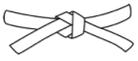


Interférences par division du front d'onde

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.



Flasher ce code pour
accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 3, 5 et 8
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2, 3, 5, 8 et 9
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1 à 5, 8 et 9
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 3 à 7 et 9 à 11

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !*

26.1 - Établir l'expression de la différence de marche dans le cas de trous d'Young éclairés par une source ponctuelle monochromatique placée sur l'axe des trous et pour un écran placé à grande distance.

26.2 - Établir l'expression de la différence de marche dans le cas de trous d'Young éclairés par une source ponctuelle monochromatique placée sur l'axe des trous et pour l'observation dans le plan focal image d'une lentille convergente.

L'interrogateur sera particulièrement vigilant à la rigueur de vos explications d'une part pour la construction des rayons qui interfèrent, et d'autre part pour la simplification du calcul de la différence de marche sous la forme « $\delta = HM$ ».

26.3 - Considérons un système de trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles incohérentes, distantes de b , symétriques par rapport à l'axe optique. Calculer l'éclairement total observé sur l'écran et identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste. L'expression de la différence de marche sera rappelée sans démonstration par l'étudiant.

(★) **26.4** - Considérons un système de trous d'Young éclairés par une source étendue de largeur b centrée sur l'axe optique. Appliquer le critère de brouillage pour établir l'expression de la largeur de cohérence spatiale de la source. L'expression de la différence de marche sera rappelée sans démonstration par l'étudiant.

26.5 - Établir la formule des réseaux.

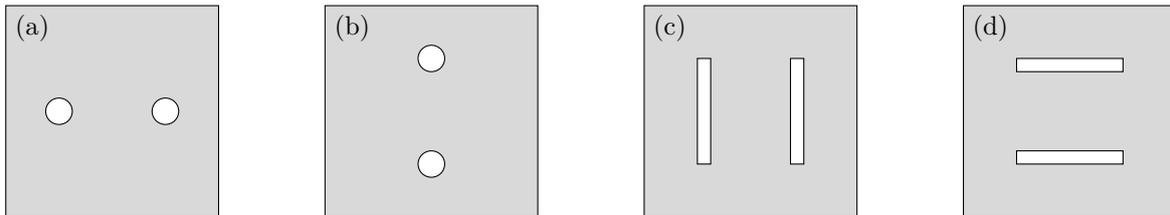
La différence de marche entre deux motifs consécutifs doit être redémontrée, et il est attendu que l'étudiant explique pourquoi il suffit de considérer des interférences constructives entre deux motifs pour déterminer les directions d'interférences constructives entre tous les motifs.

Trous d'Young et dispositifs analogues

Exercice 1 : Figures d'interférences 💡 1 | ✂️ 0

- ▷ Allure des figures d'interférences ;
- ▷ Diffraction.

On éclaire un dispositif d'Young (trous ou fentes) en lumière monochromatique. Représenter l'allure de la figure d'interférences observée sur un écran à grande distance pour chacun des dispositifs ci-dessous.



Exercice 2 : Fentes d'Young en éclairage parallèle 💡 1 | ✂️ 2 | 🔄

- ▷ Différence de marche à l'infini ;
- ▷ Largeur de cohérence spatiale.

On étudie le dispositif schématisé figure 1, dans lequel une lampe au mercure suivie d'un filtre vert éclaire un dispositif de fentes d'Young de grande hauteur dans la direction z . La taille apparente de la lampe source est imposée par une fente de largeur réglable ℓ : l'ensemble lampe, filtre et fente source est équivalent à une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ_0 . Cette source est placée dans le plan focal objet d'une lentille L_1 , ce qui permet d'éclairer les fentes d'Young en lumière parallèle. Les interférences sont observées dans le plan focal image d'une lentille L_2 . Le dispositif est supposé invariant par translation le long de l'axe z . On définit deux axes y_1 dans le plan de la fente source et y_2 dans le plan de l'écran.

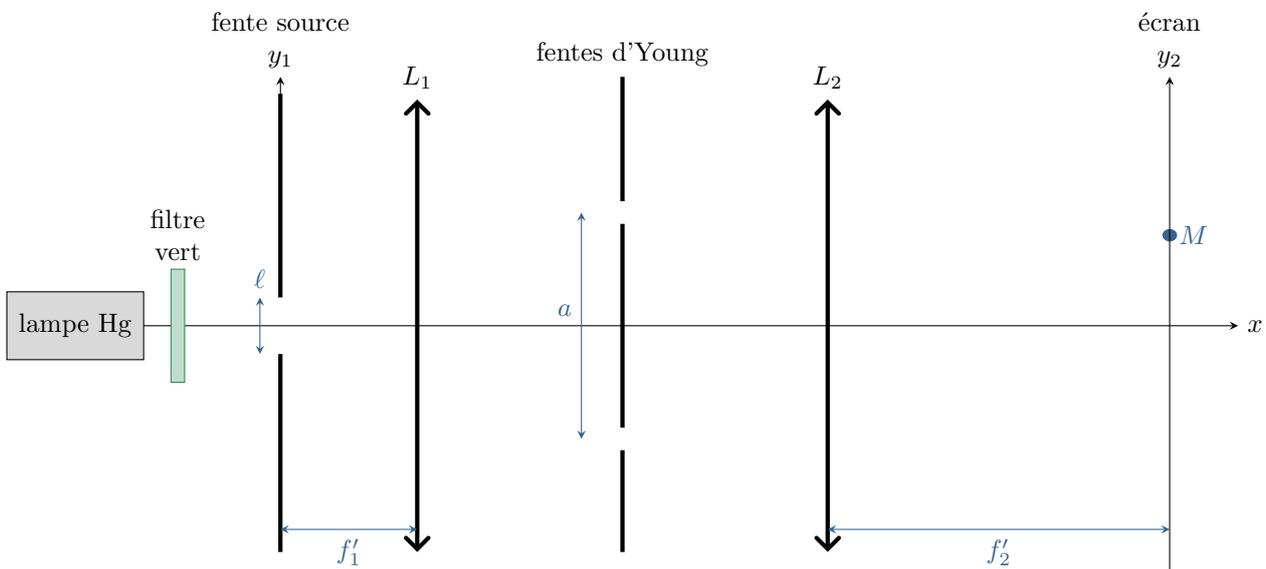


Figure 1 – Fentes d'Young éclairées en lumière parallèle.

- 1 - Tracer sur la figure 1 la marche des deux rayons issus de l'extrémité haute de la source qui interfèrent au point M .
- 2 - Montrer que l'ordre d'interférence pour les rayons issus d'un point d'ordonnée y_1 de la fente source et qui interfèrent au point d'ordonnée y_2 de l'écran vaut

$$p = \frac{a}{\lambda_0} \left(\frac{y_1}{f'_1} + \frac{y_2}{f'_2} \right).$$

- 3 - En déduire l'expression de la largeur de cohérence spatiale de la fente source.

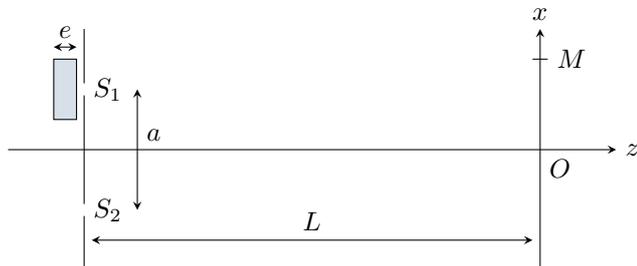
Exercice 3 : Homogénéité d'indice

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Différence de marche à grande distance ;
- ▷ Objet de phase.

Le candidat ayant frauduleusement photographié son énoncé, cet exercice est 100 % authentique.



Un dispositif de trous d'Young est utilisé afin de vérifier la qualité de l'homogénéité d'une lame mince transparente. Le dispositif est éclairé en incidence normale par une onde plane, monochromatique, de longueur d'onde λ , issue d'une source ponctuelle S placée au foyer objet d'une lentille mince convergente. Les deux trous sont distants de a . L'observation se fait sur un écran parallèle au plan des trous situé à grande distance de ceux-ci.

1 - En l'absence de la lame, tracer la marche des deux rayons lumineux issus de la source et interférant en $M(x, y, 0)$ puis déterminer la différence de marche $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$. En déduire l'interfrange i , rappeler l'expression de l'éclairement $E(x)$ sur l'écran, et la figure d'interférences observée.

2 - La lame d'indice n , supposée pour l'instant homogène, est à présent placée devant le trou S_1 : déterminer la nouvelle différence de marche en M .

3 - La lame n'est plus supposée homogène. On constate expérimentalement en déplaçant la lame parallèlement aux trous de telle sorte que chaque point de la lame ait été éclairé le défilement en O de quatre interfranges au maximum (défilement entre les valeurs minimale et maximale de l'indice). Déterminer, en fonction de λ et e , l'écart $\Delta n = n_{\max} - n_{\min}$ entre les valeurs extrêmes de l'indice de réfraction de la lame. Calculer $\Delta n/n$ et conclure.

Données : $\lambda = 579,0 \text{ nm}$, $e = 2,000 \text{ mm}$ et $n = 1,598$.

Exercice 4 : Fentes d'Young éclairées par un doublet spectral

💡 2 | ✂ 2



- ▷ Doublet spectral ;
- ▷ Influence de la diffraction.

Considérons un dispositif de fentes d'Young éclairé par une lampe à vapeur de mercure assimilée à une source ponctuelle située sur l'axe optique du montage, dont on isole le doublet jaune par un filtre approprié. Ce doublet est formé de deux raies très rapprochées, modélisées par deux raies monochromatiques de même intensité I_m et de longueurs d'onde $\lambda_1 = 577 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 579 \text{ nm}$.

Les fentes d'Young sont séparées d'une distance a et ont pour largeur $a/10$. Sur l'écran placé à la distance $D \gg a$ des fentes, on observe de longues franges rectilignes dans la direction (Oy) et réparties périodiquement le long de l'axe (Ox) .

1 - Pour une seule radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 , rappeler sans démonstration l'expression de l'ordre d'interférences au point de l'écran d'abscisse x puis celle de l'intensité. Définir l'interfrange. Pour laquelle des longueurs d'onde λ_1 ou λ_2 est-il le plus grand ?

2 - Les ondes issues de la raie 1 et celles issues de la raie 2 interfèrent-elles ? Montrer que l'intensité totale se met sous la forme

$$I(x) = I_{\text{moy}} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{2\lambda^2} \frac{ax}{D} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right]$$

avec I_{moy} une constante de proportionnalité dépendant de l'intensité I_m des raies ; $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la séparation du doublet et $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ sa longueur d'onde moyenne. Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, on approximera $\lambda_1\lambda_2 \simeq \lambda^2$.

3 - Déterminer la période spatiale des deux cosinus. En déduire que l'un d'eux s'interprète comme un terme d'interférences et l'autre comme un facteur de contraste dépendant du point d'observation. Représenter alors schématiquement l'allure de $I(x)$.

4 - En utilisant la largeur $a/10$ des deux fentes d'Young, égale à la distance séparant les fentes, estimer la taille de la figure d'interférences sur l'écran et le nombre de franges observables. Qu'observe-t-on réellement sur l'écran ?

Exercice 5 : Interférométrie stellaire

inspiré oraux banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | 🚫

- Différence de marche à l'infini ;
 ➤ Deux sources ponctuelles ;
 ➤ Déphasage à la réflexion.

Le Très Grand Télescope de l'Observatoire européen austral (ESO), en anglais *Very Large Telescope (VLT)*, est un ensemble de quatre télescopes principaux et quatre auxiliaires. Il est situé à l'Observatoire du Cerro Paranal dans le désert d'Atacama, au nord du Chili, à une altitude de 2635 m.

En combinant deux télescopes, il est possible de le faire fonctionner comme un interféromètre. Par un complexe jeu de miroirs et de fibres optique, les ondes issues de l'étoile observée captées par les deux télescopes sont recombinaées dans le laboratoire central de l'installation, où elles interfèrent. L'étude de la figure d'interférences générée donne alors accès à diverses informations sur l'étoile étudiée. Pour faire varier la différence de marche, les deux télescopes peuvent coulisser sur des rails longs de 65 m et rectilignes à mieux que 25 μm , ce qui permet de les séparer d'une distance allant jusqu'à 200 m.

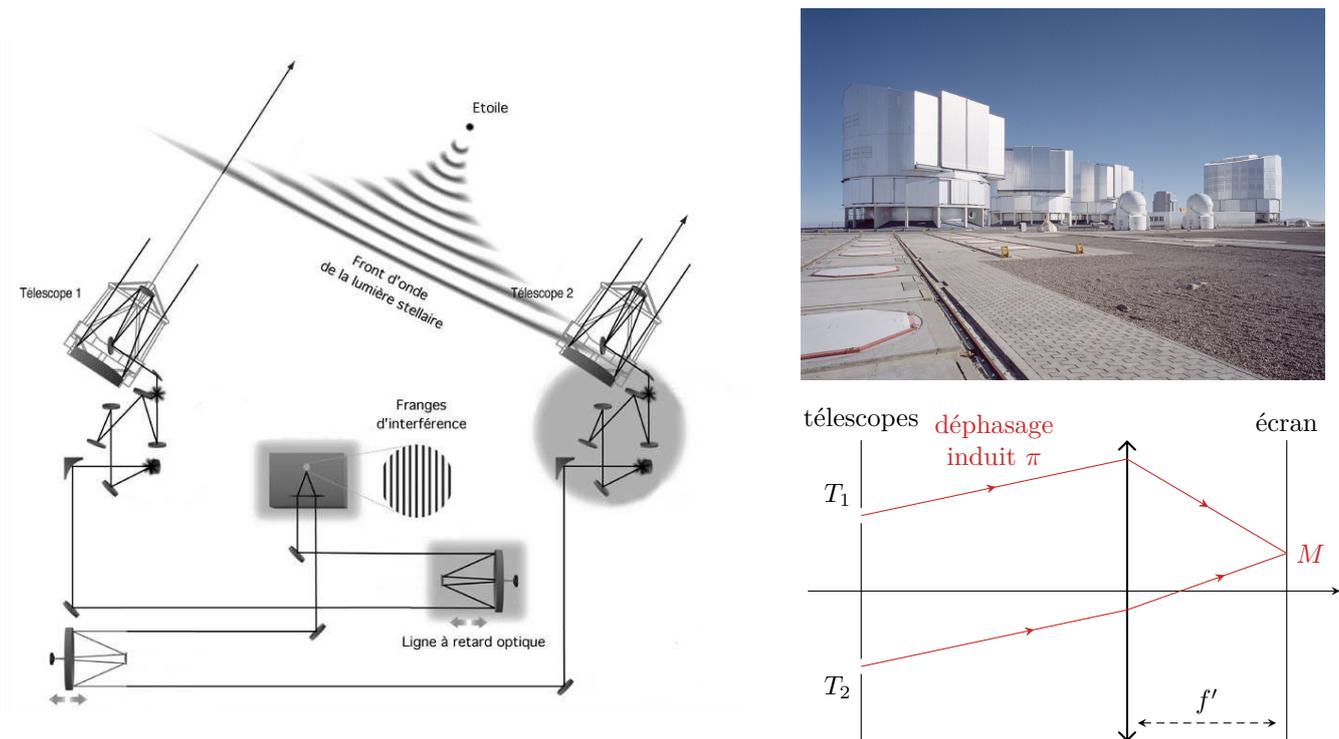


Figure 2 – Schéma de principe et photo du VLT. Figure de gauche extraite de la thèse de Pierre Kervella.

Une modélisation équivalente du dispositif est celle d'un dispositif de trous d'Young, séparés d'une distance a variable, produisant des interférences observées dans le plan focal image d'une lentille équivalente. Les miroirs rencontrés sur le chemin des rayons réels induisent un déphasage additionnel de π entre les deux rayons.

Considérons dans un premier temps que l'interféromètre observe une étoile E_1 ponctuelle située à l'infini sur l'axe optique du montage, qui émet une radiation infra-rouge monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 2,0 \mu\text{m}$.

1 - Les rayons reçus par les deux télescopes sont-ils cohérents ? Montrer que la différence de chemin optique entre les deux rayons s'écrit

$$\delta_1(x) = \frac{ax}{f'} + \frac{\lambda}{2}.$$

2 - En déduire l'intensité en tout point de l'écran, dont on notera I_0 la moyenne.

Cette étoile est en fait l'une des composantes d'une étoile double, c'est-à-dire d'une paire d'étoiles en orbite l'une autour de l'autre. Les étoiles E_1 et E_2 sont supposées identiques, les rayons issus de E_2 arrivant sur l'interféromètre en formant un angle α avec l'axe optique.

3 - Les rayons issus de E_1 et E_2 sont-ils cohérents ? Calculer l'intensité en tout point de l'écran. Commenter.

4 - Proposer une méthode de détermination de l'angle α reposant sur les brouillages de la figure d'interférences. En appliquant cette méthode, quelle serait la limite de résolution angulaire du télescope, c'est-à-dire le plus petit écart α_{\min} qu'il serait en mesure de détecter ?

En pratique, l'instrument donne accès à beaucoup plus d'informations. L'éclairement est mesuré en tout point de l'écran pour différentes valeur de a , et on fait ensuite l'équivalent d'une régression non-linéaire en faisant varier les différents paramètres du modèle (angle α mais aussi diamètre apparent des étoiles, luminosité relative, composition spectrale, etc.) pour trouver les valeurs qui correspondent au mieux aux résultats expérimentaux.

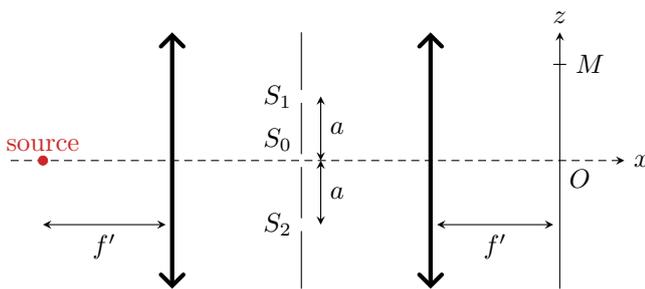
Exercice 6 : Montage à trois fentes d'Young

d'après oraux banque PT | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Différence de marche à l'infini ;
- ▷ Représentation complexe.

Cet exercice a été donné à l'oral de la banque PT sous plusieurs formes, de la plus brutale demandant juste le calcul d'intensité sans aucun guide sur la méthode à suivre (ce qui me semble infaisable!), à la plus détaillée commençant même par des questions de cours sur le système à deux fentes. Je choisis ici un intermédiaire, entrant directement dans la difficulté mais guidé.



Considérons un montage à trois fentes d'Young, séparées d'une distance a . Une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ est placée au foyer objet d'une première lentille, et l'observation est faite sur un écran placé dans le plan focal image d'une seconde lentille.

Les ondes lumineuses sont décrites dans le formalisme complexe, en posant $\underline{s}_0(M) = A_0$ l'amplitude complexe au point M de l'onde ayant traversé la fente S_0 .

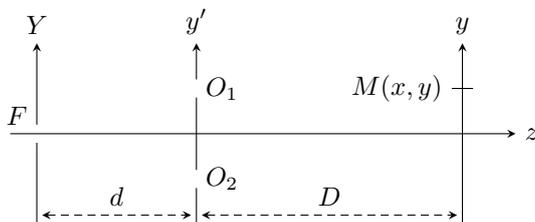
- 1 - Montrer que l'onde issue de S_2 a pour amplitude complexe au point M $\underline{s}_2(M) = A_0 e^{i\varphi(z)}$, avec $\varphi(z)$ à déterminer en fonction des données.
- 2 - En déduire sans calcul l'amplitude complexe $\underline{s}_1(M)$ de l'onde issue de la fente S_1 .
- 3 - Exprimer l'amplitude complexe totale au point M , puis calculer l'intensité $I(M)$ en fonction de φ puis de z .
- 4 - Représenter graphiquement I en fonction de φ . Comparer au cas où le point M serait éclairé par deux fentes d'Young seulement (fente S_0 obstruée).

Exercice 7 : Fentes d'Young éclairées par une fente source

oral CCINP MP | 💡 3 | ✂ 3



- ▷ Influence de l'élargissement de la source.



Considérons le dispositif de fentes d'Young ci-contre, en posant $a = O_1O_2$. On suppose d et D sont très supérieures à a . On considère dans un premier temps la source F ponctuelle.

- 1 - Qu'observe-t-on sur l'écran ?
- 2 - Déterminer l'intensité I en un point M de l'écran.

On considère désormais que F est une fente source comprise entre $Y = -\varepsilon$ et $Y = \varepsilon$. On la modélise comme une juxtaposition de bandes infinitésimales de largeur dY incohérentes les unes avec les autres. Une bande de largeur dY émettant une intensité $dI = \mathcal{I}_Y dY$.

- 3 - Expliquer qualitativement pourquoi on observe un brouillage progressif sur l'écran. Estimer la largeur de cohérence spatiale ε_c à partir de laquelle la figure d'interférences est brouillée.
- 4 - Justifier que l'intensité en un point M de l'écran peut s'écrire sous la forme

$$I(M) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{I}_0 \left[1 + \cos \left\{ \frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{Y}{d} \right) \right\} \right] dY$$

- 5 - Procéder au calcul. Identifier un terme d'interférences et un facteur de contraste.
- 6 - Quelle est la première valeur de ε pour laquelle il y a brouillage ?

Donnée : $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

Réseaux

Exercice 8 : Spectrométrie à réseau

oral banque PT | 💡 1 | ✂ 1 | Ⓜ



- ▷ Résultats expérimentaux ;
- ▷ Formule des réseaux.

On souhaite déterminer la longueur d'onde λ de la raie du cadmium avec un réseau comptant $n = 500$ traits par millimètre.

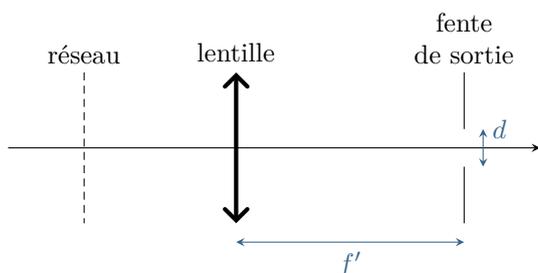
- 1 - Décrire un montage expérimental simple pour trouver cette longueur d'onde.
- 2 - Établir la formule des réseaux.
- 3 - On se place en incidence normale. On observe l'ordre -2 et l'ordre 2 séparés d'un angle $\alpha = 61^\circ 9'$, où $1' = 1/60^\circ$. Déterminer λ .

Exercice 9 : Monochromateur à réseau

💡 2 | ✂ 2



- ▷ Formule des réseaux ;
- ▷ Lentille convergente.



Un monochromateur à réseau est un dispositif optique permettant de produire une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 réglable à partir d'une radiation polychromatique. On les retrouve par exemple dans tous les spectromètres destinés à l'identification d'espèces chimiques. Pour des raisons pratiques la plupart des monochromateurs utilisent des réseaux par réflexion, qui maximisent l'intensité lumineuse en sortie. Nous allons en étudier le principe sur le modèle simplifié représenté ci-contre, reposant sur un réseau par transmission.

Un réseau en transmission à $n = 500$ traits par millimètre est éclairé en éclairage parallèle par une source de lumière blanche non représentée sur le schéma. Les rayons incidents et émergents forment respectivement des angles i_0 et i avec l'axe optique orthogonal au réseau. On cherche à isoler la longueur d'onde $\lambda_0 = 500$ nm.

- 1 - On souhaite observer l'ordre 2 sur l'axe optique pour la longueur d'onde λ_0 à isoler. En déduire l'inclinaison i_0 à donner à la source.
- 2 - Considérons un rayon de longueur d'onde $\lambda_0 + \delta\lambda$ avec $\delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer l'angle i avec lequel il émerge du réseau. En déduire la dispersion angulaire du réseau au voisinage de λ_0 , qui s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{nm}^{-1}$.

En sortie du réseau se trouvent une lentille convergente et une fente de sortie de largeur d située dans le plan focal image de la lentille.

- 3 - Déterminer les angles en sortie du réseau des rayons passant par les deux extrémités de la lentille. En déduire la résolution $\Delta\lambda$ du monochromateur, c'est-à-dire la largeur spectrale du faisceau de sortie.
- 4 - Comment choisir la largeur de la fente de sortie pour obtenir la radiation la plus pure possible ? En pratique, un compromis est à trouver : expliquer.
- 5 - Comment choisir la distance focale de la lentille pour obtenir la radiation la plus pure possible ?

Exercice 10 : Étalonnage d'un réseau

oral Mines Télécom MP | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Résultats expérimentaux ;
- ▷ Réseau optique.

Un réseau est éclairé en incidence quasi-normale par une source de longueur d'onde $\lambda = 435$ nm. On lit sur le vernier d'un goniomètre la position de la lunette pour différents ordres.

p	-2	-1	1	2
α_p	$23^\circ 23'$	$42^\circ 38'$	$77^\circ 20'$	$96^\circ 40'$

- 1 - Rappeler la formule des réseaux et l'expliquer qualitativement.
- 2 - Le réseau est-il bien éclairé en incidence normale ?
- 3 - Calculer le pas du réseau et le nombre de traits par millimètre.
- 4 - On éclaire le réseau en incidence normale par une source de longueur d'onde λ' . Pour l'ordre 2 on relève $\alpha'_2 = 108^\circ 30'$. Déterminer λ' .

Exercice 11 : Réseau linéaire d'antennes

💡 2 | ✂ 3

 \triangleright Interférences à N ondes ;
 \triangleright Représentation complexe.

De nombreuses utilisations des ondes électromagnétiques demandent une bonne directivité : télécommunications, radar, radioastronomie, etc. Pour l'obtenir, on peut notamment associer plusieurs antennes élémentaires en réseau, ce qui est préférable à une antenne unique dont le rayonnement est très peu directif. C'est ce qu'exploitent par exemple les antennes de télévision en « rateau », mais pour la réception. Des dispositifs analogues avec les ondes acoustiques sont utilisés dans les sondes d'échographie.

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle simplifié de réseau linéaire de N antennes indicées de 0 à $N - 1$, séparées d'une distance d , comme schématisé figure 3. En première approche, on suppose que chaque antenne émet un rayonnement de longueur d'onde λ , isotrope dans le plan horizontal, toutes les antennes émettant en phase. On s'intéresse à l'onde totale en un point M , situé à grande distance du réseau, dans une direction formant un angle θ avec la normale au réseau. L'onde issue de l'antenne de référence 0 est prise comme référence :

$$s_0(M, t) = A e^{i\omega t}.$$

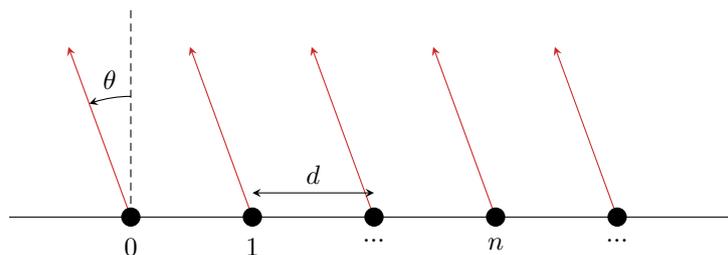


Figure 3 – Réseau d'antennes linéaire.

- 1 - Montrer que le déphasage ϕ_1 entre l'onde 0 et l'onde 1 au point M vaut

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

En déduire sans calcul le déphasage entre l'onde 0 et l'onde n au point M .

- 2 - Montrer que l'amplitude totale au point M est donnée par

$$s(M, t) = A e^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}.$$

En déduire l'intensité correspondante.

- 3 - Déterminer les directions dans lesquelles se trouvent les maxima d'intensité émis par le réseau d'antenne. Comment choisir d pour n'avoir qu'un unique maximum ? On supposera pour la suite $d = \lambda/2$.

Donnée : la fonction $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{\sin x}$ est maximale pour $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$, et est alors égale à a .

- 4 - Pour un réseau de N antennes, que vaut l'intensité au niveau d'un maximum ? Déterminer la largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic de rayonnement correspondant, définie comme l'écart angulaire entre les deux annulations d'intensité de part et d'autre du maximum. Commenter l'influence du nombre d'antennes formant le réseau.

- 5 - Pour contrôler la direction du maximum de rayonnement, les ondes émises par les antennes peuvent être déphasées : outre le déphasage géométrique précédemment discuté, le champ émis par deux antennes successives est déphasé de $\psi = \text{cte}$. Déterminer l'angle auquel se trouve le maximum d'intensité.