Électronique 3 – Travaux dirigés

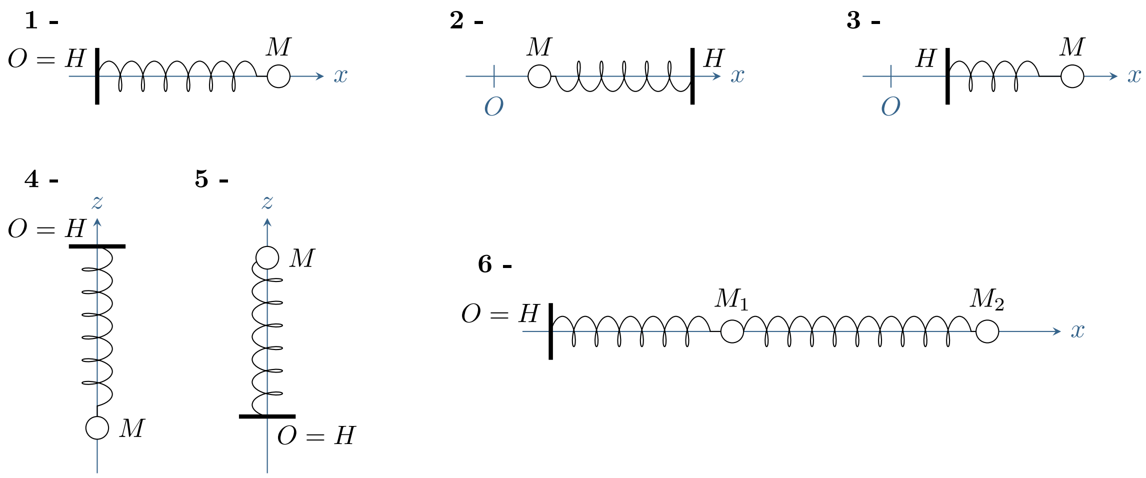
Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Oscillateur harmonique

Exercices

Exercice 1 : Force exercée par un ressort [♦◇◇]

Dans chacun des cas, exprimer la force exercée par le ressort sur le solide fixé en M en fonction de la raideur k et de la longueur naturelle ℓ_0 du ressort, de la position x ou z du point M, de la position x_H ou z_H du point H où le ressort est fixé à un bâti, et du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_x$ ou $\overrightarrow{e}_z$. Les positions sont repérées à partir du point O. Dans le dernier cas, exprimer les forces exercées par les deux ressorts sur chacun des points M_1 et M_2, d'abscisses x_1 et x_2. Les deux ressorts sont supposés différents, de caractéristiques k, ℓ_0 et k', ℓ'_0.



Exercice 2 : Une masse et deux ressorts [♦♦◇]

Considérons un point matériel M de masse m glissant horizontalement et sans frottement, repéré par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e}_x$. Ce solide est relié à deux ressorts placés sur un même axe, eux-mêmes fixés en O et O'. Le solide étudié se trouve entre O et O'. La longueur OO' est notée L. Les ressorts ont pour raideur respective k_1 et k_2, et pour longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}.

1 - Faire un schéma légendé de la situation. Il va de soi qu'il sera aussi clair, complet et propre.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, appelée équation du mouvement.

3 - Montrer que la position d'équilibre est donnée par

$$x_{\text{éq}} = \frac{k_1\ell_{01} + k_2(L - \ell_{02})}{k_1 + k_2}$$

4 - En déduire la forme générale des solutions de l'équation du mouvement.

5 - Supposons qu'à l'instant $t = 0$, M est placé en $x = x_0 > x_{\text{éq}}$ et lancé avec une vitesse initiale v_0 vers la gauche. Établir la loi horaire $x(t)$ et représenter son allure.

6 - Supposons maintenant $x_0 = x_{\text{éq}}$ et $v_0 = 0$. Que vérifie-t-on ?

Exercice 3 : Oscillateur masse-ressort vertical [♦♦◇]

L'objectif de cet exercice est de comprendre en quoi l'oscillateur *vertical* montré en cours diffère de l'oscillateur *horizontal* que nous avons modélisé. L'exercice propose de suivre la même démarche que celle du cours, en établissant et résolvant l'équation différentielle régissant le mouvement, puis en contrôlant la conservation de l'énergie.

L'oscillateur de démonstration est modélisé par un ressort de longueur naturelle L_0 et de raideur k. Ce ressort est attaché à une ficelle en un point O supposé fixe et pend verticalement. Un cylindre de masse m est fixée à son

Étienne Thibierge, 13 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

autre extrémité. La position du cylindre est repérée par sa cote z, définie le long d'un axe (Oz) **orienté vers le bas** et dont l'origine est fixée au point d'attache du ressort.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et l'écrire sous forme canonique. En déduire la période des oscillations et comparer au cas horizontal.

2 - Déterminer la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$. Commenter physiquement le résultat.

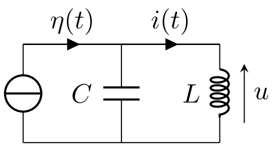
3 - Le cylindre est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position z_0 obtenue en étirant le ressort par rapport à la position d'équilibre. Déterminer la loi horaire $z(t)$.

4 - L'énergie potentielle du cylindre peut s'écrire sous la forme

$$E_{\mathrm{p}}(z) = \frac{1}{2}\,k\,(z - L_0)^2 - mgz$$

Que représentent chacun des termes ? Montrer que la solution générale obtenue traduit bien la conservation de l'énergie mécanique du cylindre.

Exercice 4 : Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique [♦♦◊]



Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

1 - Exprimer la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

2 - Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i. Retrouver cette équation par application des lois de Kirchoff.

3 - Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

4 - En déduire l'expression de $i(t)$.

Exercice 5 : Mode de vibration d'une molécule de HCl [♦♦♦]

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8{,}5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un pseudo-ressort de raideur k.

Données : masses molaires $M_{\mathrm{H}} = 1{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M_{\mathrm{Cl}} = 35{,}5\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_{\mathrm{A}} = 6{,}0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

1 - Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?

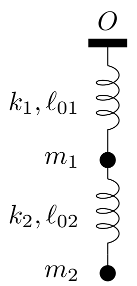
2 - Calculer la raideur k.

3 - On admet que l'énergie de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ est la constante de Planck. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.

4 - Calculer l'amplitude de son mouvement.

Annale de concours

Exercice 6 : Deux ressorts à la verticale [oral banque PT, ♦♦♦]



1 - Si un ressort possède une raideur k, quelle est la raideur d'un demi-ressort ?

2 - On considère le système ci-contre où k_i et ℓ_{0i} sont les raideurs et longueurs à vide des ressorts. Déterminer les allongements $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ à l'équilibre.

3 - Établir les équations différentielles vérifiées par les écarts z_1 et z_2 aux positions d'équilibre.

4 - La masse m_2 est maintenant supposée maintenue dans sa position d'équilibre. La masse m_1 est alors déplacée de Z_{d} de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Trouver l'équation $z_1(t)$ régissant le mouvement de m_1.

5 - Quel est le rapport entre les deux premières questions de l'exercice ?

Oscillateur harmonique

Exercices

Exercice 1 : Force exercée par un ressort

Dans tous les cas il faut repartir de la définition, $\overrightarrow{f} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}_{\text{sortant}}$ en exprimant séparément ℓ et $\overrightarrow{u}_{\text{sortant}}$ en fonction des paramètres géométriques du problème. Attention aux signes, ℓ est une longueur donc toujours positive.

1 $\overrightarrow{f} = -k(x - \ell_0)\overrightarrow{e}_x$

2 $\overrightarrow{f} = -k(x_H - x - \ell_0)(-\overrightarrow{e}_x) = k(x_H - x - \ell_0)\overrightarrow{e}_x$

3 $\overrightarrow{f} = -k(x - x_H - \ell_0)\overrightarrow{e}_x$

4 $\overrightarrow{f} = -k(-z - \ell_0)(-\overrightarrow{e}_z) = -k(z + \ell_0)\overrightarrow{e}_z$

5 $\overrightarrow{f} = -k(z - \ell_0)\overrightarrow{e}_z$

6 ▷ Force exercée par le premier ressort sur M_1 : $\overrightarrow{f} = -k(x_1 - \ell_0)\overrightarrow{e}_x$;
▷ Force exercée par le deuxième ressort sur M_1 : $\overrightarrow{f} = -k'(x_2 - x_1 - \ell'_0)(-\overrightarrow{e}_x) = k'(x_2 - x_1 - \ell'_0)\overrightarrow{e}_x$;
▷ Force exercée par le premier ressort sur M_2 : aucune ! car le premier ressort n'est pas attaché au solide en M_2 ... mais cela ne veut évidemment pas dire qu'il n'a pas *d'influence* sur le mouvement de M_2 ;
▷ Force exercée par le deuxième ressort sur M_2 : $\overrightarrow{f} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\overrightarrow{e}_x$.

Exercice 2 : Une masse et deux ressorts

1 Voir figure 1.

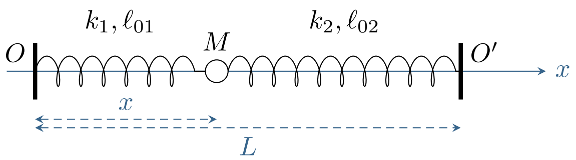


Figure 1 – **Schéma de la situation.** Rien n'est précisé sur la situation des ressorts (comprimés, étendus, à l'équilibre) : il n'est donc pas possible de représenter les forces.

2 ▷ Système : le solide de masse m, repéré par la position du point M ;

▷ Référentiel : terrestre, que l'on considère en bonne approximation galiléen ;

▷ Bilan des actions mécaniques exercées sur le système :
→ son poids, vertical, est supposé exactement compensé par la réaction du support sur lequel il se trouve ;
→ force exercée par le ressort 1 : $\overrightarrow{f}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{01})\overrightarrow{u}_{\text{sortant},1} = -k_1(x - \ell_{01})\overrightarrow{e}_x$;
→ force exercée par le ressort 2 : $\overrightarrow{f}_2 = -k_2(\ell_2 - \ell_{02})\overrightarrow{u}_{\text{sortant},2} = -k_2(L - x - \ell_{02})(-\overrightarrow{e}_x) = k_2(L - x - \ell_{02})\overrightarrow{e}_x$;
→ les frottements sont négligés.

▷ Loi de la quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f}_1 + \overrightarrow{f}_2 \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_x$$

ce qui donne en projetant sur l'axe x

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k_1(x - \ell_{01}) + k_2(L - x - \ell_{02})\,.$$

Écrivons cette équation sous forme canonique,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k_1x+k_2x=k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02}) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k_1+k_2}{m}x=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{m}$$

On reconnaît une équation différentielle d'oscillateur harmonique dont on peut identifier la pulsation propre et qu'on écrit finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+{\omega_0}^2x=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{m} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\,.}$$

3 La position d'équilibre du solide est donnée par une solution particulière constante de l'équation différentielle. Pour $x = x_{\text{éq}} = \text{cte}$, elle s'écrit

$$0+{\omega_0}^2x_{\text{éq}}=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{m} \qquad \text{donc} \qquad x_{\text{éq}}=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{m{\omega_0}^2}$$

et en remplaçant $m{\omega_0}^2 = k_1 + k_2$,

$$\boxed{x_{\text{éq}}=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{k_1+k_2}\,.}$$

4 Les solutions de l'équation du mouvement s'écrivent toutes sous la forme d'une somme d'une solution particulière, en l'occurence $x = x_{\text{éq}}$, et d'une solution de l'équation homogène, d'où

$$\boxed{x(t)=x_{\text{éq}}+A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)\,.}$$

5 D'après la première condition initiale,

$$x(0)\underbrace{=}_{\text{sol}}x_{\text{éq}}+A\underbrace{=}_{\text{CI}}x_0 \qquad \text{d'où} \qquad A=x_0-x_{\text{éq}}\,.$$

Pour utiliser la seconde condition initiale, il faut connaître la vitesse, soit

$$v_x(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega_0A\sin(\omega_0t)+\omega_0B\cos(\omega_0t)\,.$$

Ainsi, comme le solide est lancé vers la gauche $v_x(0) = -v_0$, donc

$$v_x(0)\underbrace{=}_{\text{sol}}\omega_0B\underbrace{=}_{\text{CI}}-v_0 \qquad \text{d'où} \qquad B=\frac{v_0}{\omega_0}\,.$$

Finalement,

$$\boxed{x(t)=x_{\text{éq}}+(x_0-x_{\text{éq}})\cos(\omega_0t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t)\,.}$$

6 Voir figure 2. Points importants du tracé : oscillations symétriques par rapport à la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$, qui restent bornées entre 0 et L. Les conditions initiales doivent apparaître clairement : $x(0) > x_{\text{éq}}$ et la pente initiale doit être négative car le solide est lancé vers la gauche.

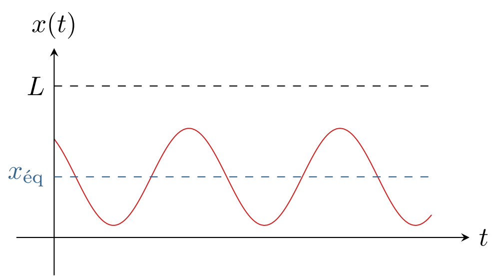


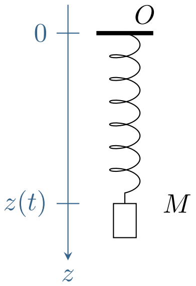
Figure 2 – Allure de $x(t)$.

7 Avec ces nouvelles conditions initiales, la résolution reste formellement la même mais donne

$$A=B=0 \qquad \text{soit} \qquad \forall t,\quad x(t)=x_{\text{éq}}$$

On vérifie ainsi que **$x_{\text{éq}}$ est bien une position d'équilibre du système.**

Exercice 3 : Oscillateur masse-ressort vertical



1 ▷ Système : le cylindre de masse m ;

▷ Référentiel : celui de la classe, identique au référentiel terrestre, considéré galiléen ;

▷ Bilan des actions mécaniques :
→ Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e}_z$;
→ Force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_\mathrm{r} = -k(L - L_0)\,\vec{u}_\mathrm{sortant} = -k(z - L_0)\,\vec{e}_z$$

▷ Loi de la quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{r}$$

avec $\vec{p} = mv_z\,\vec{e}_z$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z = m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_z$. Ainsi, en remplaçant les expressions des forces,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_z = mg\,\vec{e}_z - k(z - L_0)\,\vec{e}_z\,.$$

Il reste alors à projeter l'équation différentielle,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(z - L_0)\,,$$

et à l'écrire sous forme canonique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 z = g + \frac{kL_0}{m} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.}$$

La pulsation propre a la même expression dans le cas vertical que dans le cas horizontal, **la période des oscillations est donc la même dans les deux cas**.

2 Les positions d'équilibre sont les solutions particulières constantes de l'équation du mouvement. Ici, $z_\text{éq}$ est tel que

$$0 + {\omega_0}^2 z_\text{éq} = g + \frac{kL_0}{m} \qquad \text{soit} \qquad z_\text{éq} = \frac{g}{{\omega_0}^2} + \frac{kL_0}{m{\omega_0}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z_\text{éq} = \frac{mg}{k} + L_0\,.}$$

On remarque que $z_\text{éq} > L_0$, ce qui est raisonnable car à l'équilibre le ressort doit compenser le poids du cylindre. En outre, on note que $z_\text{éq}$ est d'autant plus grand (donc la position d'équilibre d'autant plus basse) que m est élevée et d'autant moins que le ressort est raide, ce qui est là aussi raisonnable.

> *On peut noter que la position d'équilibre est* exactement *donnée par la longueur du ressort pour laquelle le poids et la force de rappel se compensent,*
>
> $$\vec{P} + \vec{F}_\mathrm{r} = \vec{0} \qquad \textit{soit} \qquad mg - k(z_\text{éq} - L_0) = 0 \qquad \textit{donc} \qquad z_\text{éq} = \frac{mg}{k} + L_0\,.$$

3 Comme $z = z_\text{éq}$ est solution particulière, les solutions de l'équation différentielle s'écrivent toutes sous la forme

$$z(t) = z_\text{éq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

Les constantes A et B se trouvent à partir des conditions initiales,

$$z(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} z_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} z_\text{éq} + A + 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = z_0 - z_\text{éq}\,.$$

Pour exploiter la deuxième condition initiale, il faut obtenir la vitesse par dérivation,

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

et ainsi

$$v_z(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} 0 + B \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

Finalement,

$$\boxed{z(t) = z_\text{éq} + (z_0 - z_\text{éq})\cos(\omega_0 t)\,.}$$

Étienne Thibierge, 13 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

4 Le premier terme en $\frac{1}{2}\,k\,(z-L_0)^2$ est l'**énergie potentielle élastique** que le ressort est à même de fournir au solide. Le second terme en $-mgz$ est l'**énergie potentielle de pesanteur** du solide.

Commençons par calculer l'énergie potentielle élastique,

$$\begin{aligned}
E_{\text{pe}} &= \frac{1}{2}k\left[z_{\text{éq}} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) - L_0\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left[\frac{mg}{k} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2\frac{mg}{k}(z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) + (z_0 - z_{\text{éq}})^2\cos^2(\omega_0 t)\right] \\
&= \frac{m^2g^2}{2k} + mg(z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{\text{éq}})^2\cos^2(\omega_0 t)\,.
\end{aligned}$$

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{\text{pp}} = -mgz_{\text{éq}} - mg(z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)\,.$$

Enfin, l'expression de la vitesse calculé précédemment permet d'obtenir

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}m{\omega_0}^2(z_0 - z_{\text{éq}})^2\sin^2(\omega_0 t)\,.$$

Finalement, en simplifiant déjà le terme en $\cos(\omega_0 t)$,

$$E_{\text{m}} = \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{\text{éq}})^2\cos^2(\omega_0 t) - mgz_{\text{éq}} + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2(z_0 - z_{\text{éq}})^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Comme $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ alors $m{\omega_0}^2 = k$, ce qui permet de factoriser et d'utiliser $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$. Ainsi,

$$E_{\text{m}} = \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{\text{éq}})^2 - mgz_{\text{éq}}$$

On montre bien ici que l'énergie mécanique est constante, et on note que la constante dépend des conditions initiales par l'intermédiaire de z_0. Pour simplifier l'expression, on peut remplacer $z_{\text{éq}}$ par son expression et développer ... mais c'est lourd, lourd, très lourd. Il est plus astucieux de remarquer que l'énergie mécanique garde constamment sa valeur intiale. Comme à l'instant initial $v_z = 0$, alors

$$\boxed{E_{\text{m}} = \frac{1}{2}k(z_0 - L_0)^2 - mgz_0\,.}$$

Nous reverrons tous ces points de façon plus systématique dans le cours de mécanique.

Exercice 4 : Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

1 Exprimons l'énergie totale,

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\,.$$

Ainsi, en dérivant,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C\times 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}L\times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme seule l'intensité doit apparaître dans le résultat, on remplace u avec la loi de comportement de la bobine, soit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}C\times 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{2}L\times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
&= L^2C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right)}$$

2 Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur, qui stockent de l'énergie mais n'en dissipent pas, et il n'y a en particulier aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante. On en déduit qu'à tout instant,

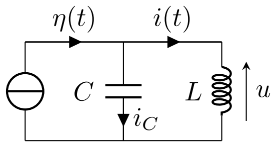
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{soit} \qquad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right) = 0\,.$$

Étienne Thibierge, 13 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Le terme en facteur $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est la tension aux bornes de la bobine, qui n'est pas constamment nulle. C'est donc le terme dans la parenthèse qui est nul, soit

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 i = 0\,,}$$

en posant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre du circuit.



3 Retrouvons cette équation par les lois de Kirchoff. D'après la loi des nœuds,

$$i_C + i = 0 \qquad \text{donc} \qquad C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i = 0$$

Comme la bobine et le condensateur sont montés en parallèle, ils sont soumis à la même tension u, et donc d'après la loi de comportement de la bobine,

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0\,.$$

4 À l'instant $t = 0^-$, le circuit est encore en régime permanent avec $\eta = I_0$. La bobine est donc équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit que

$$i(0^-) = I_0 \qquad \text{et} \qquad u(0^-) = 0\,.$$

Comme i doit être continu (bobine), alors

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = I_0\,.}$$

Par ailleurs, comme le condensateur est monté en parallèle de la bobine alors u est aussi la tension aux bornes du condensateur et doit donc aussi être continue, donc

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,.$$

D'après la loi de comportement de la bobine,

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = u(0^+) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0\,.}$$

5 **Forme générale des solutions :** l'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à prendre en compte (une autre façon de le dire est que la solution particulière est nulle). On en déduit que les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

Détermination des constantes A et B : d'une part,

$$i(0^-) = i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} I_0 \qquad \text{d'où} \qquad A = I_0\,,$$

et d'autre part, comme

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} \omega_0 B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = I_0\cos(\omega_0 t)\,.}$$

Exercice 5 : Mode de vibration d'une molécule de HCl

1 Au vu des masses molaires, l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, et donc **beaucoup plus difficile à mettre en mouvement**. Il est donc raisonnable de supposer que seul l'atome d'hydrogène est en mouvement.

2 Le système est équivalent à un mobile (l'atome H) relié à un support fixe (l'atome Cl) par un ressort, c'est-à-dire un oscillateur harmonique. Sa fréquence propre f est alors reliée à la masse $m_\mathrm{H} = M_\mathrm{H}/\mathcal{N}_\mathrm{A}$ de l'atome H et à la raideur k du ressort par

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_\mathrm{H}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k\,\mathcal{N}_\mathrm{A}}{M_\mathrm{H}}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{4\pi^2 f^2 M_\mathrm{H}}{\mathcal{N}_\mathrm{A}} = 4{,}7\cdot 10^2\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$

Attention pour calculer la valeur numérique à bien convertir la masse molaire en kg · mol^{-1} !

3 La vitesse de l'atome d'hydrogène est maximale lorsque celui-ci passe par sa position moyenne, correspondant à la longueur naturelle du pseudo-ressort car aucune autre force n'est envisagée. À ces points particuliers, l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène est sous forme seulement d'énergie cinétique, $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} = m_\mathrm{H}\, v_\mathrm{max}^2/2$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\,h\,f = \frac{1}{2}\,m_\mathrm{H}\,v_\mathrm{max}^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{h\,f\,\mathcal{N}_\mathrm{A}}{M_\mathrm{H}}} = 5{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

4 La position de l'atome est égale à l'amplitude X_max de son mouvement aux points de rebroussement. À ces points particuliers, l'énergie mécanique E_m de l'atome d'hydrogène est sous forme seulement d'énergie potentielle, $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p} = kX_\mathrm{max}^2/2$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\,h\,f = \frac{1}{2}\,k\,X_\mathrm{max}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi^2\,f^2\,M_\mathrm{H}}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\,X_\mathrm{max}^2$$

d'où

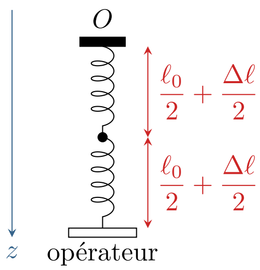
$$\boxed{X_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{h\,\mathcal{N}_\mathrm{A}}{4\pi^2\,f\,M_\mathrm{H}}} = 1{,}1\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 11\,\mathrm{pm}\,.}$$

Pour comparaison, la longueur de la liaison H−Cl est tabulée à 127 pm. Ce modèle (simpliste !) indique qu'elle varie de près de 10 % sous l'effet de la vibration.

Pour aller plus vite dans le calcul, on aurait aussi pu utiliser le fait qu'amplitude du mouvement et vitesse maximale sont reliées par $v_{max} = \omega_0\, X_{max}$

Annale de concours

Exercice 6 : Deux ressorts à la verticale [oral banque PT]



1 Question bien compliquée pour commencer ! Considérons un ressort complet fixé à une de ses extrémités et une masse m très faible fixée au milieu. Un opérateur tire sur le ressort en lui donnant un allongement $\Delta\ell$. La force exercée par le ressort sur l'opérateur vaut

$$\vec{F} = +k\Delta\ell\,\vec{u}_z$$

Comme la force exercée par le ressort est opposée aux deux extrémités [1], on en déduit que la force exercée par le demi-ressort sur la petite masse vaut

$$\vec{F} = -k\Delta\ell\,\vec{u}_z$$

Cependant, l'allongement du demi-ressort n'est que $\Delta\ell/2$, la forme appropriée pour écrire la force est donc

$$\vec{F} = -2k\,\frac{\Delta\ell}{2}\,\vec{u}_z$$

ce qui permet d'identifier **la raideur du demi-ressort au double de la raideur du ressort complet.**

2 On raisonne sur l'axe z orienté vers le bas. Raisonnons à l'équilibre : les forces exercées sur chacune des masses se compensent.

▷ La masse m_1 est soumise à
- → son poids $\vec{P}_1 = +m_1 g\,\vec{u}_z$;
- → la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_{\mathrm{r}1} = -k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}}\,\vec{u}_z$;
- → le force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_{\mathrm{r},2\to1} = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}(-\vec{u}_z) = k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\,\vec{u}_z$.

Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_1 g - k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0$$

▷ La masse m_2 est soumise à
- → son poids $\vec{P}_2 = +m_2 g\,\vec{u}_z$;
- → AUCUNE force de la part du ressort 1 puisqu'il n'est pas attaché à m_2 ;
- → la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{\mathrm{r},2\to2} = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\,\vec{u}_z$.

1. Démontrable en appliquant successivement le principe des actions réciproques, le PFD au ressort, et à nouveau le principe des actions réciproques.

Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_2 g - k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0\,.$$

▷ On en conclut

$$\boxed{\Delta\ell_{2,\text{éq}} = \frac{m_2 g}{k_2}}$$

puis

$$k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} = m_1 g + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = (m_1+m_2)g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\ell_{1,\text{éq}} = \frac{(m_1+m_2)g}{k_1}\,.}$$

3 Comme l'axe z est orienté vers le bas et que les positions sont comptées par rapport à la position d'équilibre, alors

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{1,\text{éq}} + z_1 \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{2,\text{éq}} - z_1 + z_2\,.}$$

> *Ces expressions se trouvent à partir du schéma ! Augmenter z_1 à z_2 fixé augmente l'allongement du ressort 1 et diminue celui du ressort 2. Augmenter z_2 à z_1 fixé n'a pas d'effet sur le ressort 1 et augmente l'allongement du ressort 2.*

De plus, les accélérations des masses m_1 et m_2 s'écrivent directement $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2}$ car tous les autres termes de leur position sont des constantes. Ainsi, le même bilan de forces que précédemment et le PFD conduisent aux équations différentielles

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - k_1\,\Delta\ell_1 + k_2\,\Delta\ell_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - k_2\,\Delta\ell_2\,.$$

En remplaçant les allongements par leurs expressions,

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - (m_1+m_2)g - k_1 z_1 + m_2 g - k_2 z_1 + k_2 z_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - m_2 g + k_2 z_1 - k_2 z_2$$

et enfin en simplifiant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 = \frac{k_2}{m_1} z_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m_2} z_2 = \frac{k_2}{m_2} z_1\,.}$$

> *Il est logique que tous les termes issus du poids se compensent : comme le poids est une force constante, il a un impact sur les positions d'équilibre mais pas sur les oscillations autour de ces positions.*

4 La masse m_2 est maintenue dans sa position d'équilibre, donc $z_2 = 0$. L'équation du mouvement de m_1 devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 = 0\,.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$. Même si la question n'est pas claire, je présume quand même qu'une résolution est attendue.

▷ *Forme générale des solutions :* l'équation est homogène, donc la solution particulière est nulle, et

$$z_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes.}$$

▷ *Conditions initiales :* on a directement $z_1(0) = Z_\mathrm{d}$ et $\dot z_1(0) = 0$.

▷ *Détermination des constantes :* sur la position,

$$z_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} Z_\mathrm{d}$$

et sur la vitesse

$$\dot z_1(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

donc

$$\dot z_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B\omega_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

▷ *Conclusion :*

$$\boxed{z_1(t) = Z_\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)\,.}$$

5 Bonne question ! Sauf erreur de ma part, la question 1 n'a aucune utilité pour résoudre la question 2. La méthode de démonstration se ressemble ?

Étienne Thibierge, 13 novembre 2017, www.etienne-thibierge.fr