

# Champ magnétique statique et lentement variable

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Ce que vous savez déjà</b>	<b>3</b>
I.1	Sources de champ magnétique et lignes de champ . . . . .	3
I.2	Force de Lorentz magnétique . . . . .	4
I.3	Principe de superposition . . . . .	4
I.4	Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Des propriétés des distributions de courant à celles du champ magnétostatique</b>	<b>6</b>
II.1	Symétries de la distribution de courant, direction du champ magnétostatique . . . . .	6
II.2	Invariances de la distribution de courant, variables du champ magnétostatique . . . . .	8
<b>III</b>	<b>Théorème d'Ampère</b>	<b>9</b>
III.1	Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Ampère . . . . .	9
III.2	Exemple : champ créé par un cylindre parcouru par un courant uniforme . . . . .	10
III.3	Exemple : champ créé par un solénoïde infini . . . . .	10
<b>IV</b>	<b>Flux magnétique</b>	<b>11</b>
IV.1	Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux magnétique. . . . .	11
IV.2	Flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur un contour fermé . . . . .	12
IV.3	Loi de Faraday . . . . .	13
IV.4	Flux propre et inductance propre . . . . .	14
<b>V</b>	<b>Énergie magnétique</b>	<b>15</b>
V.1	Densité volumique d'énergie magnétique . . . . .	15
V.2	Définition énergétique de l'inductance. . . . .	16

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 2 « Magnétostatique ».

L'étude de la magnétostatique menée dans le bloc 2 s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de PTSI, les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue. Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait. On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ magnétostatique. Principe de superposition.	Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques.  Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ magnétostatique par superposition.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants.  Identifier les invariances d'une distribution de courants.  Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère.
Applications au fil rectiligne infini de section non nulle et au solénoïde infini.	Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de courants par une distribution infinie. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume et par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de ligne de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. <b>Approche numérique</b> : représenter des cartes de lignes de champ magnétostatique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Dans le bloc 3, une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Le cadre adopté est celui de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques où les effets des distributions de courants dominent ceux des distributions de charges. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme des cas particuliers des équations de Maxwell.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Écrire et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ou quasi-permanents) magnétique.	Comparer une durée typique d'évolution des sources à une durée de propagation de l'onde électromagnétique.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : jamais ces cinq dernières années (mais en 2013, 2014 et 2015).
- ▷ Oral : de temps en temps.

Dans ce chapitre, nous abordons les principales propriétés du champ magnétique en régime stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. Nous verrons également qu'elles se généralisent au cas des régimes lentement variables, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques.

## I - Ce que vous savez déjà

### I.1 - Sources de champ magnétique et lignes de champ

Les sources de champ magnétostatique sont les courants électriques constants et la matière aimantée. Les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources, voir figure 1.

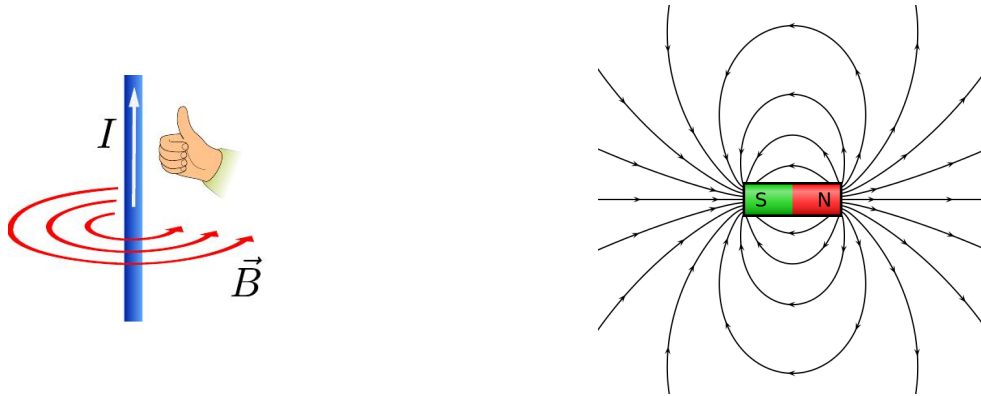


Figure 1 – Lignes de champ magnétique créées par un fil et un aimant droit.

Champ créé par un courant :

Le sens d'enroulement d'une ligne de champ magnétique est relié au sens du courant qui le crée par la règle de la main droite.

Espace 1

Champ créé par un aimant permanent :

Les lignes de champ magnétique sont orientées du pôle nord vers le pôle sud.

Espace 2

Si on connaît la direction du champ magnétique, on peut également retrouver le sens du courant qui le crée par la règle de la main droite, voir figure 2.

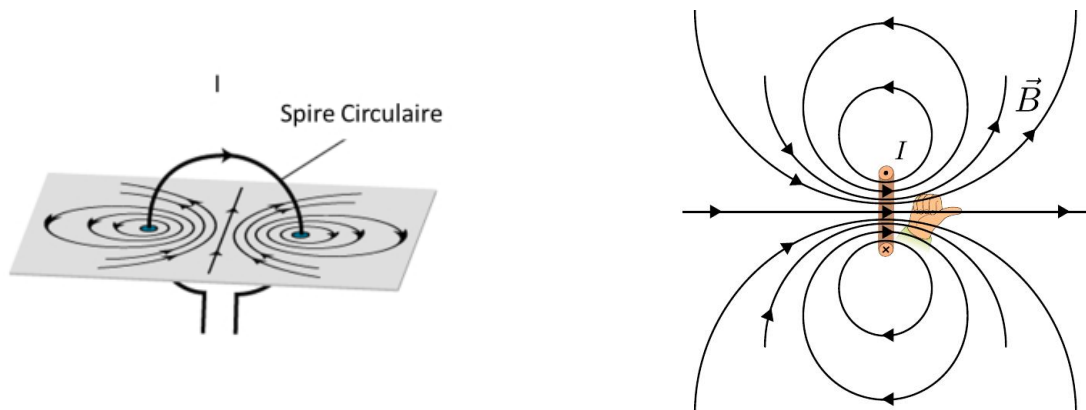


Figure 2 – Lignes de champ magnétique créées par une spire.

Les champs magnétiques s'expriment en Tesla T. Le tableau figure 3 récapitule certains ordres de grandeur.



Un champ magnétique de 1 T est un champ fort.

Exemple	Données	Ordre de grandeur de $\ \vec{B}\ $
Bobine parcourue par un courant $I$ , $n$ spires par unité de longueur	$I = 10 \text{ A}$ , $n = 10 \text{ mm}^{-1}$ , sur l'axe de la bobine	$\ \vec{B}\  = \mu_0 n I \simeq 10^{-1} \text{ T}$
Aimant permanent au néodyme	à la surface	0,1 à 1 T
Champ magnétique terrestre	à la surface de la Terre	$\simeq 10^{-4} \text{ T}$
Machine d'IRM		$\simeq 5 \text{ T}$
Champ magnétique pulsé (électroaimant, production pendant qq ms)		$\simeq 100 \text{ T}$
Étoile à neutron	à la surface	$\simeq 10^{11} \text{ T}$

Figure 3 – Ordres de grandeur de champs magnétiques.

## 1.2 - Force de Lorentz magnétique



Une particule test de charge  $q_0$  placée en  $M$  et en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  subit la **force de Lorentz magnétique**

$$\vec{F}_L = q_0 \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M)$$

Espace 3

↪ cette force permet une définition « mécanique » du champ magnétostatique en termes de force par unité de charge, mais elle moins simple à donner que celle du champ électrostatique par la force de Lorentz électrique.

**Remarque :** elle sous-entend également que le champ magnétique dépend du référentiel dans lequel il est calculé.

## 1.3 - Principe de superposition

Comme au chapitre précédent, le principe d'additivité des forces permet de comprendre le principe de superposition des champs magnétiques.



### Principe de superposition :

Le champ magnétique créé par la réunion de plusieurs distributions de courants est la somme des champs créés par chacune des distributions prises individuellement.

D'un point de vue plus fondamental, ce principe de superposition vient de la linéarité des équations de Maxwell.

## 1.4 - Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques

### • Comparaison des échelles de temps

La variation d'une source de champ ( $\rho$  ou  $\vec{j}$ ) en un point  $P$  va modifier les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en ce point, et de proche en proche le champ électromagnétique en tout point  $M$  de l'espace. Ces modifications se transmettent sous forme d'une **onde électromagnétique**, à la célérité  $c$  dans le vide.

↪ durée nécessaire pour atteindre un point  $M$  :  $\tau = PM/c$

Cette durée peut-elle être suffisamment courte pour être négligée ?

Tout dépend de l'échelle temporelle à laquelle on se place : il faut comparer  $\tau$  au temps (ou à la fréq) caractéristique d'évolution des sources.

Espace 4



L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou quasi-permanents) consiste à négliger le temps  $\tau$  de propagation de l'onde électromagnétique au travers du système devant le temps caractéristique  $T$  de variation des sources de champ,

$$\tau \ll T$$

**Exemple :** Considérons un circuit électronique de TP, de longueur  $\ell \sim 30$  cm, alimenté par une tension de fréquence 1 kHz.

▷ Temps de propagation de l'onde électromagnétique :

$$\tau = \frac{\ell}{c} = 1 \text{ ns}$$

Espace 5 ;

▷ Temps caractéristique de variation des sources de champ :  $T = 1$  ms

Espace 6

Conclusion :

ARQS applicable, on peut considérer que tout point du circuit est informé instantanément des variations imposées par le générateur.

Espace 7

### • Comparaison des effets des charges et des courants

De plus, pour un système donné, les charges électriques (via  $\rho$ ) et les courants électriques (via  $\vec{j}$ ) ont une importance relative généralement différente.

↪ la plupart du temps, l'effet des charges est négligeable devant celui des courants.

La combinaison de cette hypothèse avec celle d'ARQS forme l'**ARQS magnétique**.



Toutes les propriétés des champs magnétostatiques demeurent vraies dans l'ARQS magnétique.

En effet, nous justifierons que les équations de Maxwell relatives au champ magnétique sont identiques en régime « rigoureusement » stationnaire et quasi-stationnaire.

Le condensateur constitue une exception notable à l'ARQS magnétique. En effet, il n'y a aucun courant dans l'isolant et seulement des charges électriques sur les armatures, donc l'effet des charges l'emporte sur celui des courants. Calculer le champ magnétique au sein d'un condensateur en régime variable ne peut donc pas se faire à l'aide des outils développés dans ce chapitre ... mais nous n'aurons jamais besoin de le faire. On se contentera d'admettre que le champ électrique au sein d'un condensateur et les calculs qui en découlent (potentiel, capacité) sont inchangés en régime lentement variable par rapport au régime statique.

## II - Des propriétés des distributions de courant à celles du champ magnéostatique

### II.1 - Symétries de la distribution de courant, direction du champ magnéostatique

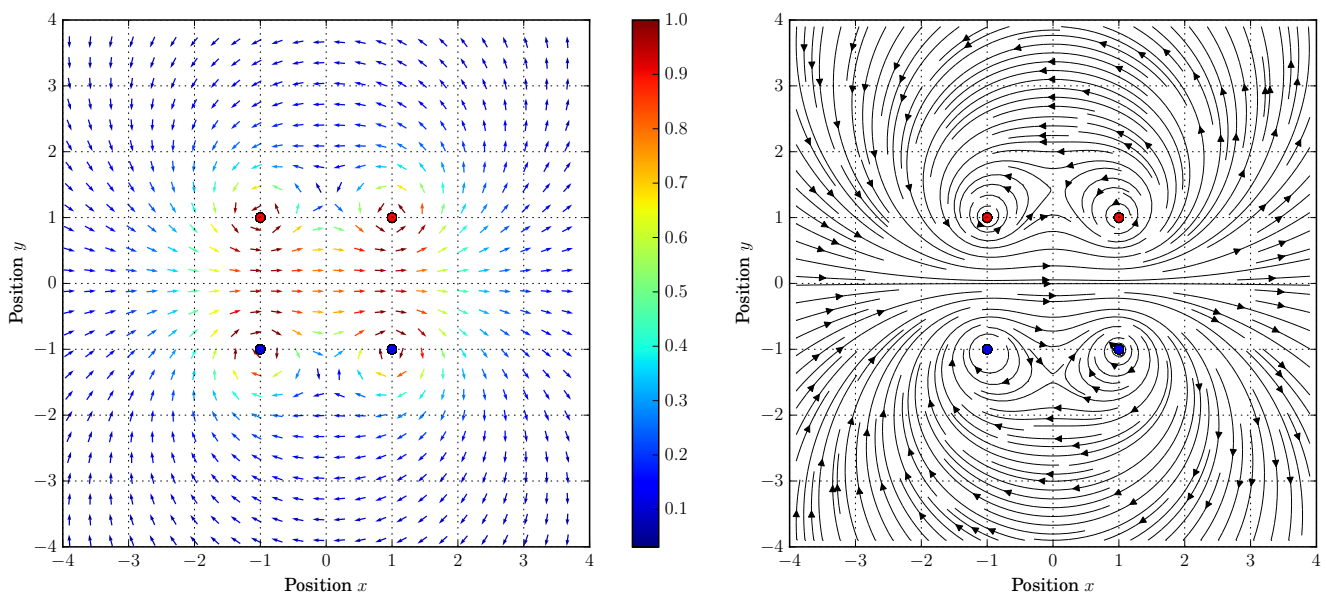
Il existe une loi analogue à la loi de Coulomb qui permet de calculer le champ magnéostatique en tout point par intégration sur la distribution volumique de courants, appelée loi de Biot et Savart (hors programme en PT). Cette loi permet de démontrer toutes les propriétés ci-dessous, que nous nous contenterons de constater par observation de cartes de champ magnétique.

#### a) Effet d'un plan de symétrie de la distribution de courant

Une distribution de courant possède un **plan de symétrie**  $\Pi_s$  lorsque les densités de courant en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_s$  sont symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}(P') = \text{sym}_{\Pi_s} \vec{j}(P) \iff \begin{cases} \vec{j}_{\parallel}(P) = \vec{j}_{\parallel}(P') \\ \vec{j}_{\perp}(P) = -\vec{j}_{\perp}(P') \end{cases}$$

Observation d'une carte de champ : voir figure 4.



**Figure 4 – Champ magnétique créé par une distribution de quatre courants.** Les points notent des courants portés par des fils rectilignes orthogonaux à la feuille. Tous ces courants sont égaux. Toutes les valeurs ont été normalisées.

Sens des courants :

D'après la RMD, les deux courants du haut sortent de la figure et les deux courants du bas s'enfoncent dans la figure.

Espace 8

Identification d'un plan de symétrie :

Le plan  $x = 0$  est plan de symétrie de la distribution.

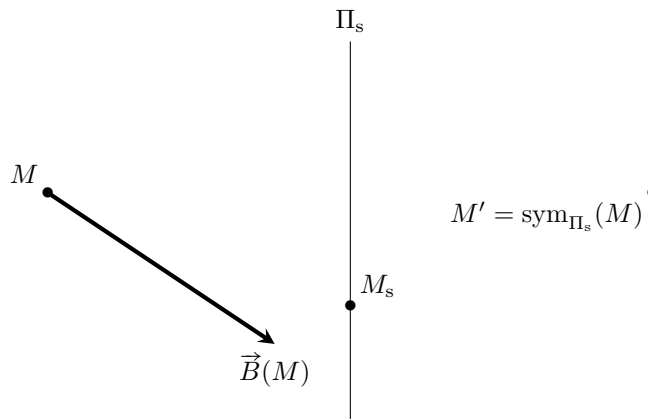
Espace 9

**Généralisation :** considérons une distribution de courant possédant un plan de symétrie  $\Pi_s$ .

Les champs magnétostatiques  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$  en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_s$  sont **anti-symétriques** par rapport à  $\Pi_s$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi_s}(\vec{B}(M)) \iff \begin{cases} \vec{B}_\perp(M') = \vec{B}_\perp(M) \\ \vec{B}_\parallel(M') = -\vec{B}_\parallel(M) \end{cases}$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_s)$  en un point  $M_s$  appartenant au plan  $\Pi_s$  est orthogonal à ce plan.



**Attention !** La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique. Rappelons qu'être « anti-symétrique » signifie être « l'opposé du symétrique ».

**Cas particulier important :**

Si la distribution de courant est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

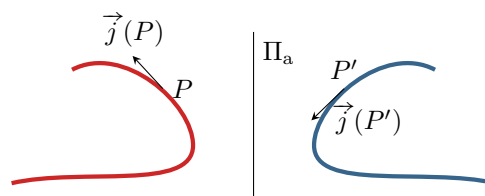
En effet : notons  $\Pi_0$  le plan de la distribution.

- ▷ pour deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_0$ , on a bien  $\vec{j}(P) = \vec{j}(P') = \vec{0}$  ;
- ▷ un point  $P_0$  appartenant au plan  $\Pi_0$  est son propre symétrique, et il est évident que  $\vec{j}(P_0) = \vec{j}(P_0)$  !

**b) Effet d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant**

Une distribution de courant possède un **plan d'anti-symétrie**  $\Pi_a$  lorsque les densités de courant en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_a$  sont anti-symétriques l'une de l'autre,

$$\vec{j}(P') = -\text{sym}_{\Pi_a} \vec{j}(P) \iff \begin{cases} \vec{j}_\parallel(P) = -\vec{j}_\parallel(P') \\ \vec{j}_\perp(P) = +\vec{j}_\perp(P') \end{cases}$$



**Observation d'une carte de champ :** voir figure 4.

Identification d'un plan d'anti-symétrie :

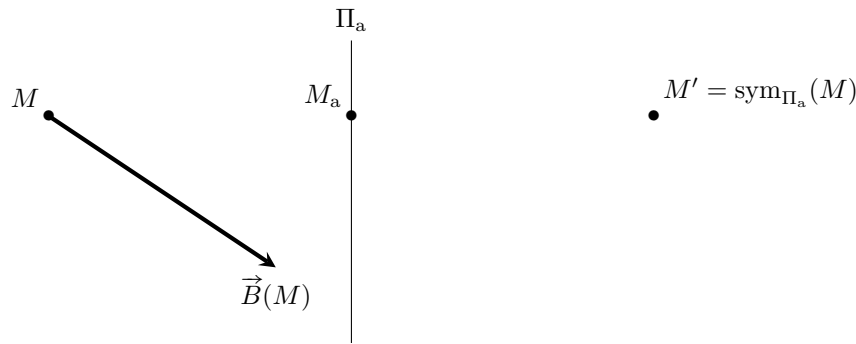
Le plan  $y = 0$  est plan de symétrie de la distribution.

**Généralisation** : considérons une distribution de courant possédant un plan de symétrie  $\Pi_s$ .

Les champs magnétostatiques  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$  en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_a$  sont **symétriques** par rapport à  $\Pi_a$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi_a}(\vec{B}(M)) \iff \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{B}_{\parallel}(M') = \vec{B}_{\parallel}(M) \end{cases}$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_a)$  en un point  $M_a$  appartenant au plan  $\Pi_a$  est inclus dans ce plan.



🔴🔴🔴 **Attention !** La propriété de symétrie est inversée par rapport au champ électrostatique.

## II.2 - Invariances de la distribution de courant, variables du champ magnétostatique

Exactement comme une distribution de charge, une distribution de courant peut présenter deux types d'invariance : par rotation et par translation.

**Exemple de distribution invariante par translation :**

fil infiniment long, qu'il s'agisse d'un fil infiniment fin ou d'un fil cylindrique épais parcouru par un courant axial. Le faire dessiner et dessiner  $\vec{j}$  en deux points  $P$  et  $P'$  de la distribution

Espace 11

**Exemple de distribution invariante par rotation :**

le fil fin l'est, le fil épais aussi. Autre exemple : cylindre avec distribution de courant orthoradiale. Le faire dessiner et faire dessiner  $\vec{j}$  en deux points  $P$  et  $P'$ .

Espace 12

🔴🔴🔴 **Attention !** Ne pas confondre :  $\vec{j}(P) \neq \vec{j}(P')$  car la direction change au cours de la rotation.



Les invariances des distributions ont les mêmes conséquences en électrostatique et magnétostatique : dans un système de coordonnées adapté, elles rendent le champ indépendant d'une ou plusieurs variables.



### III - Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est un théorème intégral qui permet un calcul du champ magnétique créé par une distribution de haute symétrie.

#### III.1 - Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Ampère

Les ingrédients sont les mêmes que pour le théorème de Gauss : une équation de Maxwell locale et un théorème d'analyse vectorielle donnent un théorème intégral.

##### a) Équation de Maxwell Ampère

**Équation de Maxwell-Ampère :**

$$\text{En tout point } M \text{ de l'espace, } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$



Espace 13

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la **perméabilité magnétique du vide**.

Dans le cas particulier du régime stationnaire,

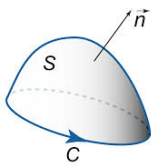
$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

##### Contenu physique :

- ▷ des courants créent un champ magnétique ;
- ▷ en régime variable, un couplage existe entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , mais il disparaît en régime stationnaire.

##### b) De l'équation de Maxwell-Ampère au théorème d'Ampère en régime stationnaire

**Théorème de Stokes :** joue un rôle analogue au théorème de Green-Ostrogradski.



Soit  $\mathcal{S}$  une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé  $\mathcal{C}$ , orientés l'un par rapport à l'autre par la règle de la main droite. Alors, pour tout champ vectoriel  $\vec{U}$  suffisamment régulier,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\text{rot}} \vec{U}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}.$$

**Démonstration du théorème d'Ampère :** soit  $\mathcal{C}$  un contour fermé orienté, nommé dans ce contexte **contour d'Ampère**, et  $\mathcal{S}$  une surface orientée par RMD s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ .

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \stackrel{\text{MA}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où  $I_{\text{enlacé}}$  est le courant qui traverse le CA.

Espace 14

##### Théorème d'Ampère :

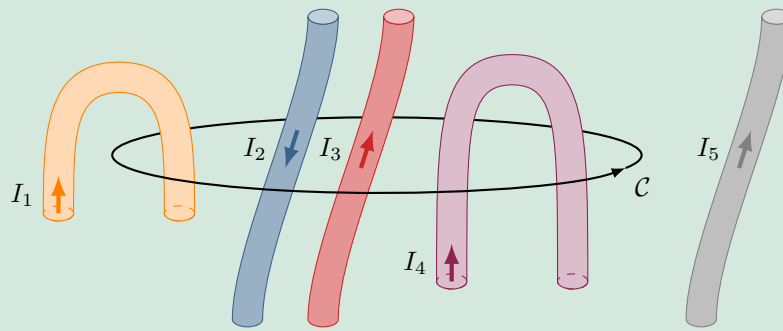
La circulation du champ magnétique le long d'un contour d'Ampère est relié au courant enlacé par ce contour,

$$\oint_{\text{CA}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}.$$

- ▷ **Attention !** Le courant enlacé est algébrique : compté positivement s'il traverse le contour d'Ampère dans le sens donné par la règle de la main droite et négativement sinon.
- ▷ Les courants non-enlacés par le contour n'ont pas d'impact sur la circulation de  $\vec{B}$ , mais ne pas confondre, ils en ont sur le champ via sa direction : l'étude des symétries et des invariances se fait sur *la totalité* de la distribution.
- ▷ De même, la position des courants au travers du contour est sans impact sur la circulation, mais pas sur le champ.

**Exercice C1 : Calcul de courant enlacé**

Quel est le courant enlacé par le contour  $C$  ci-dessous ?



$$I_{\text{enlacé}} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_4 = -I_1 - I_2 + I_3.$$

Espace 15

**c) Simplification dans l'ARQS magnétique**

Le second terme de l'équation de Maxwell-Ampère est appelé **courant de déplacement**,

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

par opposition au **courant de conduction**  $\vec{j}$ . L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D).$$

On admet alors le résultat suivant :

Dans les hypothèses de l'ARQS magnétique, le courant de déplacement est négligeable.

$$\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{j}\|$$

L'équation de Maxwell-Ampère et le théorème d'Ampère s'écrivent alors comme en régime stationnaire, et ce même si l'intensité dépend du temps,

$$\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) \iff \oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}(t).$$

↪ les champs magnétiques se calculent exactement de la même façon en ARQS magnétique et en régime statique.

**III.2 - Exemple : champ créé par un cylindre parcouru par un courant uniforme**

**III.3 - Exemple : champ créé par un solénoïde infini**

## IV - Flux magnétique

Le théorème de Green-Ostrogradski nous enseigne que les propriétés locales sur la divergence d'un champ vectoriel se traduisent par des propriétés intégrales sur le flux.

### IV.1 - Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux magnétique

#### a) Formulation locale : équation de Maxwell-Thomson



**Équation de Maxwell-Thomson :**  
En tout point  $M$  de l'espace,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

↪ contrairement au champ électrique, la divergence du champ magnétique ne dépend pas des sources de champ.

Cette équation est parfois appelée « équation de Maxwell-flux ». Elle est valable aussi bien en régime stationnaire qu'en régime variable.

***Remarque culturelle :** En électrostatique, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit  $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$  et une identité d'analyse vectorielle conduit au potentiel électrostatique  $V$ ,*

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V.$$

*Une autre identité d'analyse vectorielle appliquée à l'équation de Maxwell-Thomson permet de montrer que le champ magnétique peut toujours être écrit à partir d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que*

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

*L'existence et plus encore l'utilisation du potentiel vecteur ne sont pas au programme de PT.*

#### b) Formulation intégrale : le champ magnétique est à flux conservatif

Soit  $S$  une surface fermée orientée vers l'extérieur<sup>1</sup>, délimitant un volume  $\mathcal{V}$ .

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{B}) dV \underset{\text{GO}}{=} \underbrace{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}_{\text{MT}} = 0$$



Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée est toujours nul.  
Le champ magnétique est dit à **flux conservatif**.

#### c) Conséquence pour les lignes de champ

La conservation du flux permet de démontrer la propriété bien connue :



Les lignes de champ sont d'autant plus resserrées que le champ magnétique est fort.

La démonstration est identique à celle menée dans le cours d'électrostatique en s'appuyant sur un tube de champ.

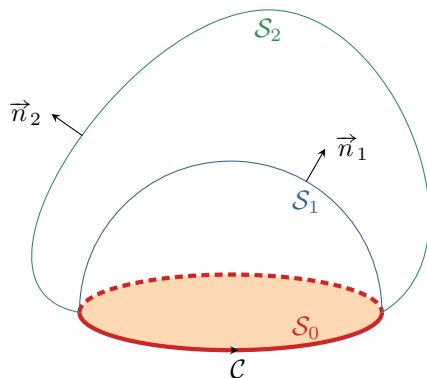
1. Dans un autre contexte, on parlerait de surface de Gauss

## IV.2 - Flux magnétique au travers d'une surface s'appuyant sur un contour fermé



On dit qu'une surface  $\mathcal{S}$  ouverte s'appuie sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  si  $\mathcal{C}$  définit le bord de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple :** un bol ou un saladier est une surface ouverte qui s'appuie sur un contour circulaire.



L'orientation (arbitraire) de  $\mathcal{C}$  permet d'orienter de façon univoque les normales aux surfaces par la règle de la main droite.

Considérons deux surfaces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'appuyant sur le même contour fermé  $\mathcal{C}$ . Montrons que le flux de  $\vec{B}$  est le même au travers de ces deux surfaces.

On les complète en surface fermée en y ajoutant  $\mathcal{S}_0$ , dont la normale  $\vec{n}_0'$  doit être orientée vers le bas.

Espace 16

On note d'un prime les surfaces non orientées par RMD par rapport au contour  $\mathcal{C}$ . La surface  $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$  est fermée, donc

$$\iint_{\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}' + \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

De même pour la deuxième surface,

$$\iint_{\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}' + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On en déduit finalement

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{B} \cdot d\vec{S}'$$

et si l'on oriente la surface  $\mathcal{S}_0$  par RMD le signe disparaît.

Espace 17



Le flux du champ magnétique est identique au travers de toutes les surfaces s'appuyant sur un même contour fermé orienté.

↪ on peut donc choisir librement (= au plus simple) la surface pour le calculer.

### IV.3 - Loi de Faraday

- **Formulation locale : équation de Maxwell-Faraday (rappel)**

**Équation de Maxwell-Faraday :**

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Espace 18

Cette équation est inchangée dans l'ARQS magnétique.

**Sens physique :** les variations de champ magnétique sont source de champ électrique.

↪ c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

**Conséquence :** comme  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \neq \vec{0}$ , alors, en présence d'un champ magnétique variable,  $\vec{E}$  ne dérive plus d'un potentiel.

- **Formulation intégrale : loi de Faraday**

La version intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est la loi de Faraday, admise l'an dernier dans le cours sur l'induction. Pour rendre le lien explicite, raisonnons sur une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur un circuit électrique filiforme  $\mathcal{C}$ .

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} \underset{\text{MF}}{=} - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}.$$

Espace 19

↪ en régime variable, la circulation de  $\vec{E}$  le long d'un circuit fermé n'est plus nulle.

**Rappel d'électrostatique :** par définition du potentiel électrostatique  $V$ , en régime permanent,

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = V(A) - V(B) \quad \text{donc} \quad \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$

**Modélisation électrocinétique équivalente :** Comme la loi de Faraday est valable dans l'ARQS, il est toujours possible de raisonner en termes électrocinétiques, même en présence d'induction. La circulation de  $\vec{E}$  s'interprète comme une tension : en présence d'induction, tout se passe comme si un générateur supplémentaire imposant une tension  $e$  appelée **force électromotrice induite** était ajouté au système réel.

↪ Où se trouve le générateur induit dans un montage, par exemple de rails de Laplace ? Autrement dit, comment faut-il brancher un voltmètre pour mesurer la fém induite ?

Cette question n'a pas de sens : le générateur induit est partout et nulle part, il est là pour modéliser l'effet de circulation non nulle. On peut voir ses conséquences, mais pas la mesurer directement.

Espace 20

**Expression de la fém induite :** À la condition que la surface d'intégration soit fixe, la dérivée temporelle et l'intégrale de surface peuvent être permutées :

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} \right) = \frac{d\phi}{dt}$$

Dans ces hypothèses, on retrouve la loi de Faraday. Pour être cohérent sur le plan des conventions, elle nécessite d'orienter le générateur induit en convention générateur par rapport à l'intensité dans le circuit.



$$e = -\frac{d\phi}{dt} + \text{faire un schéma}$$

Espace 21

**Remarque :** L'hypothèse de circuit fixe nécessaire pour passer de la forme locale à la forme intégrale explique les exceptions à la loi de Faraday que l'on peut rencontrer, par exemple pour un haut-parleur ou certaines machines tournantes. Les traiter dans une approche purement électromagnétique est possible mais trop technique à notre niveau : on utilise alors la conservation de la puissance,

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_{\text{ind}}i = 0$$

↪ cf. cours sur l'induction de PTSI.

#### IV.4 - Flux propre et inductance propre



On appelle **flux propre**  $\phi_p$  le flux du champ magnétique créé par un circuit  $\mathcal{C}$  au travers du circuit  $\mathcal{C}$  lui-même.

Ce flux propre est en général très compliqué à calculer : d'une part le circuit n'a pas forcément une géométrie simple, d'autre part le champ créé par le circuit varie fortement à l'échelle du circuit.

La notion d'inductance propre peut être définie en toute généralité, mais elle n'a en pratique d'intérêt que pour les bobines.

On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur  $L$  telle que

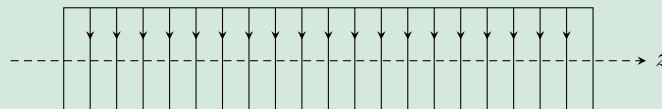
$$\phi_p = Li$$

où  $i$  est l'intensité traversant la bobine

L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie du circuit.  
En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité parcourant le circuit.

#### Exercice C2 : Inductance d'un solénoïde, calcul par le flux propre

Considérons une bobine de longueur  $\ell$  très supérieure à son rayon, contenant  $N$  spires montées en série, d'axe  $\vec{e}_z$  et de surface  $S$ . La bobine est parcourue par un courant  $i$ .



- 1 - On modélise la bobine par un solénoïde infini : que néglige-t-on ? Rappeler l'expression du champ à l'intérieur de la bobine.
- 2 - En déduire le flux propre, puis l'expression de l'auto-inductance  $L$ .
- 3 - Retrouver la loi de comportement de la bobine telle que vous la connaissez.

**1** La modélisation par un solénoïde infini revient à négliger l'influence des bords de la bobine. À l'intérieur de la bobine et loin des bords, le champ vaut donc

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z.$$

**2** Compte tenu du sens (conventionnel) de  $i$  le vecteur normal à une spire est  $\vec{n} = +\vec{e}_z$ . Le flux au travers d'une spire vaut donc

$$\phi_1 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i S.$$

Le flux propre est la somme des flux au travers de toutes les spires. En négligeant les effets de bord,

$$\phi_p = N\phi_1 \quad \text{soit} \quad \phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i S$$

d'où par identification

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S.$$

La dépendance en  $N^2$  indique que les effets d'auto-induction sont d'autant plus marqués que le nombre de spires bobinées est élevé. La conclusion se généralise sans peine.

**3** D'après la loi de Faraday, la fém d'induction propre vaut

$$e_p = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Cependant, elle est orientée en convention générateur alors que la loi de comportement est donnée en convention récepteur,

$$u = -e_p = +L \frac{di}{dt}$$

Espace 22

## V - Énergie magnétique

### V.1 - Densité volumique d'énergie magnétique

Un champ magnétique est un réservoir d'énergie.  
La **densité volumique d'énergie magnétique** s'écrit

$$w_m = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$$

**Remarque :** par analogie avec l'écriture de la densité volumique d'énergie électrique,

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 \quad \longleftrightarrow \quad w_m = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mu_0} \times \|\vec{B}\|^2$$

Sens physique :

un volume  $d\tau$  au voisinage d'un point  $M$  contient une énergie d'origine magnétique  $\frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0} d\tau$ .

Espace 23

## V.2 - Définition énergétique de l'inductance

On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur  $L$  telle que

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2$$

où  $\mathcal{E}_m$  est l'énergie magnétique totale stockée dans le volume de la bobine et  $i$  l'intensité traversant la bobine.



### Exercice C3 : Inductance d'un solénoïde, calcul par le flux propre

Considérons la même bobine que dans l'exercice précédent. Retrouver l'expression de l'inductance par un raisonnement énergétique.

Densité volumique d'énergie magnétique dans la bobine :

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} \times \mu_0^2 \frac{N^2}{\ell^2} i^2$$

Énergie magnétique totale :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \times \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} i^2 \times S\ell$$

On identifie du coup :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

Espace 24