

Ondes électromagnétiques et milieux conducteurs

En pratique, très peu des résultats de ce cours sont à connaître par cœur : ils seront toujours à redémontrer.

I - Absorption par un conducteur ohmique

- **Loi d'Ohm locale** : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\gamma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ tant que $f \lesssim 10^{13} \text{ Hz}$.
- **Conséquence 1 : le métal est localement neutre.** Conservation de la charge + loi d'Ohm + éq de Maxwell-Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \right) \underline{\rho} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\rho} = 0.$$

- **Conséquence 2 : le courant de déplacement est négligeable.**

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|} \sim \frac{\gamma \|\vec{E}\|}{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \gg 1$$

- **Équation de propagation** : même méthode que dans le vide.

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Ce n'est pas l'équation de d'Alembert, mais une équation de diffusion. Parler de célérité n'a plus de sens.

- **Pseudo-OPPH** : la relation de dispersion est complexe.

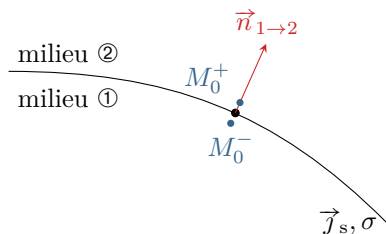
$$k = \pm \frac{1 - i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (\text{épaisseur de peau})$$

Pour un métal occupant le demi-espace $x > 0$,

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{amortissement}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right)}_{\text{propagation}} \vec{e}_y$$

L'épaisseur de peau est la distance caractéristique d'absorption de l'onde par le conducteur.

II - Réflexion sur un conducteur parfait



- **Relations de passage** : au voisinage d'un point M_0 de l'interface,

$$\begin{cases} \vec{E}_2(M_0^+, t) - \vec{E}_1(M_0^-, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M_0^+, t) - \vec{B}_1(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

avec σ et $\vec{j}_s$ les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, et $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ les champs dans les milieux ① et ②.

Exemple : conducteur parfait situé en $x > 0$, dans lequel les champs sont nuls :

$$\begin{cases} \vec{0} - \left(\vec{E}_i(x=0^-, t) + \vec{E}_r(x=0^-, t) \right) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \\ \vec{0} - \left(\vec{B}_i(x=0^-, t) + \vec{B}_r(x=0^-, t) \right) = \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{e}_x \end{cases}$$

*** **Attention !** La relation de passage ne s'applique QUE sur l'interface, et PAS pour un x quelconque.

- **Propriétés de l'onde réfléchie** : suivre l'énoncé pour poser les calculs.
 - ▷ on la cherche de même pulsation que l'onde incidente et se propageant en sens inverse (mais de polarisation éventuellement différente) ;
 - ▷ on démontre à partir des relations de passage qu'elle est de même amplitude et même polarisation que l'onde incidente, mais en opposition de phase.
- **Structure de l'onde totale** : c'est une onde stationnaire (x et t interviennent dans des fonctions séparées, et plus du tout sous la forme $\omega t \pm kx$), avec un nœud de champ électrique sur l'interface.
- **Champ magnétique** : 🚫🚫🚫 **Attention !** La relation de structure ne s'applique pas à une onde stationnaire.
 - ▷ *Méthode 1* : utiliser l'équation de Maxwell-Faraday ;
 - ▷ *Méthode 2* : appliquer la relation de structure à l'onde incidente et l'onde réfléchie séparément, puis sommer.

III - Confinement entre deux plans conducteurs

Les ondes dans la cavité électromagnétique sont forcément des ondes stationnaires, qui doivent vérifier l'équation de d'Alembert et les deux conditions aux limites.

- **Modes propres** : ondes stationnaires harmoniques dans un milieu de taille finie, que l'on cherche sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = f(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y.$$

- **Conséquence de l'équation de d'Alembert** : en injectant, on obtient

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

donc solution de type $A \sin(kx) + A' \cos(kx)$.

- **Conséquence des conditions aux limites** :

$$\begin{cases} A' = 0 \\ k = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \iff L = n \frac{\lambda}{2} \quad \rightsquigarrow \text{mode propre d'ordre } n.$$

- **Superposition de modes propres** : toute onde dans la cavité est une combinaison linéaire des modes propres.

Synthèse : quelles relations pour quelles ondes ?

Expressions pour une onde plane le long de l'axe (Ox) et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$.

	Expression mathématique	Rel. dispersion	Relation de structure
Onde plane quelconque	$\vec{E}(x, t) = [f(x - ct) + g(x + ct)] \vec{e}_y$	✗	✗
Onde plane progressive	$\vec{E}(x, t) = f(x \pm ct) \vec{e}_z$	✗	$\vec{B} = \mp \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c}$
Onde plane progressive harmonique	$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_y$ $\iff \vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t \pm kx)} \vec{e}_y$	$\omega = kc$	$\vec{B} = \mp \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$
Onde plane stationnaire quelconque	$\vec{E}(x, t) = f(x) g(t) \vec{e}_y$	✗	✗
Onde plane stationnaire harmonique	$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$ $\iff \vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 \sin(kx + \psi) e^{i\omega t} \vec{e}_y$	$\omega = kc$	✗

- ▷ La relation de dispersion n'existe que pour les ondes harmoniques ;
- ▷ La relation de structure n'existe que pour les ondes planes progressives ;
- ▷ Ces relations ne sont valables que dans le vide, mais pas dans les conducteurs (la relation de structure se généralise avec $\underline{k}$ complexe, mais pas la relation de dispersion).