Chapitre 8 – Électromagnétisme *Version prof*

Potentiel électrostatique

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 1 « Électrostatique ».

Les notions abordées sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues. Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circulation du champ électrostatique. Notion de potentiel électrostatique.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Calculer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans les cas simples.
Étude du condensateur plan comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ du champ électrostatique créé par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. **Approche numérique :** représenter des cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Les équations locales des champs statiques sont introduites comme des cas particuliers des équations de Maxwell. Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation différentielle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulation locale et intégrale.	Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. **Approche numérique :** mettre en œuvre une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

▷ Écrit : épreuve A 2016, 2017, 2018 et 2019 ; épreuve de modélisation 2020.
▷ Oral : souvent.

Le chapitre précédent a permis d'introduire les propriétés et des méthodes de calcul du champ électrostatique. Nous allons ici aborder une autre formulation de l'électrostatique, basée sur une autre grandeur reliée au champ $\vec{E}$, le potentiel électrostatique V. L'intérêt est double :
▷ d'une part, le potentiel est un champ scalaire donc un peu plus simple à manipuler ;
▷ d'autre part, il a une grande importance pratique car de nombreuses grandeurs physiques usuelles, notamment les tensions, sont exprimées en termes de potentiel électrostatique.

I - Une autre formulation de l'électrostatique

I.1 - Définition du potentiel électrostatique

• Équation de Maxwell-Faraday

Équation de Maxwell-Faraday :

En tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Espace 1

Dans le cas particulier du régime stationnaire, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

Rappel : en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ + rappeler $\vec{\nabla}$

Espace 2

Contenu physique :
▷ En régime variable, il existe un couplage entre champ électrique et champ magnétique : un champ magnétique variable peut créer un champ électrique.
  ⇝ phénomène d'induction

Espace 3

▷ Ce couplage disparaît en régime stationnaire.

• Existence du potentiel électrostatique

Un champ vectoriel $\vec{U}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{0}$ peut toujours s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire ψ,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \psi \text{ tel que } \vec{U} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi\,.$$

> ***Remarque :*** *ce résultat peut se « deviner » avec $\vec{\nabla}$ et la nullité du produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même,*
> $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\psi = \vec{0}\,.$$

Conséquence :

On appelle **potentiel électrostatique** le champ scalaire V tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,.$$

On dit alors que le champ $\vec{E}$ **dérive** du potentiel V.

Espace 4

Le potentiel V s'exprime en volts. Il n'est défini qu'à une constante additive près.
Il possède les mêmes propriétés d'invariance que $\vec{E}$, donc dépend des mêmes variables.

Attention ! Pour des raisons historiques, il y a un signe dans la définition du potentiel.

> ***Remarque culturelle :*** *En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday ne s'écrit plus* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, *donc* $\vec{E}$ *ne dérive plus simplement d'un potentiel scalaire. On peut montrer qu'il faut y ajouter un potentiel vecteur* $\vec{A}$ *(hors programme en PT) tel que*
>
> $$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,.$$

- **Non-unicité**

Considérons le champ électrostatique créé par deux potentiels, $V(M)$ et $V'(M) = V(M) + V_0$ avec V_0 une constante.

$\vec{E}' = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V' = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \vec{E}$ car les dérivées d'une constante sont nulles

Espace 5

Utilité pratique :
on peut choisir la valeur du potentiel en un point particulier de l'espace.

Espace 6

- **Continuité**

D'après la définition à partir de la force de Coulomb, le champ électrique prend toujours une valeur finie (sauf éventuellement au niveau d'une charge ponctuelle ou linéïque, ce qui relève davantage d'accidents de modélisation plutôt que de problèmes physiques).

⇝ conséquence importante pour le potentiel électrostatique :

> Le potentiel électrostatique est un champ partout continu,
> sauf au niveau des charges ponctuelles.

I.2 - Calculer le potentiel à partir du champ

Calculer le champ connaissant le potentiel est facile : il suffit de calculer des dérivées partielles. Procéder en sens inverse est moins simple : il faut intégrer, mais la relation est vectorielle.

a) Exemples simples

Sur la plupart des cas (simples !) que nous serons amenés à considérer, le plus naturel est de projeter puis intégrer la définition $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

- **Charge ponctuelle**

Exercice C1 : Potentiel créé par une charge ponctuelle

Rappeler le champ électrique créé par une charge ponctuelle située en O (origine du repère). En déduire le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul à l'infini.

Champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

Comme le champ ne dépend que de r alors le potentiel aussi (mêmes invariances).
Gradient en sphériques à connaître pour une fonction qui ne dépend que de r :

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

On intègre :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r} + A$$

et en prenant comme référence un potentiel nul à l'infini alors $A = 0$.

Espace 7

Le potentiel créé par une charge ponctuelle placée en O s'écrit

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Pour un ensemble de charges ponctuelles q_n placées aux points P_n,

$$V(M) = \sum_n \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0\, P_n M}$$

Remarque : *contrairement à ce que la définition peut laisser penser, il y a le même signe dans l'expression du champ et du potentiel car l'intégration apporte un signe supplémentaire.*

- **Cylindre uniformément chargé**

Exercice C2 : Potentiel créé par un cylindre uniformément chargé

Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur infinie, uniformément chargé en volume avec la densité ρ_0. Le champ créé peut se déterminer à partir du théorème de Gauss : nous l'avons fait au chapitre précédent. En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe du cylindre, il s'écrit

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul en $r = R$. Aurait-il été possible de choisir $V = 0$ à l'infini ?

Comme le champ ne dépend que de r alors le potentiel aussi (mêmes invariances). Gradient en cylindriques pour un champ scalaire ne dépendant que de r :

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r$$

Côté $r < R$:

$$V(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 + A$$

avec

$$V(r\!=\!R) \underbrace{=}_{\text{sol}} \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} R^2 + A \underbrace{=}_{\text{CL}} 0$$

d'où on conclut

$$\boxed{V(r < R) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(r^2 - R^2)\,.}$$

Côté $r > R$:

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + A'$$

avec

$$V(r\!=\!R) \underbrace{=}_{\text{sol}} \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln R + A' \underbrace{=}_{\text{CL}} 0$$

d'où on conclut

$$\boxed{V(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}\,.}$$

Espace 8

Que se passe-t-il en $r \to \infty$? Comment l'interpréter ?

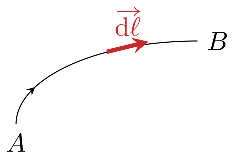
divergence : bizarrerie mathématique (non physique) liée à la modélisation (non physique également) par une distribution infinie.

Espace 9

Généralisation :

On ne peut pas imposer la valeur à l'infini du potentiel créé par une distribution infinie de charges.

b) Cas général : circulation du champ électrostatique



On appelle **circulation** d'un champ vectoriel $\vec{U}$ le long d'une courbe $\widehat{AB}$ l'intégrale

$$\mathcal{C} = \int_{\widehat{AB}} \vec{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est en tout point tangent à $\widehat{AB}$ et dirigé de A vers B.

> ***Remarque :*** *Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est parfois appelé vecteur « longueur élémentaire » ou « élément de longueur », par analogie avec le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Son expression est la même que celle du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$: la notation et le nom diffèrent car l'un est défini dans un contexte purement géométrique et l'autre dans un contexte mécanique.*

> ***Remarque :*** *vous avez déjà rencontré un exemple de circulation : le travail d'une force le long d'une trajectoire.*

Intermède mathématique : on appelle **différentielle** d'une fonction f de plusieurs variables sa variation infinitésimale $\mathrm{d}f$ sous l'effet d'une variation infinitésimale de toutes ses variables. Par exemple, pour une fonction de trois variables $f = f(x,y,z)$,

$$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) - f(x,y,z)$$

et par un (en fait trois) développement(s) limité(s) on comprend que

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y} \mathrm{d}z\,.$$

Dans le cas où f est une fonction des trois variables d'espace, on identifie alors

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\,.$$

Application à l'électrostatique : circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe $\widehat{AB}$.

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}V = -\left[V(B) - V(A)\right]\,.$$

Espace 10

On en déduit le résultat suivant :

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe $\widehat{AB}$
ne dépend que du potentiel aux points A et B, mais pas des détails de la courbe :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V(A) - V(B)\,.$$

Le champ électrostatique est dit **à circulation conservative**.

En particulier, la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée est toujours nulle,

$$\oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0\,.$$

$\rightsquigarrow$ définition électromagnétique de la tension électrique ! une ddp est une circulation d'un champ électrostatique.

Espace 11

> ***Remarque :*** *la dénomination est analogue à celle d'une force conservative, dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée, mais pas du détail de la trajectoire.*

On obtient ici une méthode générale de calcul du potentiel en un point M quelconque : calculer la circulation du champ le long d'une courbe allant d'un point de référence où le potentiel est connu jusqu'au point M.

I.3 - Interprétation énergétique

Raisonnons sur une particule ponctuelle de charge q_0 se trouvant au point M où règne le champ $\vec{E}(M)$.

Force subie par la particule : force de Lorentz électrostat $\vec{F} = q_0\vec{E} = -q_0\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$.

Travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -q_0\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(q_0 V)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\mathrm{d}(q_0 V)$$

Espace 12

Le travail élémentaire de la force de Lorentz s'identifie donc à la variation infinitésimale d'une énergie potentielle.

La force de Lorentz électrostatique dérive d'une énergie potentielle
reliée au potentiel électrostatique par

$$E_{\mathrm{p,L}} = q_0 V$$

Le potentiel étant défini à une constante additive près, cela se retrouve comme il se doit sur l'énergie potentielle.

> ***Remarque culturelle et un peu compliquée :*** *On peut se poser la question du lien entre cette approche par l'énergie potentielle et la densité volumique d'énergie électrostatique introduite dans le chapitre précédent ... et la réponse n'est pas immédiate. De façon générale, l'énergie totale d'un système $\mathcal{S}$ formé de la réunion de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ s'écrit*
>
> $$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + U_{1\leftrightarrow 2}$$
>
> *avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les énergies propres des sous-systèmes 1 et 2, et $U_{1\leftrightarrow 2}$ l'énergie d'interaction entre les deux sous-systèmes. Ici, on peut définir $\mathcal{S}_1$ comme étant la distribution de charges $\mathcal{D}$ qui crée le potentiel V et $\mathcal{S}_2$ comme la charge test q_0, qui ne fait pas partie de la distribution $\mathcal{D}$. L'énergie potentielle $q_0 V$ correspond alors au terme d'interaction $U_{1\leftrightarrow 2}$, alors que la densité d'énergie électrostatique est reliée à l'énergie propre $\mathcal{E}_1$ de la distribution $\mathcal{D}$.*

I.4 - Équation de Poisson

L'équation de Poisson est une équation locale qui relie directement le potentiel à ses sources, c'est-à-dire la distribution de charges.

Partir de MG puis écrire les composantes :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad -\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Espace 13

On appelle **laplacien** (scalaire) l'opérateur qui à un champ scalaire f associe le champ scalaire

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \underbrace{=}_{\text{cart.}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

L'opérateur laplacien scalaire s'applique à un champ scalaire et renvoie un champ scalaire.

Comme toujours, l'expression du laplacien ne se généralise pas aux autre systèmes de coordonnées.

Équation de Poisson :

Dans un milieu de densité volumique de charge ρ, le potentiel électrostatique vérifie

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Résoudre cette équation demande de connaître des conditions aux limites. Lorsque c'est le cas, il s'agit d'une méthode très efficace pour déterminer le potentiel et donc le champ en tout point de l'espace : nous le ferons en TP d'informatique.

> ***Remarque :*** *dans le vide, l'équation de Poisson devient $\Delta V = 0$, que l'on appelle équation de Laplace.*

II - Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Une **ligne de champ** est une courbe en tout point tangente au champ électrostatique, orientée dans le sens du champ. Une **surface équipotentielle** ou **isopotentielle** est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique a la même valeur en tout point.

II.1 - Direction du champ et sens de variation de potentiel

Les lignes de champ électrostatiques sont orthogonales aux équipotentielles.

Il s'agit d'une conséquence d'une propriété mathématique générale concernant le gradient : le gradient d'une fonction est orthogonal aux surfaces où cette fonction est constante.

> ***Complément : démonstration « physique »***
>
> *Considérons deux points M et M' infiniment proches, ce qui permet approximer leur différence de potentiel par une différentielle, puis de la relier au gradient :*
>
> $$V(M') - V(M) = dV = \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{MM'}\,.$$
>
> *Si ces deux points se trouvent sur la même équipotentielle alors $V(M) = V(M')$, et en combinant avec la définition du potentiel électrostatique on obtient*
>
> $$\vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$
>
> *ce qui montre que $\vec{E}(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$. Le point M' étant quelconque, ce résultat est vrai pour tout point M' infiniment proche de M sur son équipotentielle, autrement dit pour tout vecteur $\overrightarrow{MM'}$ tangent à l'équipotentielle passant par M.*
>
> *On en déduit que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à l'équipotentielle passant par M, et donc que la ligne de champ associée l'est aussi.*

L'orthogonalité indique la *direction* des lignes de champ, mais pas leur *sens*.

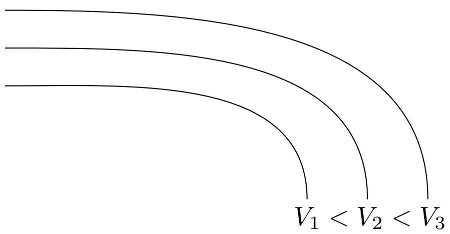
⇝ sens du gradient d'un champ scalaire :
le gradient pointe dans la direction où ce champ augmente le plus.

Espace 14

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$,

Le champ électrostatique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Espace 15



Conséquence : comme les lignes de champ ne peuvent pas « remonter » les potentiels,

Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée.

Espace 16

⇝ où sont situés le début et la fin ?

II.2 - Voisinage des charges électriques

- **Pour le champ**

Exemple d'une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

- $q > 0$
- $q < 0$

Généralisation :

Les lignes de champ électrostatique « partent » des charges positives
et « se terminent » sur les charges négatives.

> ***Remarque :*** *Si les lignes de champ se coupent en un point, deux cas sont possibles :*
> ▷ *si elles sont toutes convergentes ou toutes divergentes alors il y a une charge ponctuelle en ce point ;*
> ▷ *si elles ne sont que sécantes alors le champ électrostatique y est nul.*

- **Pour le potentiel**

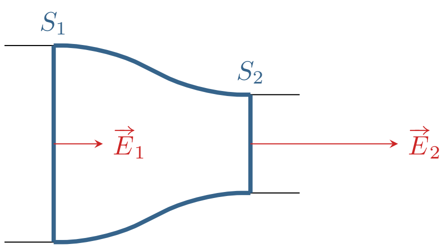
Exemple d'une charge ponctuelle :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Les extrema locaux de potentiel se trouvent au niveau des charges électriques :
maximum au niveau d'une charge positive, minimum au niveau d'une charge négative.

II.3 - Intensité du champ

a) À partir des lignes de champ



Raisonnons sur un **tube de champ**, c'est-à-dire une surface délimitée par un ensemble de lignes de champ, tronqué par deux sections droites orthogonales. On le suppose suffisamment fin pour pouvoir approximer que le champ est uniforme sur les deux sections droites. On suppose également se placer dans une zone vide de charge : $\rho = 0$.

Traduction à l'échelle locale :

en tout point du tube de champ, $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

Espace 17

Conséquence à l'échelle gloable : en tout point, $\oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ Flux sortant nul sur les surfaces latérales, donc tout simplement

$$\oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -S_1E_1 + S_2E_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{S_1}{S_2}\,.$$

Espace 18

Un resserrement des lignes de champ dans une zone vide de charge
traduit un champ électrique plus intense.

Conséquence de la conservation du flux entre l'entrée et la sortie, elle-même conséquence d'un champ de divergence nulle en tout point.

> ***Remarque :*** *nous avons en fait déjà rencontré ce résultat en mécanique des fluides : un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse d'un écoulement incompressible ... pour lequel* div $\vec{v} = 0$.

Attention ! Ce résultat n'est plus vrai à l'intérieur d'une distribution de charge où $\rho \neq 0$.

b) À partir des équipotentielles

Par définition le champ est relié aux dérivées du potentiel : il est donc élevé là où le potentiel varie fortement. Dans une image en lignes de niveau, on comprend que ces variations rapides se traduisent graphiquement par des équipotentielles rapprochées.

Un resserrement des équipotentielles traduit un champ électrique plus intense.

III - Modélisation électrostatique d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices se faisant face séparées par un isolant.

III.1 - Modèle du condensateur plan infini

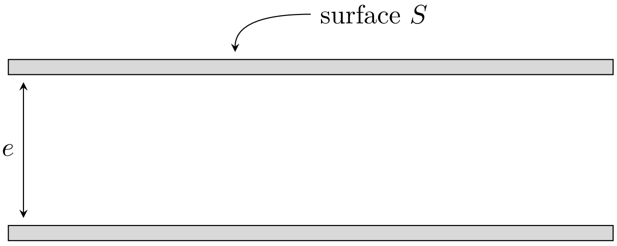
Modèle simple : condensateur plan infini. compléter schéma avec $+Q$ en haut, $-Q$ en bas + tracer LDC

- « condensateur plan » : armatures planes de même surface S, distantes de e ;
- « condensateur infini » :

distance entre armatures très faible devant leur taille, soit $e \ll \sqrt{S}$, + modèle surfacique des armatures.

Espace 19

- les armatures sont supposées **en influence totale** : toute ligne de champ issue d'une armature aboutit sur l'autre, ce qui implique que les deux armatures portent une charge exactement opposées ;
- l'isolant est assimilié au vide.



III.2 - Champ électrique créé par le condensateur

Méthode :

le condensateur est composé de deux plans infinis ... or on connaît le champ créé par un tel plan : raisonnement par superposition

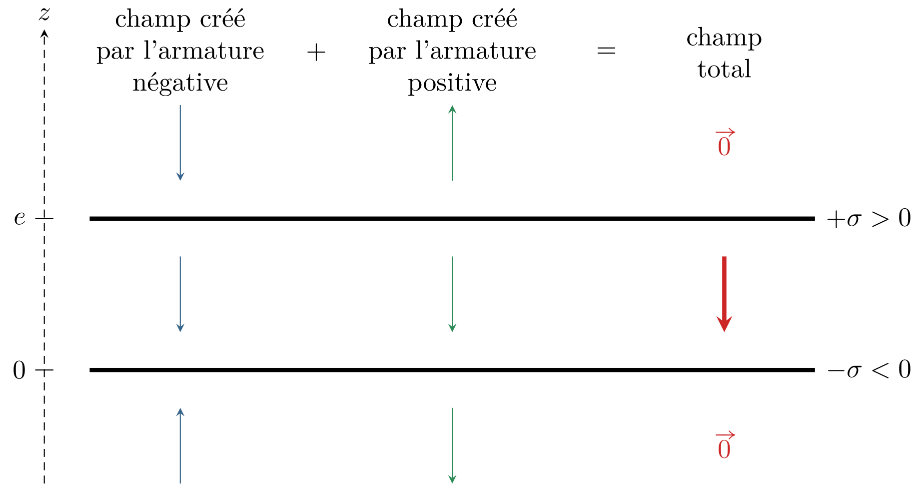
Espace 20

Rappel : le champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé en surface avec une densité σ_0, de normale $\vec{e}_z$, situé en $z = z_0$, est uniforme par morceaux et vaut

$$\vec{E} = \operatorname{sgn}(z - z_0)\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_z$$

où sgn désigne la fonction signe.

⇝ les deux armatures plans découpent l'espace en trois domaines dans lesquels le champ est uniforme.



Le champ créé par un condensateur plan infini est nul à l'extérieur du condensateur et uniforme à l'intérieur, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, et de norme $\sigma/\varepsilon_0 = Q/S\varepsilon_0$.

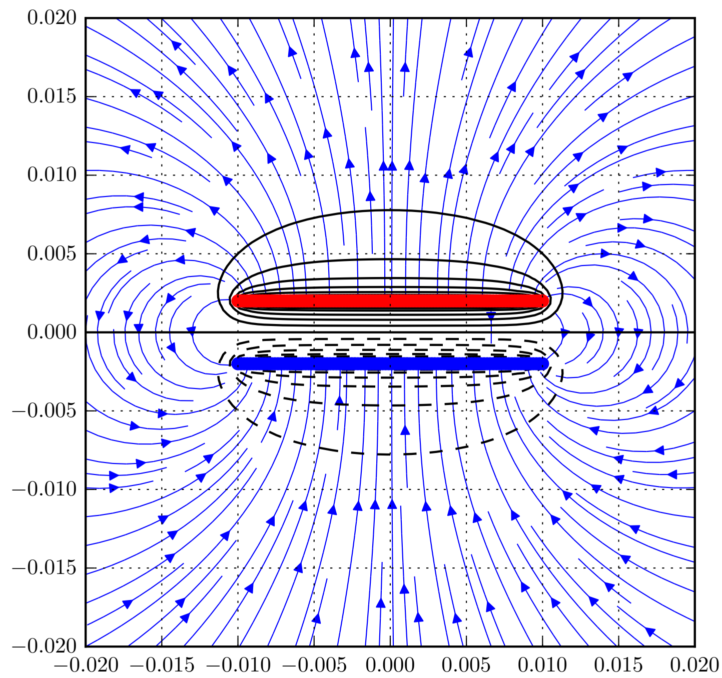
> ***Remarque :*** *on retrouve des discontinuités du champ au passage des plans chargés en surface, conformément à la relation de passage.*

Retour sur l'hypothèse d'armatures infinies : la figure ci-dessous représente les lignes de champ et les équipotentielles créées par un condensateur plan de taille finie, simulé numériquement comme une juxtaposition de charges ponctuelles.

⇝

les effets de bord ont un effet notable sur le champ à l'intérieur du condensateur sur une distance de l'ordre de l'épaisseur interarmatures

Espace 21



III.3 - Capacité

a) Approche par la charge

On appelle **capacité d'un condensateur** la grandeur C telle que

$$Q = C\,U$$

où $Q = \sigma S > 0$ est la charge totale portée par l'armature positive
et $U > 0$ est la tension entre les deux armatures du condensateur, positive par convention.

⇝ déterminer la capacité du condensateur dans cette approche demande de calculer la tension à ses bornes en fonction de la densité de charge σ_0 sur les armatures.

▷ Calcul du potentiel par intégration du champ :

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + \text{cte}\,.$$

Espace 22

▷ Expression de la tension en fonction de Q :

$$U = V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = \frac{Q_0 e}{\varepsilon_0 S}\,.$$

Espace 23

▷ Conclusion :

$$C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}\,.$$

Espace 24

Inconvénient de cette méthode : comme la définition utilisée pour C fait intervenir explicitement la charge Q, il faut forcément passer par l'expression du champ électrostatique, ce qui peut être long à redémontrer.

b) Approche énergétique

On appelle **capacité d'un condensateur** la grandeur C telle que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie électrostatique totale stockée dans le condensateur
et $U > 0$ est la tension entre les deux armatures du condensateur, positive par convention.

⇝ avantage de cette approche : il suffit d'exprimer le champ électrostatique en fonction de la tension aux bornes du condensateur, sans faire intervenir explicitement la charge.

▷ Équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = 0 \text{ soit par double intégration } \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = E_z = A = \text{cte (puis } V(z) = Az + B \text{ mais inutile ici)}$$

Espace 25

▷ Expression du champ en fonction de la tension :

$$\int_{V_-}^{V_+} \mathrm{d}V = A \int_0^e \mathrm{d}z \text{ soit } U = Ae \text{ et ainsi } E_z = \frac{U}{e}.$$

Espace 26

▷ Calcul de l'énergie électrostatique :

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{e^2} \times Se$$

Espace 27

▷ Conclusion :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}U^2 \text{ donc } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}.$$

Espace 28

c) Conclusion

La capacité d'un condensateur plan vaut

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Elle ne dépend que de la géométrie du condensateur,
mais pas de la charge qu'il porte ni de la tension à ses bornes.

Dans le cadre d'un sujet de concours, ces deux approches peuvent être utilisées de manière équivalente ... mais il faut maîtriser les deux et suivre scrupuleusement l'énoncé, car elles peuvent être imbriquées : par exemple, il peut vous être demandé d'établir l'expression de C en raisonnant sur la charge puis dans un second temps d'établir la relation entre énergie électrostatique et capacité.

> ***Remarque :*** *Si l'isolant entre les armatures n'est pas du vide, il faut remplacer tout au long du calcul la permittivité diélectrique du vide ε_0 par la permittivité diélectrique ε de l'isolant qu'on écrit sous la forme*
>
> $$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r\,.$$