l'est aussi. Le critère de brouillage s'écrit

$$\Delta p(M) = \frac{\delta}{\lambda_0} - \frac{\delta}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \delta \times \frac{\frac{\Delta\lambda}{2}}{\lambda_0 \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)} > \frac{1}{2}$$

En supposant la raie étroite, $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, donc $\lambda_0 \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \simeq \lambda_0^2$, ce qui donne

$$\delta \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0^2} > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \delta > \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = L_c.$$

On obtient bien le même résultat qu'en raisonnant en termes de trains d'ondes. ■

V - Réseaux par transmission

V.A - Principe : interférences à N ondes

Les dispositifs d'Young étudiés jusqu'à présent n'impliquent que deux chemins optiques différents pour aller de la source au point d'observation, ceux passant par les deux fentes ou trous d'Young.

↪ qu'en est-il si l'on utilise un dispositif permettant à N rayons lumineux d'interférer ?

Observation expérimentale : voir figure 12.

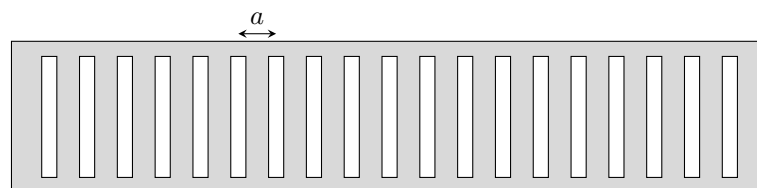


Figure 12 – Figure obtenue par passage d'un laser au travers de 1 à 6 fentes. Plus le nombre de fentes est élevé, plus les tâches brillantes sont lumineuses, ce que la figure ne permet pas de montrer.

Plus il y a de fentes au travers desquelles la lumière peut passer, plus celle-ci se retrouve concentrée sur les points les plus lumineux. Ces points coïncident avec la position des franges brillantes lors du passage au travers de deux fentes.

On appelle **réseau optique** un instrument constitué d'une série de motifs identiques, répétés périodiquement, permettant la réflexion ou la transmission d'ondes lumineuses.

La répétition est caractérisée par la période spatiale du réseau a , appelée **pas du réseau**, ou par la fréquence spatiale $n = 1/a$, usuellement nommée **nombre de traits par millimètre**.



Ordre de grandeur : les réseaux usuels comptent quelques centaines de traits par millimètre.

Restrictions de notre étude : dans toute la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- ▷ on ne s'intéresse qu'aux réseaux par transmission ;
- ▷ dans la pratique expérimentale, la source permettant d'éclairer le réseau est toujours située au foyer objet d'une lentille : le réseau est utilisé **en éclairage parallèle** ;
- ▷ dans la pratique expérimentale, l'observation se fait toujours dans le plan focal image d'une lentille de projection : les interférences sont observées à l'infini, ce sont des rayons parallèles qui interfèrent.

V.B - Formule des réseaux

• Différence de marche entre motifs consécutifs

☹☹☹ **Attention !** Comme tous les angles sont algébriques, il faut les dessiner positifs sur le schéma pour que le calcul se passe correctement au niveau des signes. Ainsi, les rayons doivent « arriver du bas » et « repartir vers le haut ».

Calculons la différence de marche entre deux motifs consécutifs, notés S_j et S_{j+1} :

$$\delta = (SS_{j+1}M) - (SS_jM).$$

La source primaire S est situé à l'infini, donc d'après le théorème de Malus les points K et S_{j+1} appartiennent au même plan d'onde. Ainsi,

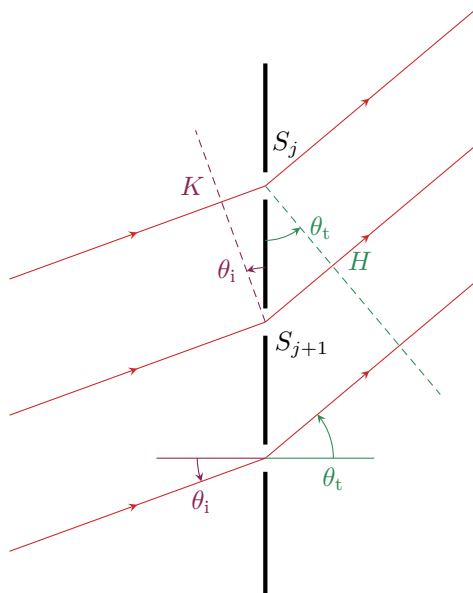
$$(SK) = (SS_{j+1}).$$

Par ailleurs, l'observation se fait à l'infini. Si la lumière venait du point d'observation, alors d'après le principe de retour inverse et le théorème de Malus les points S_j et H appartiendraient au même plan d'onde. Ainsi,

$$(S_jM) = (HM).$$

Ainsi,

$$\delta = [(SS_{j+1}) + (S_{j+1}H) + (HM)] - [(SK) + (KS_j) + (S_jM)]$$



Avec la trigonométrie habituelle,

$$\sin \theta_i = \frac{KS_j}{a} \quad \text{et} \quad \sin \theta_t = \frac{S_{j+1}H}{a} \quad \text{d'où} \quad \delta = a(\sin \theta_t - \sin \theta_i)$$

Espace 24

• Position des franges brillantes

Pour un grand nombre de traits éclairés, les maxima sont très concentrés : on ne s'intéresse donc qu'à la position des franges brillantes. Comme les motifs sont répartis régulièrement, alors la différence de marche entre deux motifs consécutifs est partout la même.

↪ si les ondes issues des motifs j et $j + 1$ sont en phase, alors celle issue du motif $j + 2$ est en phase avec $j + 1$ et donc également avec celle de j , etc.

Si les ondes issues de *deux* motifs consécutifs du réseau sont en phase au point d'observation, alors toutes les ondes issues de *tous* les motifs sont en phase en ce point.

Pour déterminer la position des maxima d'intensité en sortie du réseau, il suffit d'établir la condition d'interférences constructives entre deux motifs consécutifs.

Condition d'interférences constructives :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} (\sin \theta_t - \sin \theta_i) \in \mathbb{Z}.$$

Espace 25

Notations spécifiques aux réseaux : L'angle de transmission dans la direction donnant un ordre d'interférences p est noté θ_p plutôt que θ_t . De plus, si l'angle d'incidence est égal à l'angle de transmission alors on trouve directement $p = 0$ soit $\theta_0 = \theta_{p=0} = \theta_i$. Ainsi, l'angle d'incidence est traditionnellement noté θ_0 . Plus généralement, on se méfiera du léger glissement de notations et de vocabulaire entre les interférences à deux ondes et les réseaux.

Formule des réseaux :

Les raies brillantes en sortie d'un réseau apparaissent dans les directions telles que

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

La valeur de p est appelée **ordre** de la raie.

La direction des maxima est représentée figure 13 : on identifie en ordonnée $\sin \theta_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) à partir de $\sin \theta_0$, puis la direction des rayons par analogie avec le cercle trigonométrique (il n'est pas nécessaire de savoir refaire la figure). Un sinus devant être inférieur à 1, le nombre d'ordre visibles est nécessairement limité.

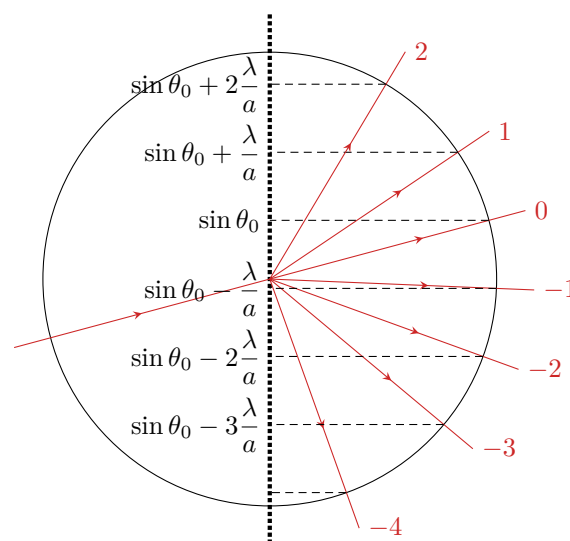


Figure 13 – Direction des maxima d'intensité en sortie d'un réseau.

V.C - Utilisation en spectroscopie

• Idée de physique

La position des ordres du réseau dépend de la longueur d'onde : un réseau peut donc être utilisé pour séparer spatialement les différentes composantes spectrales d'une lumière incidente. D'après la formule des réseaux,

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{a}{p} (\sin \theta_p - \sin \theta_0).$$

Connaissant a (ou plus souvent le nombre de traits par millimètre $n = 1/a$), en ayant repéré le numéro p de l'ordre et mesuré la position angulaire θ_p des raies brillantes, par exemple avec un goniomètre, on peut en déduire la longueur d'onde correspondante.

• Exemple de montage

On peut par exemple utiliser un montage à goniomètre, voir figure 14. Le collimateur permet d'obtenir une source à l'infini à partir d'une lampe spectrale, et la lunette de visée d'observer à l'infini. Le vernier du goniomètre permet de mesurer précisément les positions angulaires des différentes raies. Une méthode efficace est celle du minimum de déviation, cf. TP.

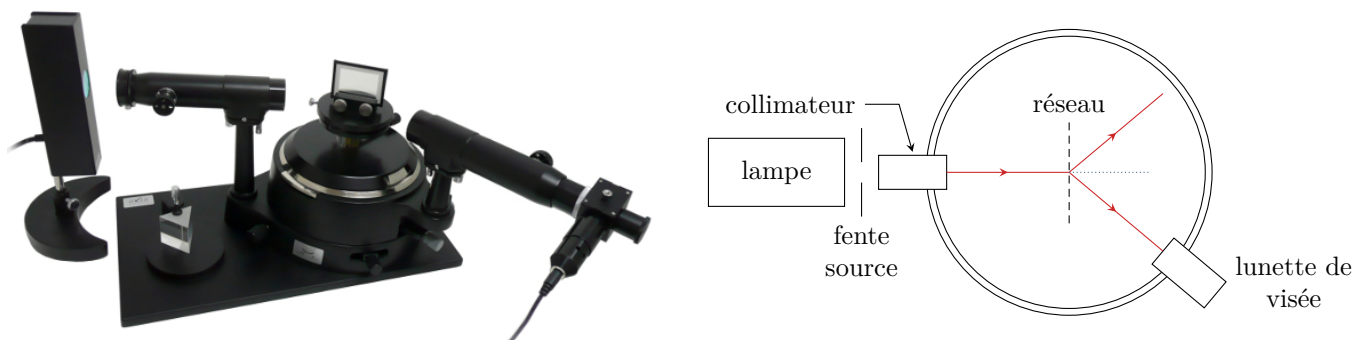


Figure 14 – Montage de spectrométrie à réseau utilisant un goniomètre. Sur la photo, on retrouve de gauche à droite la lampe à analyser, le collimateur, le réseau (tourné pour être visible sur la photo) et la lunette de visée.

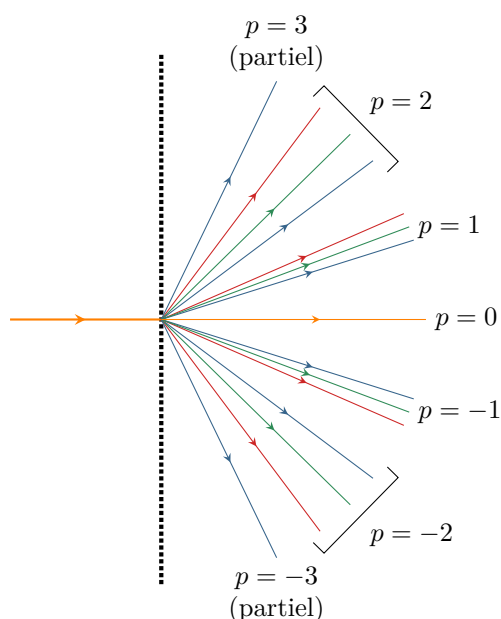
• « Dispersion » par le réseau



Dans un ordre donné, plus la longueur d'onde est grande, plus elle apparaît déviée par le réseau.
Les longueurs d'onde sont d'autant plus séparées que l'ordre est élevé.



⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Il ne s'agit pas du tout d'une déviation géométrique comme peut le faire un prisme, mais bien d'un phénomène d'interférences. Cependant, l'abus de langage est permis par l'analogie des observations : « un réseau dévie davantage le rouge que le bleu ».



- ▷ Certains ordres peuvent ne pas apparaître en entier sur l'écran si certaines raies sont déviées : c'est par exemple le cas des ordres ± 3 de la figure ci-contre.
- ▷ Dans certains cas, on rencontre également du **recouvrement d'ordres** : les raies les plus déviées de l'ordre n sont davantage déviées que les raies les moins déviées de l'ordre $n + 1$. Les ordres apparaissent alors mélangés.
- ▷ Enfin, si le nombre de traits éclairés (c'est-à-dire le nombre de fentes utiles) n'est pas assez grand les raies sont élargies et peuvent être mal séparées dans les premiers ordres : on dit alors qu'elles ne sont pas **résolues** par le réseau.