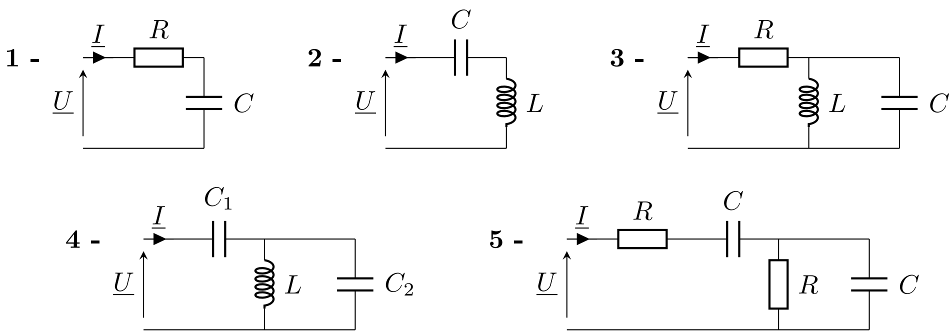
Électronique en régime sinusoïdal forcé

Exercices

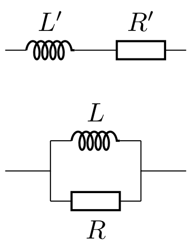
Exercice 1 : Détermination d'impédances [♦♦◊]

Déterminer l'impédance complexe des dipôles ci-dessous. Écrire les résultats sous forme d'une unique fraction, en faisant apparaître des quantités adimensionnées telles que $RC\omega$, $L\omega/R$ et $LC\omega^2$.

> *Les trois premiers circuits sont simples et doivent être traités sans difficulté. Les deux derniers donnent des résultats un peu plus compliqués.*



Exercice 2 : Équivalence entre dipôles RL [♦◊◊]

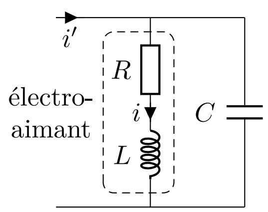


Les dipôles ci-contre sont étudiés en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

1 - Déterminer en fonction de ω les valeurs de R' et L' pour lesquelles les deux dipôles sont équivalents.

2 - Si l'on remplace la bobine L' par un condensateur C', peut-il encore y avoir équivalence ? Commenter.

Exercice 3 : Alimentation d'un électroaimant de levage [♦♦◊]



Un électroaimant de levage est un dispositif industriel permettant de soulever des pièces métalliques à partir de champs magnétiques intenses. On étudie un tel appareil en le modélisant électriquement par une bobine d'inductance $L = 1{,}25\,\mathrm{H}$ dont les spires ont une résistance interne $R = 1\,\Omega$. Cette bobine est traversée par un courant i sinusoïdal de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ dont l'amplitude $I_\mathrm{m} = 30\,\mathrm{A}$ est imposée pour le bon fonctionnement du dispositif.

Ce courant étant de forte puissance, les pertes par effet Joule dans les câbles d'alimentation de l'électroaimant sont non négligeables. Pour les diminuer, une méthode usuelle consiste à installer un condensateur de capacité C en parallèle de l'électroaimant. On note alors i' l'intensité du courant dans les câbles d'alimentation du dispositif, dont l'amplitude I'_m est inférieure à l'amplitude I_m du courant qui traverse l'électroaimant.

1 - Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I'}$ en fonction de l'amplitude complexe $\underline{I}$.

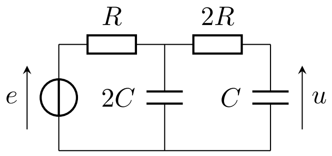
2 - Calculer la valeur C à donner au condensateur pour minimiser l'amplitude I'_m tout en conservant I_m fixée. On pourra raisonner sur ${I'_\mathrm{m}}^2$.

3 - Calculer numériquement la valeur de I'_m dans la configuration optimale. Commenter.

4 - À quel dipôle l'association électroaimant-condensateur est-elle équivalente à la fréquence de travail ?

5 - Calculer la tension aux bornes de l'électroaimant. Dépend-elle de C ? Conclure en termes de puissance fournie.

Exercice 4 : Obtention d'une équation différentielle [♦♦◊]



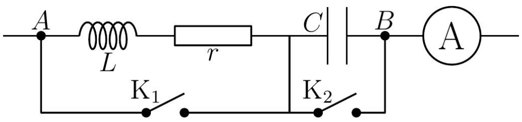
En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e\,,$$

en posant $\tau = RC$.

Exercice 5 : Mesure à l'ampèremètre [♦♦♦]

Dans le circuit ci-dessous alimenté par une tension u_{AB} sinusoïdale, il existe une pulsation particulière ω pour laquelle l'ampèremètre en mode AC affiche la même valeur lorsque K_1 et K_2 sont ouverts, lorsque K_1 est ouvert et K_2 fermé, et lorsque K_1 est fermé et K_2 ouvert. On rappelle qu'un ampèremètre réglé en mode AC affiche la valeur efficace du courant qui le traverse.



Montrer que cette pulsation n'existe que si

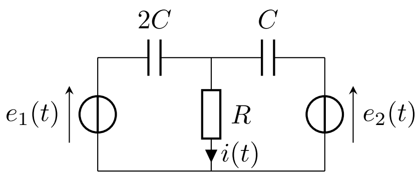
$$R = \sqrt{\frac{3L}{2C}}$$

et qu'elle vaut alors

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{2LC}}\,.$$

Annale de concours

Exercice 6 : Double circuit RC en régime sinusoïdal [oral banque PT, ♦♦◊]



Déterminer la réponse temporelle $i(t)$ pour
- ▷ $e_1(t) = E\cos(\omega t)$;
- ▷ $e_2(t) = E\cos(\omega t + 2\pi/3)$;
- ▷ $\omega = 1/RC$.

Électronique en régime sinusoïdal forcé

Exercices

Exercice 1 : Détermination d'impédances

1 Association série d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega}\,R\,.}$$

2 Association série, d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1-LC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega}}$$

> *Rappel :* $1/j = -j$.

3 L'association de L et C est en parallèle, il est donc a priori plus simple de calculer son admittance équivalente

$$\underline{Y_{LC}} = \underline{Y_L} + \underline{Y_C} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1-LC\omega^2}{\mathrm{j}L\omega}$$

L'impédance complexe de l'association parallèle vaut donc

$$\underline{Z_{LC}} = \frac{1}{\underline{Y_{LC}}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}$$

> *La factorisation est intéressante car elle permet de passer très facilement de l'admittance à l'impédance.*

Enfin, l'association est montée en série avec une résistance, donnant une impédance complexe équivalente à l'ensemble

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_{LC}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z} = R + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC\omega^2}}$$

Une dernière factorisation est possible pour donner

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1+\mathrm{j}L\omega/R - LC\omega^2}{1-LC\omega^2}\,R\,.}$$

> *Cette dernière factorisation n'est pas forcément utile, car la forme non-factorisée sépare directement la partie réelle de la partie imaginaire : tout dépend de ce que l'on veut faire du résultat.*

4 L'association en parallèle de la bobine et du condensateur C_2 se traite comme à la question précédente et a pour impédance équivalente

$$\underline{Z_{LC_2}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC_2\omega^2}$$

Elle est montée en série avec le condensateur C_1, donnant une impédance équivalente

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-LC_2\omega^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z} = \frac{1-L(C_1+C_2)\omega^2}{\mathrm{j}C_1\omega(1-LC_2\omega^2)}}$$

5 L'association en parallèle de la résistance et du condensateur a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{parr}}} = \underline{Y_R} + \underline{Y_C} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z_{\text{parr}}} = \frac{1}{\underline{Y_{\text{parr}}}} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Cette association est montée en série avec une résistance et un condensateur, l'ensemble a donc comme impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_{\text{parr}}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}RC\omega(1+\mathrm{j}RC\omega) + (1+\mathrm{j}RC\omega) + \mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}C\omega(1+\mathrm{j}RC\omega)}$$

soit enfin

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1+3\mathrm{j}RC\omega - R^2C^2\omega^2}{\mathrm{j}C\omega(1+\mathrm{j}RC\omega)}}$$

Exercice 2 : Équivalence entre dipôles RL

1 L'impédance complexe du montage en série vaut

$$\underline{Z'} = \underline{Z_{L'}} + \underline{Z_{R'}} = \mathrm{j}L'\omega + R'$$

De même, l'impédance complexe du montage en parallèle est telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{\underline{Z_R}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{R+\mathrm{j}L\omega}$$

Les deux dipôles sont équivalents s'ils ont les mêmes impédances complexes. Il suffit donc pour trouver R' et L' d'identifier les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}$ et $\underline{Z'}$. Écrivons donc $\underline{Z}$ sous forme algébrique,

$$\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega(R-\mathrm{j}L\omega)}{(R+\mathrm{j}L\omega)(R-\mathrm{j}L\omega)} = \frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + \mathrm{j}\frac{R^2L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\,.$$

Ainsi, il y a équivalence entre les deux dipôles pour

$$\boxed{R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad L' = \frac{R^2L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\,.}$$

> *Remarquez que les deux dipôles ne sont donc pas équivalents tout le temps, mais seulement pour une valeur précise de fréquence ... et si R' et L' sont choisis aléatoirement il n'y a même aucune raison que l'équivalence existe.*

2 Si L' est remplacée par un condensateur, l'impédance complexe de l'association série s'écrit

$$\underline{Z'} = R' + \frac{1}{\mathrm{j}C'\omega} = R' - \mathrm{j}\frac{1}{C'\omega}$$

La condition d'équivalence obtenue par identification des impédances devient

$$R' = \frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{C'\omega} = \frac{R^2L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\,.$$

Néanmoins, comme toutes les grandeurs sont positives, la deuxième condition portant sur C' ne peut jamais être vérifiée. Il n'est pas possible d'avoir équivalence entre les deux dipôles : **un circuit capacitif est fondamentalement différent d'un circuit inductif.**

Exercice 3 : Alimentation d'un électroaimant de levage

1 Les deux branches forment un diviseur de courant, d'où

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I'}} = \frac{\underline{Y}_{RL}}{\underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C} = \frac{1}{1+\underline{Z}RL\underline{Y}_C} = \frac{1}{1+\mathrm{j}C\omega(R+\mathrm{j}L\omega)}$$

En inversant la relation,

$$\boxed{\underline{I'} = 1+\mathrm{j}C\omega(R+\mathrm{j}L\omega)\underline{I}\,.}$$

2 En développant,

$$\underline{I'} = \left[\left(1 - LC\omega^2\right) + \mathrm{j}RC\omega\right] \underline{I}$$

d'où en prenant le module

$$I'_{\mathrm{m}}{}^2 = \left[(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2\right] I_{\mathrm{m}}^2$$

Pour déterminer la valeur de C qui minimise I'_{m}, calculons la dérivée par rapport à C,

$$\frac{\mathrm{d}I'_{\mathrm{m}}{}^2}{\mathrm{d}C} = \left[2 \times (1 - LC\omega^2) \times (-L\omega^2) + 2R^2\omega^2 C\right] I_{\mathrm{m}}^2 = 2\omega^2 \left[-L + L^2C\omega^2 + R^2C\right]$$

La dérivée s'annule pour

$$\boxed{C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 8{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\,.}$$

3 En reprenant les résultats précédents,

$$I'_{\mathrm{m}} = \sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}\, I_{\mathrm{m}} = 7{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}\,.$$

L'ajout du condensateur permet de diviser par 400 l'amplitude du courant qui alimente l'électroaimant, et donc de réduire les pertes Joule en ligne par 16 000 !

4 L'admittance équivalente à l'association s'écrit

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C = \frac{1}{R + \mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega$$

soit en remplaçant C par son expression

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j}L\omega} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R - \mathrm{j}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} + \frac{\mathrm{j}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

et finalement

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

On y reconnaît l'admittance d'une **résistance**,

$$\boxed{R_{\text{éq}}(\omega) = R + \frac{L^2\omega^2}{R}\,.}$$

5 La tension aux bornes de l'électroaimant s'écrit

$$\underline{U} = (R + \mathrm{j}L\omega)\underline{I}\,.$$

Comme $\underline{I}$ est le même avec et sans condensateur (à un déphasage près), alors $\underline{U}$ ne dépend pas de C, au même déphasage près. On en conclut que l'ajout du condensateur **ne modifie pas la puissance fournie par le réseau électrique** à l'électroaimant ... tout en diminuant considérablement les pertes en ligne.

> ***Complément culturel :*** *Nous avons montré en cours que la puissance moyenne reçue par un dipôle quelconque s'écrit*
>
> $$\langle \mathcal{P} \rangle = U_{\mathrm{eff}}\, I_{\mathrm{eff}} \cos\varphi$$
>
> *avec φ l'argument de l'impédance complexe du dipôle.*
>
> *Ici, l'ajout du condensateur a permis de rendre le dipôle électroaimant + condensateur équivalent à une résistance, c'est-à-dire d'avoir $\varphi = 0$ donc $\cos\varphi = 1$. Comme la tension efficace U_{eff} demeure fixée, l'exercice a permis de constater que maximiser $\cos\varphi$ permet de minimiser l'intensité d'alimentation I'_{eff}.*
>
> *Cette méthode est très générale et porte un nom : on parle de **redressement du facteur de puissance**, le facteur de puissance étant le nom donné à $\cos\varphi$. En France, la facturation électrique industrielle dépend du facteur de puissance des usines : meilleur il est, plus les tarifs sont bas, car les pertes en ligne sont moindres.*

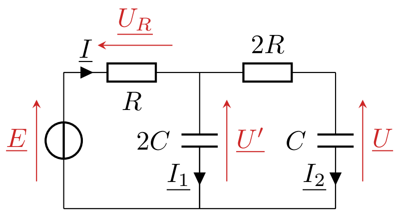


Figure 1 – Schéma des notations.

Exercice 4 : Obtention d'une équation différentielle

Raisonnons à partir de la figure 1.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R}\underline{U_R} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{U'} + \mathrm{j}C\omega\underline{U}\,.$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R,

$$\underline{U_R} = 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U'} + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}\,.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} = 2\mathrm{j}\omega\tau(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U}$$

soit

$$\underline{E} = \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de jω à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

Exercice 5 : Mesure à l'ampèremètre

Le dipôle étant linéaire, le courant traversant l'ampèremètre est sinusoïdal de même pulsation que la tension u_{AB}. Sa valeur efficace vaut donc $I_\mathrm{m}/\sqrt{2}$, où I_m est l'amplitude du courant. Comme l'ampèremètre affiche la même valeur dans les trois cas, cela veut dire que l'intensité efficace est la même dans les trois cas, et donc que l'amplitude I_m est la même. En revanche, l'ampèremètre ne donne aucune information sur le déphasage entre i et u_{AB}.

Cela signifie que le module de l'impédance complexe du dipôle AB est le même dans les trois situations. Comme les dipôles de base sont ou bien court-circuités, ou bien montés en série, cette impédance est simple à déterminer,

$$\underline{Z_1} = \mathrm{j}L\omega + R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \underline{Z_2} = \mathrm{j}L\omega + R \qquad \underline{Z_3} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

sachant que $|\underline{Z_1}| = |\underline{Z_2}| = |\underline{Z_3}|$.

Commençons par déterminer la pulsation ω. En calculant le carré du module pour éviter les racines, on utilise l'égalité

$$|\underline{Z_1}|^2 = |\underline{Z_2}|^2 \qquad \text{d'où} \qquad R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 + L^2\omega^2 \qquad \text{soit} \qquad L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm L\omega\,,$$

où seule la solution avec le signe $-$ peut convenir car $1/C\omega \neq 0$. On en déduit

$$2L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad \text{soit} \qquad 2LC\omega^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}\,.}$$

Étienne Thibierge, 14 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr

Déterminons maintenant la résistance R. Pour cela, il faut utiliser l'égalité entre un module impliquant R et celui ne l'impliquant pas. En calculant à nouveau le carré du module, on utilise l'égalité

$$\left|\underline{Z_2}\right|^2 = \left|\underline{Z_3}\right|^2 \qquad \text{soit} \qquad R^2 + L^2\omega^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} \qquad \text{d'où} \qquad R^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} - L^2\omega^2\,.$$

En utilisant l'expression de ω, on en déduit

$$R^2 = \frac{2L}{C} - \frac{L}{2C} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \sqrt{\frac{3L}{2C}}\,.}$$

Annale de concours

Exercice 6 : Double circuit RC en régime sinusoïdal [oral banque PT]

Les raisonnements sont identiques à ceux pour établir les équations différentielles, à ceci près qu'on raisonne sur les amplitudes complexes. On travaille avec les notations de la figure 2.

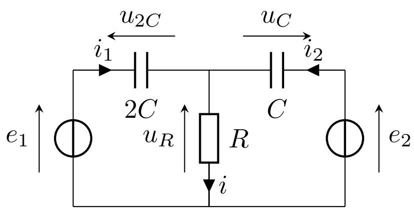


Figure 2 – Notations pour l'étude du double circuit RC.

Loi des nœuds :	$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$
Impédances complexes :	$\underline{I} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{U}_{2C} + \mathrm{j}C\omega\underline{U}_C$
Loi des mailles :	$\underline{I} = 2\mathrm{j}C\omega(\underline{E}_1 - \underline{U}_R) + \mathrm{j}C\omega(\underline{E}_2 - \underline{U}_R)$
Impédances complexes :	$\underline{I} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{E}_1 - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{I} + \mathrm{j}C\omega\underline{E}_2 - \mathrm{j}RC\omega\underline{I}$

En utilisant l'hypothèse $RC\omega = 1$ et en regroupant les termes dépendant de $\underline{I}$, on trouve

$$(1+3\mathrm{j})\underline{I} = 2\mathrm{j}C\omega\underline{E}_1 + \mathrm{j}C\omega\underline{E}_2 \qquad \text{soit} \qquad (1+3\mathrm{j})\underline{I} = \mathrm{j}C\omega E\left(2 + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi/3}\right)$$

avec les amplitudes complexes $\underline{E}_1 = E$ et $\underline{E}_2 = E\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi/3}$. On en déduit

$$\underline{I} = \frac{2+\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi/3}}{1+3\mathrm{j}}\mathrm{j}C\omega E = \frac{2+\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}}{1+3\mathrm{j}}\mathrm{j}C\omega E = \frac{\frac{3}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+3\mathrm{j}}\mathrm{j}C\omega E$$

Il reste maintenant à déterminer le module et l'argument de $\underline{I}$ pour déterminer son amplitude I_m et sa phase initiale φ_i.

$$\begin{aligned}|\underline{I}| &= \frac{\left|\frac{3}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{|1+3\mathrm{j}|}\,|\mathrm{j}C\omega|\,E \\ &= \frac{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}}{\sqrt{1+9}}C\omega E \\ &\boxed{I_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{3}{10}}C\omega E}\end{aligned}$$

et concernant la phase intiale

$$\arg\underline{I} = \arg\left(\frac{3}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arg(\mathrm{j}C\omega E) - \arg(1+3\mathrm{j})$$

$$\boxed{\varphi_i = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2} - \arctan 3}$$

Étienne Thibierge, 14 janvier 2018, www.etienne-thibierge.fr