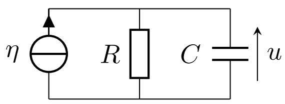
Régimes transitoires du premier ordre

Exercices d'électronique

Exercice 1 : Circuit RC soumis à un échelon de courant [♦◊◊]

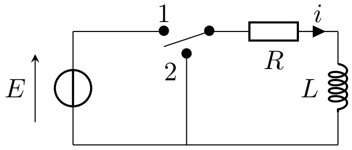


La source idéale de courant du circuit ci-contre impose un échelon,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ I_0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension u pour $t > 0$.

Exercice 2 : Régime libre d'un circuit RL série [♦◊◊]



On branche en série un générateur de f.e.m. $E = 5\,\mathrm{V}$, un interrupteur trois positions, un résistor de résistance $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et une bobine d'inductance $L = 100\,\mathrm{mH}$. À l'instant $t = 0$, on passe l'interrupteur de la position 1 à la position 2.

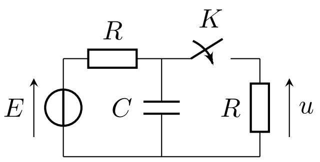
1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i parcourant la bobine.

2 - Indiquer sans calcul si le régime permanent est atteint au bout de $10\,\mathrm{\mu s}$, $200\,\mathrm{\mu s}$ et $20\,\mathrm{ms}$.

3 - La résoudre après avoir déterminé les conditions initiales. Tracer l'allure du courant $i(t)$.

4 - Montrer que l'énergie initialement stockée dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Exercice 3 : Circuit RC à deux mailles [♦♦◊]

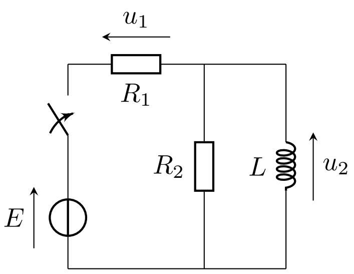


Considérons le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur K est brusquement fermé. Le générateur est une source idéale de tension.

Trouver l'expression de la tension u et tracer son allure.

Remarque : le corrigé est très guidé, exercice à travailler seul pour s'entraîner.

Exercice 4 : Circuit RL à deux mailles [♦♦◊]



Considérons le circuit ci-contre, dans lequel l'interrupteur, ouvert depuis très longtemps, est fermé à $t = 0$. Le générateur est supposé idéal.

1 - Régime permanent. Déterminer les valeurs asymptotiques de u_1 et u_2 en régime permanent.

2 - Équation différentielle et portrait de phase.
2.a **-** Établir l'équation différentielle vérifiée par u_2 pour $t > 0$.
2.b **-** Tracer le portrait de phase, représentant $\mathrm{d}u_2/\mathrm{d}t$ en fonction de u_2.
2.c **-** Retrouver à partir du portrait de phase la valeur asymptotique de u_2.

3 - Résolution de l'équation différentielle.
3.a **-** Déterminer les valeurs à $t = 0^-$ et $t = 0^+$ des tensions u_1 et u_2.
3.b **-** Résoudre l'équation différentielle pour obtenir l'expression de $u_2(t > 0)$.
3.c **-** Tracer l'allure de $u_2(t)$. Identifier sur la courbe le régime transitoire et le régime permanent.

4 - Temps d'amortissement du régime transitoire.
4.a **-** Calculer le temps t_{10} au bout duquel la tension u_2 est divisée par 10.
4.b **-** Proposer une méthode expérimentale pour déterminer t_{10} à l'aide d'un oscilloscope. Préciser le montage à utiliser et le détail de la méthode de mesure.
4.c **-** On mesure $t_{10} = 3{,}0\,\mathrm{ms}$ pour $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 5{,}0 \cdot 10^2\,\Omega$. En déduire (sans calculatrice) la valeur de L, sachant que $1/\ln 10 \simeq 0{,}43$.

5 - Observation expérimentale. On remplace le générateur de tension continue et l'interrupteur par un générateur

Étienne Thibierge, 12 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

délivrant un signal créneau de période T. Quelle fréquence choisir pour pouvoir mesurer t_{10} par la méthode décrite ci-dessus ?

Exercice 5 : Résistance de fuite d'un condensateur [♦♦♦]

On démonte d'un circuit un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{pF}$ initialement chargé sous une tension de $E = 10\,\mathrm{V}$ et on le laisse posé sur la paillasse. Au bout de deux minutes de minutes, la tension aux bornes du condensateur ne vaut plus que $1\,\mathrm{V}$.

1 - Proposer une origine à cette décharge spontanée du condensateur.

2 - Justifier qualitativement qu'un condensateur se déchargeant spontanément peut se modéliser par l'ajout d'une résistance en parallèle d'un condensateur idéal. Cette résistance, notée R_f, est appelée résistance de fuite ou résistance d'isolation du condensateur.

3 - Calculer numériquement (mais sans calculatrice !) l'ordre de grandeur de la résistance de fuite du condensateur considéré. On donne $\ln(10) \simeq 2{,}3$.

Exercice 6 : Bilan de puissance du régime libre d'un circuit RC série [♦♦♦]

Considérons un circuit RC en régime libre, formé d'un condensateur de capacité C initialement chargé se déchargeant dans une résistance R. Aucun générateur n'alimente le circuit.

1 - Démontrer par l'intermédiaire d'un bilan de puissance l'expressionde l'énergie stockée dans un condensateur.

2 - Déduire d'un bilan d'énergie appliqué au circuit pendant un petit intervalle de temps δt que l'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée par le condensateur et la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ dissipée par effet Joule sont reliées par

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_\mathrm{J}\,.$$

3 - Écrire ce bilan sous la forme d'une équation différentielle portant sur la tension u aux bornes du condensateur.

4 - Montrer que cette équation différentielle, obtenue par un bilan énergétique, peut bel et bien s'écrire comme l'équation différentielle obtenue par la loi des mailles.

5 - En partant de l'équation différentielle obtenue à la question 3, obtenir une équation différentielle portant sur l'énergie $\mathcal{E}_C$.

6 - Déduire de cette équation le temps τ_e caractéristique des échanges d'énergie dans le système. Retrouver ce résultat en partant directement de l'expression de $\mathcal{E}_C$ et de la solution $u(t)$ établie en cours pour ce circuit.

Exercices de mécanique

Exercice 7 : La partie immergée de l'iceberg [♦◊◊]

Considérons un iceberg de volume V dont une partie de volume V_i est immergée dans la mer.

Données : masse volumique de l'eau salée liquide $\rho_\mathrm{liq} = 1{,}02 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de la glace $\rho_\mathrm{gl} = 0{,}92 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Exprimer la poussée d'Archimède et la force de pesanteur qui s'appliquent sur l'iceberg. En déduire la proportion du volume de l'iceberg à être immergée.

Exercice 8 : Bulles de champagne [inspiré Concours Général des lycées 2016, ♦♦◊]

L'objectif de l'exercice est d'étudier la remontée des bulles dans le champagne, liquide de masse volumique $\rho_\mathrm{liq} \simeq 1\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Les bulles sont constituées de CO_2 à la pression $p \simeq 1\,\mathrm{bar}$. La force $\vec{f}$ exercée par le champagne sur la bulle est modélisée par la relation de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\,\vec{v}\,,$$

où $\eta \sim 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$ est la viscosité du champagne, $r \simeq 1\,\mathrm{mm}$ le rayon de la bulle et $\vec{v}$ la vitesse de la bulle. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, auquel on adjoint un repère d'espace $(O, \vec{e}_z)$ vertical vers le haut.

1 - Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v_z de la vitesse de la bulle sur l'axe z et l'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_\mathrm{lim}}{\tau}\,.$$

Exprimer les paramètres v_{lim} et τ en fonction des masses volumiques ρ_{liq} et ρ_{gaz}, et de η, g et r.

3 - Résoudre cette équation différentielle et représenter l'allure de v_z au cours du temps. Indiquer v_{lim} et τ sur la courbe et donner leur interprétation physique.

4 - Calculer numériquement τ. Quelle approximation peut-on effectuer sur l'expression de v_z ?

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'Œnologie de Reims est présentée ci-dessous. Ils ont photographié un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec le flash d'un stroboscope qui émet des éclairs régulièrement espacés à la fréquence f_{b}. Un écran diffusant est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Un schéma du dispositif et un exemple de cliché obtenu est représenté figure 1.

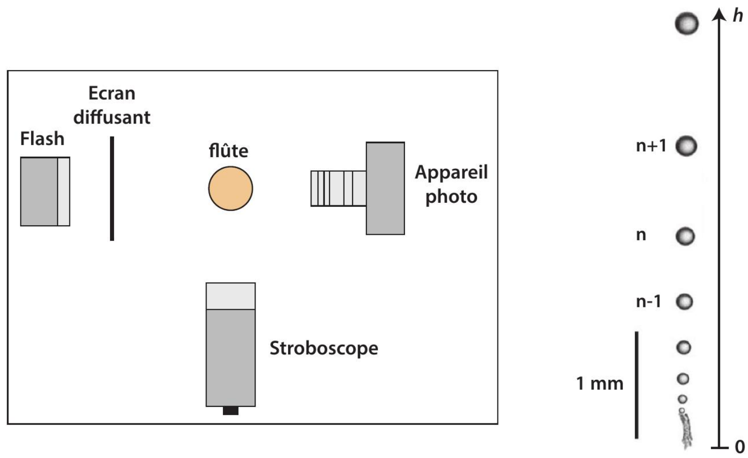


Figure 1 – **Dispositif expérimental pour l'étude de la remontée des bulles de champagne.**

5 - Expliquer en quoi un choix judicieux de la fréquence f_{b} permet d'avoir accès, en un seul cliché, à une succession de positions occupées par une bulle ?

6 - Le cliché précédent a été pris avec $f_{\text{b}} = 20\,\text{Hz}$. Justifier que la vitesse v_n d'une bulle indicée n peut être évaluée par

$$v_n = f_{\text{b}} \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2}$$

où h_{n+1} et h_{n-1} représentent respectivement les altitudes des bulles indicées $n+1$ et $n-1$. Effectuer l'application numérique pour la bulle indicée n sur la figure 1.

7 - L'allure des positions des bulles sur la photographie est-elle en accord avec l'hypothèse formulée question 4 ? Expliquer.

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse en fonction du rayon, comme représenté figure 2.

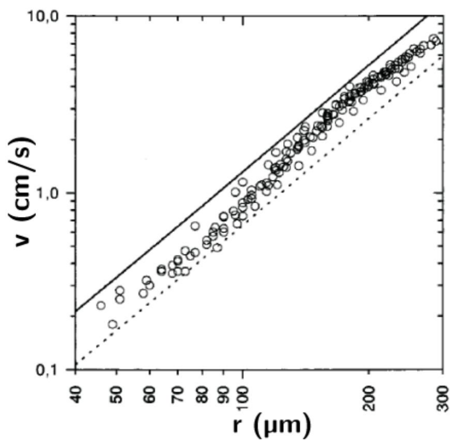
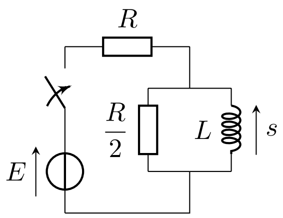


Figure 2 – **Vitesse de remontée de la bulle en fonction du rayon.**

8 - Montrer que $\log v_{\text{lim}} = A + 2 \log r$, où A est une constante et log la fonction logarithme décimal. Justifier que cette expression est cohérente avec la figure.

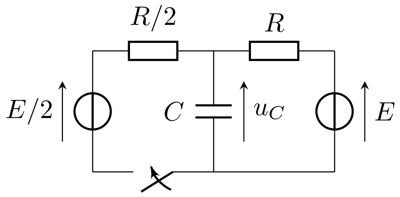
Annales de concours

Exercice 9 : Circuit RL à deux mailles [oral Mines-Télécom, ♦♦♢]



L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Étudier l'évolution de $s(t)$ et tracer sa courbe.

Exercice 10 : Condensateur alimenté par deux générateurs [oral CCP, ♦♦♢]



Dans le montage ci-contre, l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C.

2 - Résoudre cette équation.

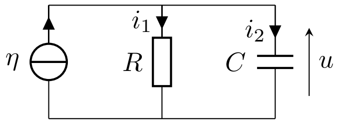
3 - Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à 1 % près.

4 - Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.

Régimes transitoires du premier ordre

Exercices d'électronique

Exercice 1 : Circuit RC soumis à un échelon de courant



Équation différentielle vérifiée par u. D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_1 + i_2$$

D'après les lois de comportement, et comme R et C sont montés en parallèle,

$$I_0 = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,.$$

On a alors l'équation différentielle cherchée, qu'on écrit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{I_0}{C} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.}$$

Forme générale des solutions.

▷ Solution particulière. Comme le forçage I_0 est constant, alors la solution particulière U_∞, qui décrit le régime permanent, est constante également. D'après l'équation différentielle,

$$0 + \frac{1}{\tau}U_\infty = \frac{I_0}{C} \qquad \text{d'où} \qquad U_\infty = \frac{I_0\tau}{C} \qquad \text{soit} \qquad U_\infty = RI_0$$

On vérifie que c'est cohérent avec l'analyse par circuits équivalents : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_2 = 0$ et $i_1 = I_0$, d'où $U_\infty = RI_0$.

▷ Solution homogène : $u_\mathrm{H}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + RI_0\,.$$

Condition initiale. Raisonnons d'abord sur le circuit équivalent à $t = 0^-$: comme $\eta(0^-) = 0$ alors $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$, et d'après la loi d'Ohm

$$u(0^-) = Ri_1(0^-) = 0\,.$$

Comme u est également la tension aux bornes d'un condensateur, alors elle est forcément continue, donc

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,.$$

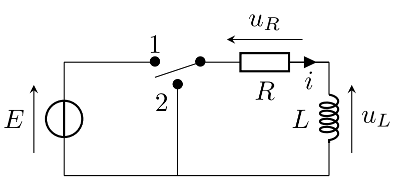
Constante d'intégration.

$$u(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + RI_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{donc} \qquad A = -RI_0$$

Conclusion

$$\boxed{u(t) = RI_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Exercice 2 : Régime libre d'un circuit RL série



1 Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par i à $t > 0$, c'est-à-dire lorsque l'interrupteur est sur la position 2. D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_L = 0\,.$$

En utilisant les lois de comportement (dipôles en convention récepteur),

$$R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\, i = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}\,.}$$

2 Compte tenu de la valeur de τ, **le régime permanent ne sera atteint ni au bout de 10 µs, ni de 200 µs** (2τ n'est pas suffisant, il faut au moins 5τ). En revanche **il le sera au bout de 20 ms.**

3 **Forme générale des solutions :** Cette équation différentielle est homogène. Ses solutions s'écrivent sous la forme

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

où A se détermine à partir des conditions initiales.

Condition initiale : Cherchons $i(0^+)$. À l'instant $t = 0^-$, l'interrupteur est en position 1 et le régime est permanent continu. Comme la bobine est équivalente à un fil, le circuit est équivalent à une résistance R branché au générateur de f.é.m. E. D'après la loi d'Ohm, le courant dans le circuit vaut

$$i(0^-) = \frac{E}{R}\,.$$

Comme le courant dans une bobine doit être continu, on en déduit $i(0^+) = E/R$ également.

Détermination de la constante d'intégration : D'après la forme générale de la solution, $i(0^+) = A\,\mathrm{e}^{-0/\tau}$, et par identification avec la condition initiale on déduit $A = E/R$. Finalement,

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

4 À l'instant initial, $i = E/R$, et l'énergie stockée dans la bobine vaut

$$\mathcal{E}_L(0) = \frac{1}{2}\,L\,i^2 = \frac{1}{2}\,L\,\frac{E^2}{R^2}\,.$$

À l'instant final, $i = 0$ (se voit ou bien en considérant le circuit équivalent en régime permanent, ou bien en prenant la solution dans la limite $t \to \infty$), donc

$$\mathcal{E}_L(\infty) = 0\,.$$

Ainsi, la variation d'énergie dans la bobine vaut

$$\Delta\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_L(\infty) - \mathcal{E}_L(0) = -\frac{L\,E^2}{2\,R^2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance entre $t = 0$ et la fin de l'évolution vaut

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^\infty P_\mathrm{J}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty R\,i(t)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

où P_J est la puissance dissipée par effet Joule à l'instant t. En utilisant l'expression de $i(t)$ établie précédemment,

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^\infty R\,\frac{E^2}{R^2}\;\mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E^2\tau}{2R}$$

Comme $\tau = L/R$, on en déduit

$$\boxed{Q_\mathrm{J} = \frac{L\,E^2}{2\,R^2} = -\Delta\mathcal{E}_L\,.}$$

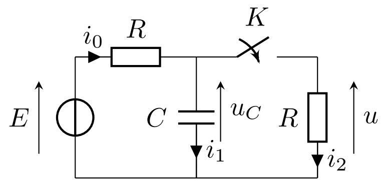
Ce bilan traduit bien que l'énergie libérée par la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Exercice 3 : Circuit RC à deux mailles

> *La solution est nettement plus rédigée que nécessaire, afin de vous guider dans la démarche.*

Trouver l'expression de u passe forcément par l'obtention d'une équation différentielle et sa résolution. La méthode étant très systématique, un exercice plus guidé que celui-là est rare. On note $t = 0$ l'instant de fermeture de l'interrupteur K.

1 Obtention de l'équation différentielle :



Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$, où l'interrupteur est fermé. Comme le circuit compte deux mailles, il faudra utiliser deux lois de Kirchoff, mais l'ordre dans lequel on les utilise importe peu. D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$E = R\, i_0 + u\,.$$

D'après la loi des nœuds,

$$i_0 = i_1 + i_2 = i_0 + \frac{u}{R}$$

Ainsi,

$$E = (R\, i_1 + u) + u\,.$$

En utilisant la loi de comportement du condensateur et le fait qu'à $t > 0$, $u_C = u$ on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u(t > 0)$.

$$\boxed{E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u = \frac{E}{2\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{RC}{2}\,.}$$

2 Forme générale des solutions :

La forme générale d'une solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$u_\mathrm{h}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante. Pour trouver une solution particulière, on la cherche de même forme que le forçage E qui est constant. On voit sur l'équation différentielle que la fonction constante

$$u_\mathrm{p}(t) = \frac{E}{2}\,.$$

convient, et on peut vérifier par équivalence de circuits que u_p correspond bien au régime permanent asymptotique (dans cette limite, on a un diviseur de tension). Ainsi, toute solution de l'équation différentielle complète s'écrit

$$u(t) = u_\mathrm{h}(t) + u_\mathrm{p}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{2}\,.$$

où A est une constante. Trouver *la* solution au problème physique qui nous intéresse consiste à trouver A, ce qui se fait par l'intermédiaire d'une condition initiale $u(0^+)$.

3 Détermination d'une condition initiale :

Comme, pour $t > 0$, $u_C = u$ alors à l'instant initial $u(0^+) = u_C(0^+)$. Par conséquent, $u(0^+) = u_C(0^-)$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue. Mais attention : $u(0^+) \neq u(0^-)$ car la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert n'est pas nulle ! Déterminons donc $u_C(0^-)$. Remarquons pour cela qu'à $t < 0$, $i_1 = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert) et $i_2 = 0$ (vrai interrupteur ouvert), et donc d'après la loi des nœuds $i_0 = i_1 + i_2 = 0$. La loi des mailles s'écrit alors à $t = 0^-$

$$E = 0 + u_C(0^-)\,.$$

Finalement, on en déduit la condition initiale cherchée,

$$u(0^+) = E\,.$$

4 Détermination de la constante :

> *Attention ! Une erreur classique consiste à oublier la solution particulière dans la détermination de A. Rappelons que les conditions initiales impliquent le circuit complet, et se déterminent donc sur la solution complète.*

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{E}{2} \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{2}\,.$$

5 **Conclusion :** On en déduit finalement l'expression cherchée

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Le chronogramme est représenté figure 3.

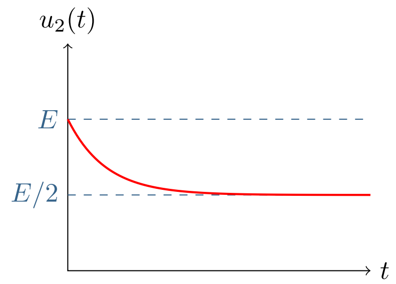


Figure 3 – Chronogramme de la tension $u(t)$.

Exercice 4 : Circuit RL à deux mailles

1.a En régime permanent, la bobine est analogue à un fil donc la tension à ses bornes est nulle,

$$\boxed{u_2(\infty) = 0\,.}$$

On déduit alors directement de la loi des mailles que

$$\boxed{u_1(\infty) = E\,.}$$

2.a Le circuit compte deux mailles, il faut donc a priori exploiter deux lois de Kirchoff. La loi des mailles donne

$$E = u_1 + u_2\,,$$

alors que la loi des nœuds donne avec les notations de la question précédente

$$i_1 = i_2 + i_L\,.$$

L'équation différentielle doit porter sur u_2 : il faut donc exprimer u_1 en fonction de u_2 puis injecter le résultat dans la loi des mailles. D'après la loi d'Ohm puis en utilisant la loi des nœuds,

$$u_1 = R_1\,i_1 = R_1\,(i_2 + i_L)\,.$$

Cherchons maintenant à exprimer i_2 et i_L en fonction de u_2 par des lois de comportement. Comme celle d'une bobine implique *la dérivée* du courant la traversant, on dérive l'expression trouvée pour u_1 avant d'utiliser les lois de comportement, d'où

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = R_1\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right) = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}u_2\right)$$

Comme ce résutat implique $\mathrm{d}u_1/\mathrm{d}t$, il faut à dériver la loi des mailles par rapport au temps avant de l'y injecter, d'où

$$0 = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}u_2\right) + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

L'équation différentielle s'écrit finalement

$$\boxed{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{R_1}{L}u_2=0}$$

soit, en l'écrivant sous forme canonique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}\,u_2=0 \qquad \text{avec} \qquad \tau=\frac{R_1+R_2}{R_1\,R_2}\,L\,.}$$

2.b Le portrait de phase est une droite d'équation $y=-x/\tau$, c'est-à-dire une droite de pente $-1/\tau$ passant par l'origine, voir figure 4. La position initiale se trouve à partir de la condition initiale déterminée précédemment.

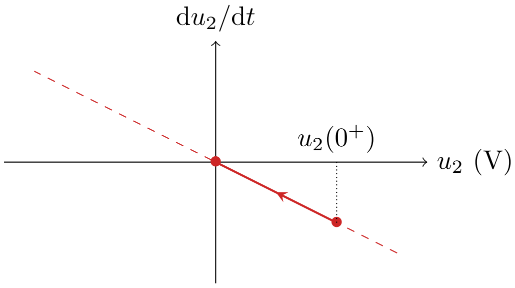


Figure 4 – Portrait de phase de la tension $u_2(t)$.

2.c La position asymptotique est atteinte lorsque $\mathrm{d}u_2/\mathrm{d}t=0$, ce qui correspond à $u_2(\infty)=0$, conformément au résultat de la question 1.

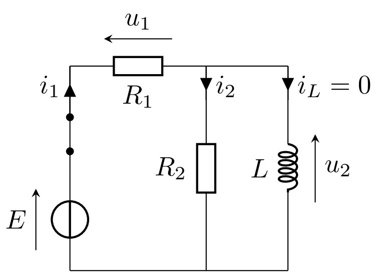
3.a À $t=0^-$, la résistance R_1 se trouve dans une branche ouverte et n'est donc traversée par aucun courant, donc

$$\boxed{u_1(0^-)=0\,.}$$

En régime continu, une bobine est équivalente à un fil, d'où

$$\boxed{u_2(0^-)=0\,.}$$

À $t=0^-$, il n'y a aucune source connectée au circuit dans une maille : tous les courants sont donc nuls.



Le circuit équivalent à $t=0^+$ est représenté ci-contre. D'après la loi des nœuds et par continuité de i_L, $i_1=i_2$. D'après la loi des mailles,

$$E=R_1\,i_1+R_2\,i_2 \qquad \text{d'où} \qquad i_1=i_2=\frac{E}{R_1+R_2}\,.$$

Comme $u_1=R_1\,i_1$ et que $u_2=R_2\,i_2$ (R_2 et L sont montées en parallèle), alors

$$\boxed{u_1(0^+)=\frac{R_1}{R_1+R_2}E \qquad \text{et} \qquad u_2(0^+)=\frac{R_2}{R_1+R_2}E\,.}$$

3.b L'équation différentielle obtenue est une équation homogène : il n'y a pas de solution particulière à chercher (ou, de façon équivalente, la solution particulière est $u_2(t)=0$). On en déduit que la solution se met sous la forme

$$u_2(t)=A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

avec A une constante à déterminer à partir des conditions initiales. Comme on a montré précédemment que

$$u_2(0^+)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,E$$

et comme $u_2(0^+)=A$, alors on en déduit

$$A=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,E \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_2(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

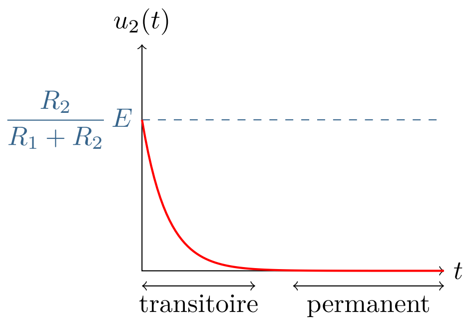


Figure 5 – Chronogramme de la tension $u_2(t)$.

3.c Voir figure 5.

4.a On cherche t_{10} tel que $u_2(t_{10}) = u_2(0^+)/10$, c'est-à-dire

$$\frac{R_2}{R_1+R_2}\,E\,\mathrm{e}^{-t_{10}/\tau} = \frac{1}{10}\frac{R_2}{R_1+R_2}\,E$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{-t_{10}/\tau} = \frac{1}{10} \qquad \text{soit} \qquad -\frac{t_{10}}{\tau} = \ln\frac{1}{10} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t_{10} = \tau\,\ln 10\,.}$$

4.b On utilise un oscilloscope pour mesurer $u_2(t)$, la masse de l'oscilloscope devant être commune à la masse du GBF imposant E. À l'aide des curseurs verticaux (donc lignes horizontales), on repère sur l'écran la valeur initiale $u_2(0^+)$ et la valeur $u_2(t_{10}) = u_2(0^+)/10$. À l'aide de curseurs horizontaux (donc lignes verticales) on repère ensuite les instants auxquels le chronogramme $u_2(t)$ croise ces deux curseurs. Le temps t_{10} est égal à la différence de position des deux curseurs temporels.

4.c D'après les questions précédentes et pour $R_1 = 2R_2$,

$$t_{10} = \tau\,\ln 10 = \frac{3R_1}{2\,R_1^2}\,L\,\ln 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{L = \frac{2}{3\ln 10}\,R_1\,t_{10} = 0{,}86\,\mathrm{H}\,.}$$

5 Pour pouvoir mesurer t_10 par la méthode décrite ci-dessus, il faut que la période du signal créneau soit bien plus grande que le temps de réponse du circuit, au moins $T > 4\,t_{10}$ soit

$$\boxed{f < \frac{1}{4\,t_{10}} \simeq 10^2\,\mathrm{Hz} = 100\,\mathrm{Hz}\,.}$$

Exercice 5 : Résistance de fuite d'un condensateur

1 Un condensateur est constitué de deux armatures se faisant face séparées par un isolant. Si cet isolant n'est pas parfait, alors des charges peuvent malgré tout parvenir à passer d'une armature à l'autre en traversant l'isolant. Ainsi, **la décharge spontanée est due à l'imperfection de l'isolant du condensateur.**

2 Même imparfait, un condensateur est d'abord et avant tout ... un condensateur : l'élément le plus important de la modélisation est donc un condensateur idéal. Parmi les dipôles modèles « de référence », celui qui permet de modéliser un déplacement de charge au travers d'un milieu pas parfaitement conducteur est une résistance, qui constitue donc le deuxième élément de la modélisation. Reste à savoir comment placer cette résistance. Si elle est montée en série avec le condensateur, alors en régime permanent celui-ci impose son comportement d'interrupteur ouvert et aucun courant ne circule dans la branche où il se trouve : cela ne correspond pas à la situation expérimentale envisagée. On en déduit que **la résistance de fuite doit être placée en parallèle du condensateur** : dans ce cas, même en régime permanent, ce modèle permet de décrire qu'un courant peut traverser le condensateur non-idéal.

3 La situation est équivalente à celle du régime libre de décharge d'un condensateur. La tension aux bornes du condensateur évolue alors selon la loi horaire

$$u(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} U_0 = u(0) \\ \tau = R_\mathrm{f}C \end{cases}$$

Ici, l'énoncé indique qu'à $t_1 = 2\,\text{min} = 120\,\text{s}$, $u(t_1) = U_0/10$ c'est-à-dire

$$\frac{U_0}{10} = U_0\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} \qquad \text{soit} \qquad t_1 = \tau \ln 10$$

On déduit alors de l'expression de τ

$$\boxed{R_\mathrm{f} = \frac{t_1}{C \ln 10} \simeq 5 \cdot 10^8\,\Omega\,.}$$

Exercice 6 : Bilan de puissance du régime libre d'un circuit RC série

1 La puissance reçue par un condensateur orienté en convention générateur vaut

$$\mathcal{P} = u\,i = C\,u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ainsi, l'énergie reçue (et stockée) par le condensateur entre un instant initial $t = 0$ et un instant quelconque t vaut

$$\Delta\mathcal{E}_C = \int_0^t \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t = C \int_0^t u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,C\left[u(t)^2 - u(0)^2\right]$$

On peut alors identifier cette énergie accumulée comme étant la différence entre l'énergie stockée à l'instant t et celle stockée à l'instant 0. On en déduit que l'énergie stockée dans le condensateur ne dépend que de la tension instantanée à ses bornes, et vaut

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\,C\,u^2\,.}$$

2 Comme il n'y a aucun générateur, alors la somme des énergies reçues par le condensateur et la résistance pendant un intervalle de temps infinitésimal δt est nulle,

$$\delta\mathcal{E}_C + \mathcal{P}_\mathrm{J}\,\delta t = 0$$

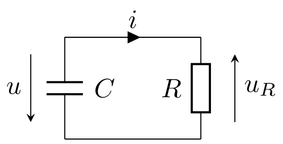
où $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ est la puissance moyenne pendant δt. Ainsi,

$$\frac{\delta\mathcal{E}_C}{\delta t} = -\mathcal{P}_\mathrm{J}$$

et en passant à la limite $\delta t \to 0$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_\mathrm{J}\,.}$$

3 Pour établir l'équation différentielle demandée, il faut exprimer l'énergie stockée dans le condensateur et la puissance dissipée par effet Joule en termes de la tension u. La démonstration passe forcément par un schéma du circuit pour orienter les dipôles et exprimer les puissances avec le signe correct, en revanche le résultat ne dépendra pas de la convention choisie.



La puissance dissipée par effet Joule vaut

$$\mathcal{P}_\mathrm{J} = u_R \times i = \frac{u_R^2}{R} = \frac{u^2}{R}$$

car d'après la loi des mailles $u_R = -u$.

Par ailleurs, comme démontré à la question 1, l'énergie stockée par le condensateur vaut $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\,C\,u^2$. L'équation différentielle s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,C\,u^2\right) + \frac{u^2}{R} = 0\,.}$$

4 Un calcul explicite de la dérivée donne

$$\frac{1}{2}\,C \times 2\,u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u^2}{R} = 0\,,$$

relation qui doit être vérifiée à tout instant. Comme u n'est pas nulle à tout instant, on peut simplifier par u pour obtenir

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\,u = 0\,.}$$

ce qui est bien l'équation différentielle donnée par la loi des mailles.

5 Pour obtenir cette équation différentielle sur $\mathcal{E}_C$, il faut exprimer $\mathcal{P}_J$ en fonction de $\mathcal{E}_C$. Pour cela, remplaçons u^2 dans le membre de droite par $2\mathcal{E}_C/C$,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\mathcal{E}_C}{RC} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{RC}\,\mathcal{E}_C = 0}$$

6 Par analyse de l'équation différentielle, on identifie le temps caractéristique des échanges d'énergie comme valant

$$\boxed{\tau_\mathrm{e} = \frac{RC}{2}\,.}$$

Cela est confirmé par la résolution de l'équation différentielle portant directement sur u, qui dans le cas de la décharge vaut

$$u(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau_u}$$

où U_0 est la tension initiale aux bornes du condensateur et $\tau_u = RC$ le temps caractéristique des variations de tension. En effet, d'après cette expression,

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}\,C\,u^2 = \frac{1}{2}\,C\,E^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau_u} \equiv \mathcal{E}_{C,0}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_\mathrm{e}}\,.$$

Le temps caractéristique de variation de l'énergie dans le condensateur est bien

$$\boxed{\tau_\mathrm{e} = \frac{\tau_u}{2} = \frac{RC}{2}\,.}$$

Exercices de mécanique

Exercice 7 : La partie immergée de l'iceberg

1 Le poids de l'iceberg s'exprime par

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = \rho_\mathrm{gl}V\,\overrightarrow{g}\,,$$

alors que la poussée d'Archimède est donnée par

$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho_\mathrm{liq}V_\mathrm{i}\,\overrightarrow{g}\,.$$

2 Si l'iceberg est à l'équilibre, alors

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0} \qquad \text{donc} \qquad \rho_\mathrm{gl}V - \rho_\mathrm{liq}V_\mathrm{i} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{V_\mathrm{i}}{V} = \frac{\rho_\mathrm{gl}}{\rho_\mathrm{liq}} = 0{,}90}$$

ce qui signifie que 90 % du volume de l'iceberg est immergé.

Exercice 8 : Bulles de champagne [inspiré Concours Général des lycées 2016]

1 Le poids de la bulle de champagne a pour norme

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{gaz}\,g\,.$$

Comme toute la bulle est immergée, la poussée d'Archimède a pour norme

$$\Pi_\mathrm{A} = \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g\,.$$

Ainsi le rapport entre les normes des deux forces vaut

$$\frac{P}{\Pi_\mathrm{A}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{gaz}\,g}{\frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g} = \frac{\rho_\mathrm{gaz}}{\rho_\mathrm{liq}} \sim \frac{1}{1000} \ll 1\,.$$

Le poids de la bulle peut être négligé devant la poussée d'Archimède.

2 ▷ *Système :* bulle, modélisée par un point matériel ;

▷ *Référentiel :* terrestre, considéré galiléen car la remontée de la bulle est rapide ;

▷ *Bilan des forces :*
→ poids de la bulle négligé ;
→ poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_\mathrm{A} = \dfrac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g\,\vec{e}_z$;
→ force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} = -6\pi\eta r v_z\,\vec{e}_z$.

▷ *Application du PFD :*

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Pi}_\mathrm{A} + \vec{f}\,.$$

En projetant sur l'axe Oz,

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g - 6\pi\eta r v_z \\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + 6\pi\eta r v_z &= \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi\eta r}{m}v_z &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g}{m} \end{aligned}$$

On peut alors identifier terme à terme :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta r}{m} \qquad \text{soit} \qquad \tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_\mathrm{gaz}}{6\pi\eta r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\tau = \frac{2r^2\rho_\mathrm{gaz}}{9\eta}}$$

et

$$\frac{v_\mathrm{lim}}{\tau} = \frac{4\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g}{m} \qquad \text{soit} \qquad v_\mathrm{lim} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\,\rho_\mathrm{liq}\,g}{m} \times \frac{m}{6\pi\eta r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{lim} = \frac{2r^2\rho_\mathrm{liq}g}{9\eta}\,.}$$

3 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre : méthode classique !

▷ *Forme générale des solutions :*
→ Solution particulière : le forçage (second membre) est constant, donc la solution particulière aussi, d'où

$$0 + \frac{v_\mathrm{p}}{\tau} = \frac{v_\mathrm{lim}}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad v_\mathrm{p} = v_\mathrm{lim}\,.$$

→ Solution homogène : $v_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
→ Conclusion :

$$v_z = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + v_\mathrm{lim}\,.$$

▷ *Condition initiale :* à sa formation la bulle est sans vitesse, on peut donc considérer $v_z(0) = 0$.

▷ *Détermination de la constante :*

$$v_z(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + v_\mathrm{lim} \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{soit} \qquad A = -v_\mathrm{lim}\,.$$

▷ *Conclusion :*

$$v_z = -v_\mathrm{lim}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + v_\mathrm{lim} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_z = v_\mathrm{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\,.}$$

▷ *Tracé :* voir figure 6. La vitesse v_lim représente la vitesse finale de la bulle atteinte en régime permanent, et τ l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour l'atteindre.

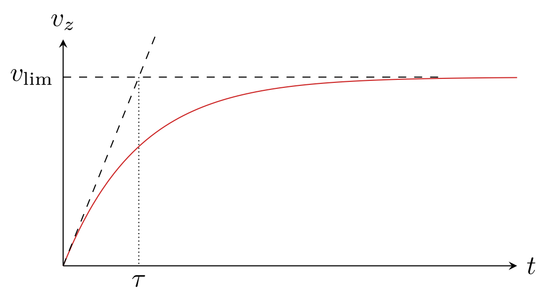


Figure 6 – Vitesse de la bulle de champagne au cours du temps.

$\boxed{4}$ On trouve $\tau \sim 10^{-4}$ s, ce qui est bien plus faible que le temps que met la bulle à remonter dans la flûte, de l'ordre de 1 s. On peut donc **négliger la durée du transitoire** et considérer que la bulle est à tout instant en régime permanent où $v_z = v_{\text{lim}}$.

$\boxed{5}$ Comme l'émission est périodique de période T, choisir $f_\text{b} = 1/T$ permet d'observer une multitude de bulles, mais dont les positions correspondent aux positions successives d'une même bulle espacées temporellement de multiples de T. L'ensemble va apparaître fixe.

$\boxed{6}$ La bulle parcourt la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ en une durée égale à deux périodes $T = 1/f_\text{b}$. Ainsi, en assimilant vitesse moyenne et vitesse instantanée,

$$v_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2/f_\text{b}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_n = f_\text{b}\frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} = 1{,}5\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

$\boxed{7}$ L'allure des bulles sur la photographie figure 1 n'est **pas en accord** avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle ... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement **cette variation de rayon qui est reponsable des variations de vitesse**.

$\boxed{8}$ On a montré précédemment que la vitesse limite valait

$$v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \rho_{\text{liq}} g}{9\eta}$$

donc en prenant le logarithme de l'expression

$$\log v_{\text{lim}} = \log \frac{2\rho_{\text{liq}} g}{9\eta} + \log r^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\log v_{\text{lim}} = A + 2\log r\,.}$$

avec A une constante car le premier terme de la somme est constant.

L'interprétation de la figure est plus délicate : il faut remarquer que les échelles n'y sont pas linéaires, c'est-à-dire que les graduations ne sont pas « régulièrement » espacées. Il s'agit en fait d'une échelle dite logartihmique, que nous introduirons dans le chapitre sur le filtrage. La courbe de la figure 2 représente donc en fait $\log v_{\text{lim}}$ en fonction de $\log r$. On peut alors constater que tous les points expérimentaux se regroupent sur une droite, dont on peut estimer la pente à environ 2.

Annales de concours

Exercice 9 : Circuit RL à deux mailles [oral Mines-Télécom]

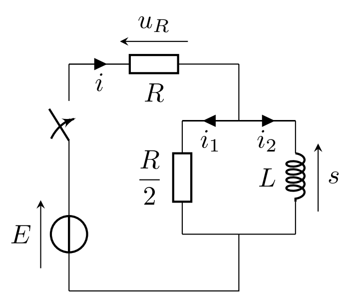


Figure 7 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

Équation différentielle vérifiée par s : avec les notations de la figure 7,

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

Forme générale des solutions : l'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

Détermination de la condition initiale :

▷ Étude à l'instant $t = 0^-$: la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement
$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ Étude à l'instant $t = 0^+$:

Loi des nœuds : $$i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$$

Continuité de i_2 : $$i(0^+) = i_1(0^+)$$

Lois de comportement : $$\frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$$

Loi des mailles : $$\frac{E - s(0^+)}{R} = \frac{2s(0^+)}{R}$$

Donc : $$E = 3s(0^+)$$

Finalement : $$\boxed{s(0^+) = \frac{E}{3}\,.}$$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est* **absolument inutile** *de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne pas du tout sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*

Détermination de la constante A :

$$s(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{E}{3} \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 8.

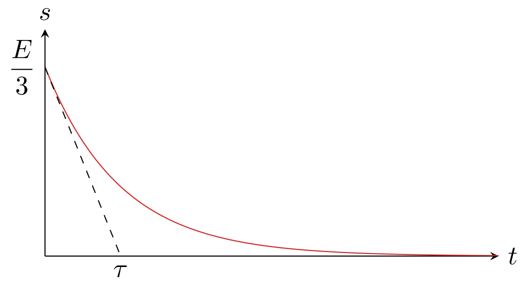


Figure 8 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 10 : Condensateur alimenté par deux générateurs [oral CCP]

1 Raisonnons avec les notations de la figure 9 pour $t > 0$.

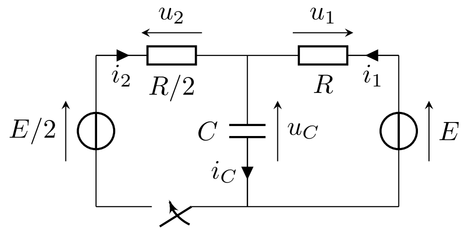


Figure 9 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $$i_C = i_1 + i_2$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2u_1}{R} + \frac{u_2}{R}$$

Loi des mailles : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\frac{E/2 - u_C}{R} + \frac{E - u_C}{R}$$

Donc $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R}u_C$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{RC}u_C = \frac{2E}{RC}\,.}$$

2 Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

▷ Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{3}{RC}u_\mathrm{p} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_\mathrm{p} = \frac{2}{3}E\,.$$

▷ Solution homogène : $u_\mathrm{h} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Conclusion :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

Détermination de la constante d'intégration :

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{2}{3}E \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc

$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \frac{101}{100}$$

soit

$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$$

d'où

$$\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02\,.}$$

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E - u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2\,.$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\dfrac{E}{2} - u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2\,.$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 4\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{3}{2}\right]\,.}$$

Lorsque $t \to \infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R}\,.$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.