BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

TD 8 – Électromagnétisme

Potentiel électrostatique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

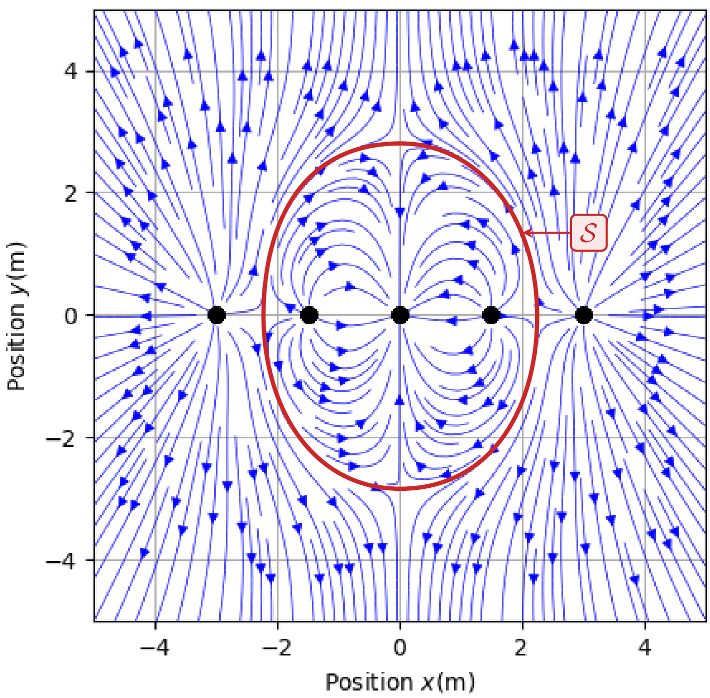
Questions de cours

8.1 - Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan. La méthode utilisée sera choisie par l'interrogateur :

- En passant par les charges : l'expression du champ créé par un plan infini chargé en surface avec densité σ sera rappelée sans démonstration par l'étudiant qui l'utilisera comme point de départ de la démonstration ;
- En passant par l'énergie électrostatique : l'étudiant utilisera l'équation de Poisson pour relier le champ électrostatique à la tension aux bornes du condensateur, puis l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique.

Exercice 1 : Lecture d'une carte de champ 2 | 0

- *Lignes de champ ;*
- *Symétries du champ électrostatique.*



On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées 1 à 5 de gauche à droite. La surface $\mathcal{S}$ sera discutée dans les questions.

1 - Donner le signe de chacune des charges.

2 - Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.

3 - On admet que le champ est nul en tout point de la surface $\mathcal{S}$: comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?

4 - En déduire q_3 en fonction des autres charges.

Exercice 2 : Potentiel créé par une sphère uniformément chargée 1 | 1 |

- ▷ *Lien entre champ et potentiel ;*
- ▷ *Coordonnées sphériques.*

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé un champ calculable par le théorème de Gauss

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\,\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel associé.

Exercice 3 : Charge en surface d'un semi-conducteur oral banque PT | 1 | 2 |

- ▷ *Équation de Maxwell-Gauss ;*
- ▷ *Théorème de Gauss ;*
- ▷ *Lien entre champ et potentiel.*

Dans le domaine $x > 0$ se trouve un semi-conducteur chargé en volume selon une densité $\rho(x)$ et en surface selon une densité σ_0 uniforme. Le champ électrique dans ce semi-conducteur s'écrit $\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\vec{u}$ avec $E_0 > 0$, $\ell > 0$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Le champ électrique est nul dans le domaine $x < 0$.

1 - Déterminer la direction $\vec{u}$ du champ électrostatique.

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans les deux domaines $x < 0$ et $x > 0$.

3 - Énoncer le théorème de Gauss. En déduire l'expression de σ_0.

4 - Déterminer le potentiel électrostatique en $x = 0$. On le supposera nul pour $x \to \infty$.

Exercice 4 : Potentiel de Yukawa 2 ou 3 | 2

- ▷ *Lien entre champ et potentiel ;*
- ▷ *Théorème de Gauss ;*
- ▷ *Coordonnées sphériques.*

> *Le début de l'exercice est classique et d'un niveau très raisonnable, en revanche la dernière question est nettement plus difficile.*

Le potentiel électrostatique créé par un atome d'hydrogène supposé à symétrie sphérique peut être décrit par le potentiel de Yukawa,

$$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}\,.$$

Cet exercice propose d'interpréter cette forme.

1 - Étudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$. Interpréter les résultats.

2 - Déterminer le champ électrostatique associé.

3 - Déterminer la charge $q(r)$ se trouvant à l'intérieur d'une sphère de rayon r.

4 - En déduire la présence d'une charge ponctuelle en O. Que modélise-t-elle ? Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace. Interpréter.

Dans une approche quantique de l'atome, l'électron ne peut plus être décrit comme une particule ponctuelle parfaitement localisée en un point M mais par une fonction d'onde, qui traduit la probabilité de le détecter autour de M : on note $P(M)\,\mathrm{d}\tau$ la probabilité de détecter l'électron dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}\tau$ centré sur le point M. La densité volumique de probabilité de présence $P(M)$ est reliée à la densité volumique de charge $\rho(M)$ par

$$\rho(M) = -eP(M)\,.$$

5 - Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ et en déduire $P(r)$.

6 - En exploitant la question 3, montrer que la probabilité $\mathrm{d}P = p(r)\,\mathrm{d}r$ de trouver l'électron dans une coquille sphérique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ s'écrit

$$\mathrm{d}P = \frac{4\pi r^3}{a^2}\,\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\,.$$

Montrer que $p(r)$ est maximale en $r = a$. Que représente physiquement a ?

Donnée : pour $\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u}_r$, $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right)$.

Exercice 5 : Électro-érosion par fil — 2 | 2

- *Théorème de Gauss ;*
- *Lien entre champ et potentiel.*

L'électro-érosion est un procédé d'usinage qui consiste à enlever de la matière dans une pièce en utilisant des décharges électriques. Le processus est assez lent mais très précis : la précision sur la cote désirée peut atteindre 2 µm. Il s'agit de faire pénétrer un fil conducteur dans une pièce métallique massive tout en imposant une différence de potentiel entre eux, l'ensemble étant plongé dans un liquide isolant, généralement de l'huile. Lorsque le fil est suffisamment proche de la surface de la pièce, un arc électrique apparaît entre le fil et la pièce, qui se creuse au niveau du point d'impact de l'arc. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'ordre de grandeur de la tension à imposer entre le fil et la pièce pour que les arcs électriques puissent apparaître, ce qui nécessite que le champ électrique soit supérieur à $E_{\mathrm{rupt}} = 100\,\mathrm{kV\cdot cm^{-1}}$ tout le long de l'arc.

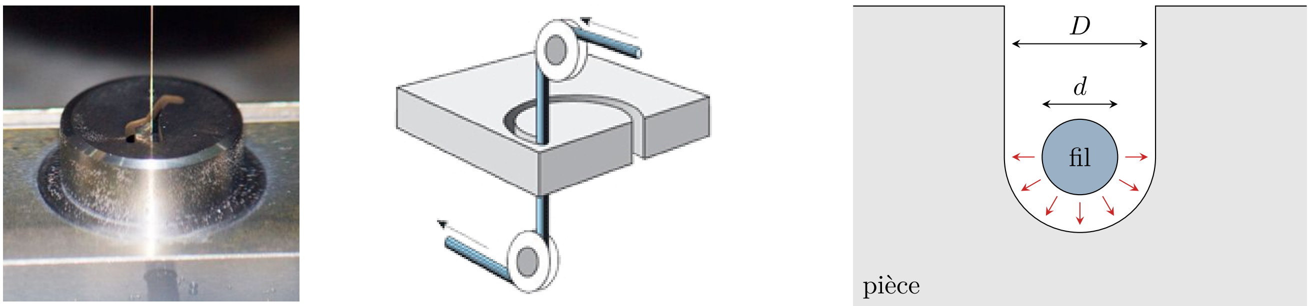


Figure 1 – Électro-érosion par fil. Gauche : pièce usinée par électroérosion par fil. Centre : schéma de principe du dispositif. Droite : vue de dessus de l'entaille dans la pièce usinée.

Le fil possède un diamètre d et une longueur suffisante pour négliger les effets de bords. Il créé dans la pièce une entaille de largeur D. Au fond de l'entaille, le champ électrique entre le fil et la pièce est approximativement radial et ne dépendant que de la distance r au centre du fil. On fera l'hypothèse que le champ créé par le fil vérifie ces propriétés sur tout le demi-cylindre correspondant au fond de l'entaille, dans lequel sont représentées les flèches sur la figure 1. L'huile présente entre le fil et la pièce se comporte comme le vide du point de vue électrostatique à condition de remplacer la permittivité diélectrique du vide ε_0 par celle de l'huile, notée $\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}$, où la permittivité relative de l'huile ε_{r} est sans dimension.

Donnée : $\ln 2 \simeq 0{,}7$.

1 - Montrer par le théorème de Gauss que le champ électrique dans le fond de l'entaille est de la forme

$$\overrightarrow{E} = \frac{K}{r}\,\overrightarrow{e}_r\,.$$

2 - La pièce étant reliée à la masse, déterminer la constante K en fonction de D, d et du potentiel U imposé au fil.

3 - Déterminer la tension minimale U_{min} à appliquer au fil pour pouvoir faire une entaille de diamètre $D = 10\,\mathrm{\mu m}$ avec un fil de diamètre $d = 5\,\mathrm{\mu m}$.

En pratique, le fil provenant d'une bobine est déroulé entre deux poulies et c'est la pièce à découper qui effectue des mouvements préalablement programmés par ordinateur.

4 - Pourquoi faut-il dérouler la bobine au fur et à mesure de l'usinage de la pièce ?

Exercice 6 : Puissance transportée par un éclair

oral banque PT | 2 | 2

- *Théorème de Gauss ;*
- *Condensateur ;*
- *Coordonnées sphériques.*

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + h$ ($h = 60$ km) porteuse d'une charge $+Q$. Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

1 - Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.

2 - Calculer le potentiel V de l'ionosphère.

3 - Déterminer la capacité C de ce condensateur.

4 - Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. Calculer C numériquement.

5 - Un éclair correspond à un courant moyen de 30 kA pendant 25 ms. Quelle est sa puissance ?

Exercice 7 : Capteur capacitif de niveau de liquide

2 | 2 |

- *Équation de Poisson ;*
- *Condensateur ;*
- *Énergie électrostatique ;*
- *Coordonnées cylindriques.*

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs, dont plusieurs sont présentés dans la vidéo ci-contre (flasher ou cliquer sur le QR code). Cet exercice propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible, voir figure 2. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

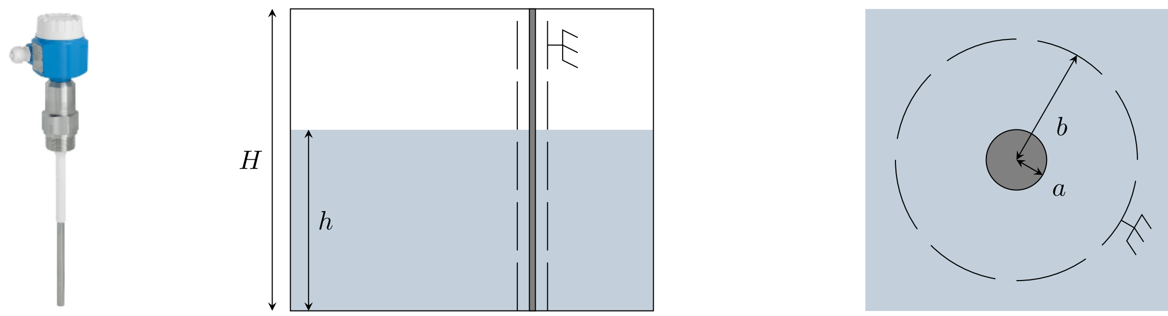


Figure 2 – Sonde à tube de masse.

Hypothèses utilisées dans tout l'exercice :

- les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du liquide $\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}$, où ε_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.

Donnée : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,.$$

1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.

3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.

4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H.

5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

6 - La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (solution aqueuse par exemple) ?

Exercice 8 : Floculation d'une suspension colloïdale

oral banque PT | 3 | 3

- *Équation de Poisson ;*
- *Lien entre champ et potentiel.*

On s'intéresse aux mécanismes de traitement des eaux usées, et plus particulièrement à la floculation des particules colloïdales en solution aqueuse.

Document 1 : Phénomène de floculation

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à 1 µm) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible.

La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées flocs. Les flocs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

Adapté de Wikipédia

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O, de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont $N_+(r) = N_0\,\mathrm{e}^{-zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les cations (charge $+ze$, $z = 2$ ou 3 en pratique) et $N_-(r) = N_0\,\mathrm{e}^{+zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les anions (charge $-ze$), avec N_0 une constante, V le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. On suppose $|zeV(r)| \ll k_\mathrm{B}T$.

Donnée : laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV) \,.$$

1 - Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié.

3 - Déterminer une expression du potentiel électrostatique V.

4 - Montrer que le champ électrique est de la forme

$$E(r) = \frac{K}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta} \,.$$

Déterminer K en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.

5 - Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.