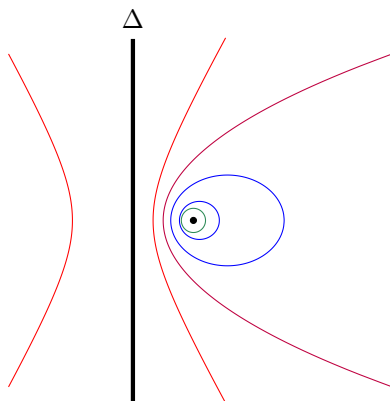


Mouvements dans un champ de force central et conservatif

II - Nature des trajectoires

II.2 - Quelques mots sur les coniques

Ce paragraphe complète (ou est complété par) l'animation Geogebra mise en ligne sur le site de la classe. Les seules notions au programme concernent la définition d'une ellipse en terme de grand et petit axe et d'équation cartésienne.

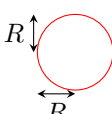
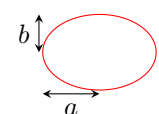


Considérons dans un plan une droite Δ et un point $F \notin \Delta$. On appelle **conique** de droite directrice Δ , de foyer F et d'**excentricité** $e \geq 0$ l'ensemble des points M du plan tels que la distance de M à F soit égale à la distance de M à Δ multipliée par e : $d(M, F) = e d(M, \Delta)$. La nature de la conique change en fonction de l'excentricité,

- ▷ $e = 0$: **cercle** ;
- ▷ $0 < e < 1$: **ellipse**, courbe fermée ;
- ▷ $e = 1$: **parabole**, courbe ouverte « fermée à l'infini » ;
- ▷ $e > 1$: **hyperbole**, courbe ouverte comportant deux branches.

Les différentes coniques sont représentées sur la figure ci-dessous : un cercle, en vert ; deux ellipses d'excentricité respectives 0,3 et 0,6, en bleu ; une parabole, en violet ; et les deux branches d'une hyperbole d'excentricité 2, en rouge.

Toutes les coniques sont décrites en coordonnées cartésiennes par des équations de degré 2 au plus, de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$. En particulier :

- ▷ Équation cartésienne d'un cercle de rayon R de centre O : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$
- ▷ Équation cartésienne d'une ellipse de centre O : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a est le **demi grand axe** et $b < a$ le **demi petit axe** de l'ellipse.

En coordonnées polaires, toutes les coniques sont décrites par une équation de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où e est l'excentricité de la conique et $p > 0$ est appelé paramètre de la conique et décrit qualitativement sa taille.

II.3 - Nature de la trajectoire pour une interaction newtonienne répulsive

• Exemple de situation

Force de Coulomb entre deux charges de même signe, q_0 placée en O et la particule-test de charge q placée à distance r .

$$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \quad \rightsquigarrow \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} .$$

• Signe et variations

$E_{p,\text{eff}}$ est toujours positive et décroissante, voir figure 1.

• Domaine accessible à la particule

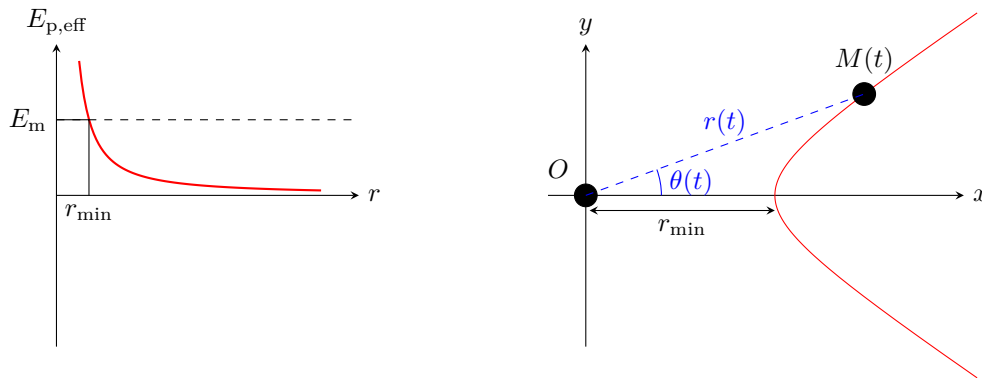


Figure 1 – Énergie potentielle et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne répulsive

Espace 2

Plus de calculs permettraient de montrer que la trajectoire est une hyperbole dont le centre de force O est le foyer extérieur.

II.4 - Nature de la trajectoire pour une interaction newtonienne attractive

• Exemple de situation

Force gravitationnelle entre deux masses, m_0 placée en O et la particule-test de charge m placée à distance r .

$$\vec{F}(r) = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{m_0 m}{r} \quad \rightsquigarrow \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_0 m}{r}.$$

• Signe et variations

▷ pour r petit :

Espace 3

▷ pour r grand :

Espace 4

▷ conséquence sur l'allure de la courbe :

Espace 5

Ce minimum est atteint en $r_0 = \frac{C^2}{m_0 \mathcal{G}}$.

- Cas $E_m > 0$: état de diffusion

La trajectoire suivie par le point matériel M est une branche d'hyperbole dont le centre de force O est le foyer intérieur, voir figure 2.

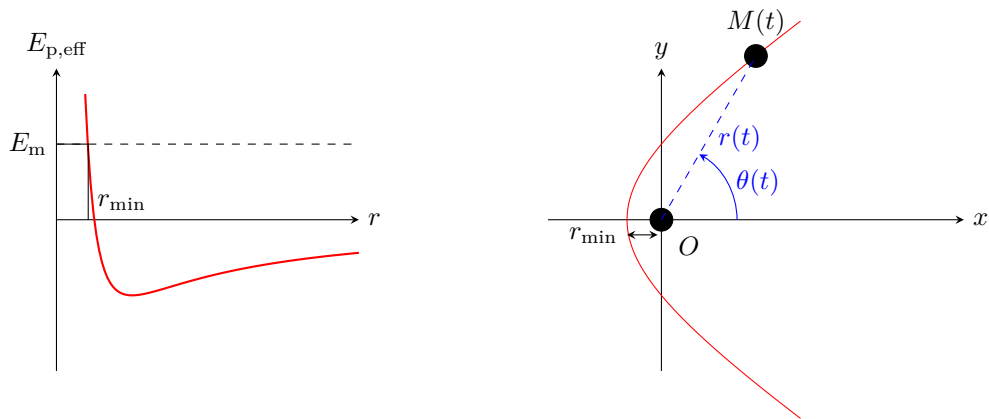


Figure 2 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m > 0$.

Comment interpréter que la trajectoire soit bornée pour r petit ?

Espace 6

- Cas $E_m = 0$: état de diffusion

La trajectoire suivie par le point matériel M est une parabole dont le centre de force O est le foyer intérieur, voir figure 3.

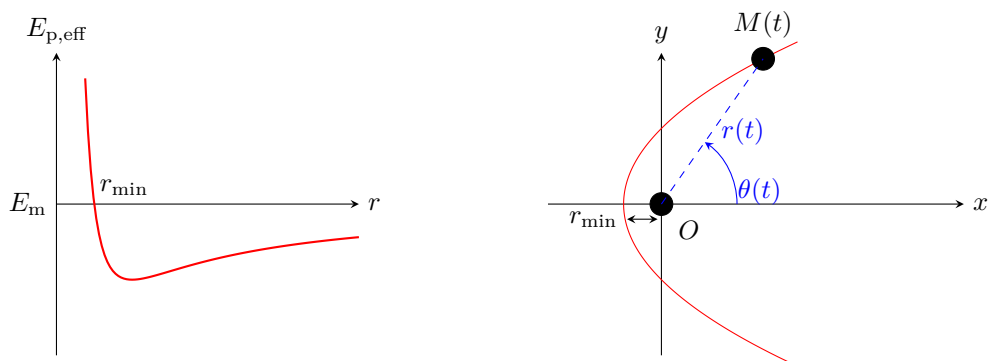


Figure 3 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m = 0$.

- Cas $E_m < 0$: état lié

La trajectoire suivie par le point matériel M est une ellipse dont le centre de force O est un foyer, voir figure 4.

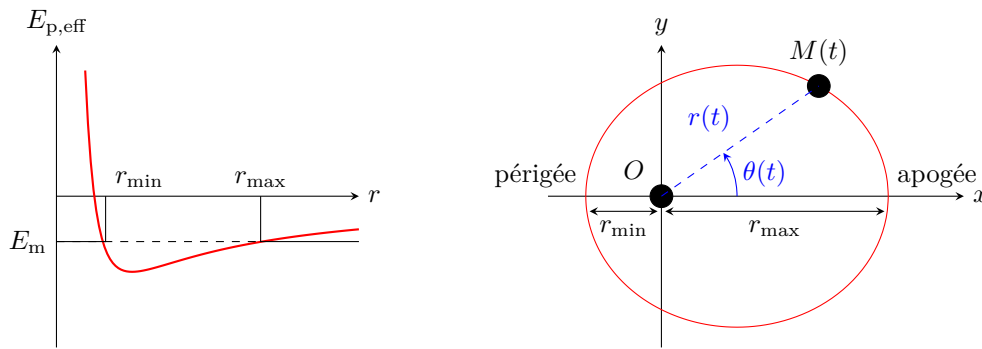


Figure 4 – Énergie potentielle effective et trajectoire. Cas d'une interaction newtonienne attractive avec $E_m < 0$.

Compléments de géométrie sur l'ellipse : vous devez savoir tracer sans hésiter le schéma de l'ellipse de la figure 4 et nommer les points particuliers.

Le point de l'ellipse le plus proche de O est appelé le périhélie ; le point le plus éloigné de O est appelé l'aphélie.

↪ Noms usuels en mécanique céleste :

Espace 7

Le demi-grand axe a de l'ellipse est relié aux rayons r_{\min} au périhélie et r_{\max} à l'aphélie :

Espace 8

Cas particulier : $E_m = E_{m,\min}$.

Espace 9

III - Attraction gravitationnelle : système solaire et satellites









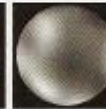
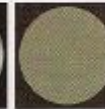
III.1 - Observations expérimentales et culture générale

- À propos du système solaire

Le système solaire compte huit planètes, voir page suivante : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Ces planètes ont été découvertes dans l'Antiquité, et portent des noms de dieux romains. Le « cahier des charges » qu'un astre doit remplir pour être qualifié de planète a été précisé en 2006, ce qui a eu pour conséquence de reléguer Pluton au rang de « planète naine ».

Bref historique :

- ▷ La notion de système solaire a été développée par Copernic au XVI^e siècle, puis par Kepler au XVII^e. Ces développements sont *antérieurs* (!!) à l'invention des instruments d'optique : la lunette astronomique de Galilée n'a été inventée qu'une cinquantaine d'année après les travaux de Kepler.
- ▷ Une confirmation expérimentale est venue grâce à Tycho Brahé à la fin du XVI^e siècle : ses travaux méticuleux ont permis d'améliorer la précision d'un facteur 10, et font de lui l'inventeur de l'observation astronomique.
- ▷ Enfin, la théorie de Newton a permis d'interpréter ces observations à la fin du XVII^e siècle.

Photo	Planet	Relative Size	Average Distance from Sun (AU)	Average Equatorial Radius (km)	Mass (Earth = 1)	Average Density (g/cm ³)	Orbital Period	Rotation Period	Axis Tilt	Average Surface Temperature [†]	Composition	Known Moons (2007)	Rings?
	Mercury	•	0.387	2,440	0.055	5.43	87.9 days	58.6 days	0.0°	700 K (day) 100 K (night)	Rocks, metals	0	No
	Venus	•	0.723	6,051	0.82	5.24	225 days	243 days	177.3°	740 K	Rocks, metals	0	No
	Earth	•	1.00	6,378	1.00	5.52	1.00 year	23.93 hours	23.5°	290 K	Rocks, metals	1	No
	Mars	•	1.52	3,397	0.11	3.93	1.88 years	24.6 hours	25.2°	220 K	Rocks, metals	2	No
	Jupiter	●	5.20	71,492	318	1.33	11.9 years	9.93 hours	3.1°	125 K	H, He, hydrogen compounds [§]	63	Yes
	Saturn	●	9.54	60,268	95.2	0.70	29.4 years	10.6 hours	26.7°	95 K	H, He, hydrogen compounds [§]	60	Yes
	Uranus	●	19.2	25,559	14.5	1.32	83.8 years	17.2 hours	97.9°	60 K	H, He, hydrogen compounds [§]	27	Yes
	Neptune	●	30.1	24,764	17.1	1.64	165 years	16.1 hours	29.6°	60 K	H, He, hydrogen compounds [§]	13	Yes
	Pluto	•	39.5	1,160	0.0022	2.0	248 years	6.39 days	112.5°	40 K	Ices, rock	3	No
	Eris	•	67.7	1,200	0.0028	2.3	557 years	?	?	?	Ices, rock	1	?

[†]Including the dwarf planets Pluto and Eris. Appendix E gives a more complete list of planetary properties. [§]Surface temperatures for all objects except Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune, for which cloud-top temperatures are listed. [¶]Includes water (H₂O), methane (CH₄), and ammonia (NH₃).

- Lois (expérimentales !) de Kepler

Loi des orbites :

Espace 10

Loi des aires :

Espace 11

Loi des périodes :

Espace 12

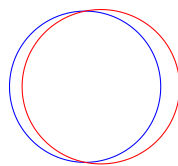
III.2 - Étude des trajectoires circulaires

a) Pourquoi se restreindre à ces trajectoires ?

Un tableau récapitulatif des excentricités des trajectoires des planètes du système solaire est représenté ci-dessous.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
e	0,206	0,007	0,017	0,093	0,005	0,055	0,048	0,009

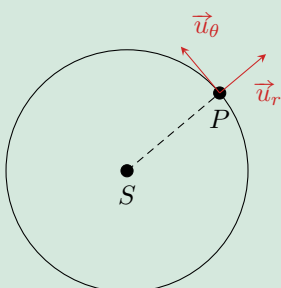
À titre de comparaison, un cercle (en bleu) et une ellipse d'excentricité 0,2 (en rouge, décalée vers la droite) de même foyer sont représentés ci-dessous.



↪ étudier les trajectoires circulaires donne une bonne approximation et va beaucoup simplifier les calculs.

b) Mise en équation

Exercice C1 : Planète sur une trajectoire circulaire



On étudie une planète P de masse m , ayant une trajectoire circulaire autour du Soleil S de masse m_0 . Le raisonnement se généralise sans peine à un satellite autour de la Terre.

- 1 - Définir le référentiel d'étude.
- 2 - Procéder au bilan des forces. En déduire par un argument énergétique que le mouvement est uniforme, sans chercher à exprimer la vitesse pour le moment.
- 3 - Déterminer la vitesse par application du théorème de la résultante cinétique.
- 4 - Exprimer la période de révolution, et en déduire la troisième loi de Kepler pour une trajectoire circulaire.

- **Référentiel :**

Espace 13

- **Bilan des forces :**

Espace 14

Conséquence : le mouvement du centre de masse est uniforme.

Espace 15

- **Théorème de la résultante cinétique :**

Espace 16

Un mouvement circulaire autour du Soleil est uniforme, la vitesse dépend du rayon de la trajectoire.

🚫🚫🚫 **Attention !** Il s'agit de la vitesse dans le référentiel héliocentrique. En transposant au cas d'un satellite, il s'agirait de la vitesse dans le référentiel géocentrique, différente de celle dans le référentiel terrestre.

Remarque 1 : cohérent avec la conservation du moment cinétique,

$$\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \vec{cte} \quad \text{donc}$$

Remarque 2 : mettre un satellite artificiel en orbite sur une trajectoire circulaire demande donc un excellent contrôle de la vitesse de satellisation, tant en direction qu'en norme.

Remarque 3 : Attention à ne pas confondre : un mouvement elliptique n'est pas uniforme.

Espace 17

- **Troisième loi de Kepler :**

Généralisation : on admet que cette expression est également valable pour une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a .

Pour un corps en orbite elliptique de demi grand axe a autour d'un astre attracteur de masse m_0 ,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0\mathcal{G}} \quad \text{indépendant du corps en gravitation.}$$

Remarque :

Historiquement, c'est grâce à cette loi que les distances entre le Soleil et les planètes ont pu être estimées pour la première fois. De tels calculs sont rendus très complexe par le grand nombre d'inconnues.

Historiquement toujours, ce sont des vérifications expérimentales de cette loi qui ont permis de prouver que la masse m intervenant dans la quantité de mouvement est bien égale à la masse m intervenant dans la force de gravitation ... ce qui n'a a priori rien d'évident !

c) Comparaison aux observations

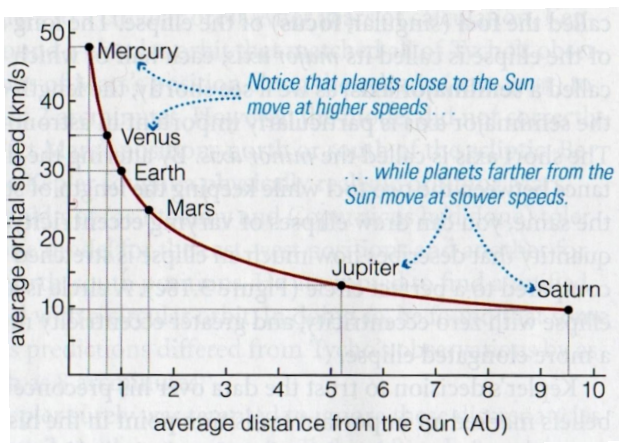


Figure 5 – Vitesse en fonction de la distance au Soleil.

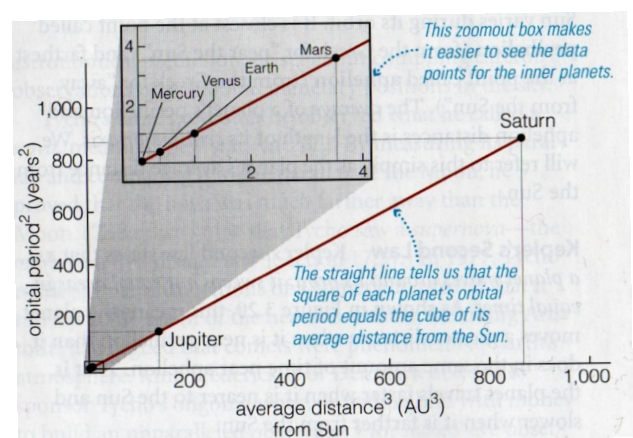


Figure 6 – Troisième loi de Kepler.

Figures extraite du cours en ligne de Rémy Duperray ... et probablement d'une autre origine.

La figure 5 représente la vitesse orbitale moyenne v des planètes du système solaire en fonction de leur distance moyenne au Soleil d , exprimée en unités astronomiques (AU, astronomic unit). Par définition, 1 AU est la distance moyenne Terre-Soleil. La courbe en trait plein est une modélisation par la fonction $v = \sqrt{\mathcal{G} m_S/d}$.

La figure 6 représente le carré de la période de révolution des planètes du système solaire en fonction du cube de leur distance moyenne au Soleil, exprimée en unités astronomiques (AU, astronomic unit). On obtient une droite passant par l'origine, signe que la troisième loi de Kepler est bien vérifiée.

III.3 - Vitesses cosmiques

On se concentre désormais sur un satellite autour de la Terre.

a) Énergie mécanique d'un satellite en orbite

Exercice C2 : Énergie mécanique en orbite circulaire

Considérons un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre de masse m_0 . Exprimer son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique en fonction des données et de \mathcal{G} . Commenter son signe.

Généralisation au cas d'une trajectoire elliptique : ni E_c ni E_p ne sont des constantes du mouvement, qui est plus rapide et plus près au périhélie qu'à l'apogée, mais il demeure bien sûr conservatif.

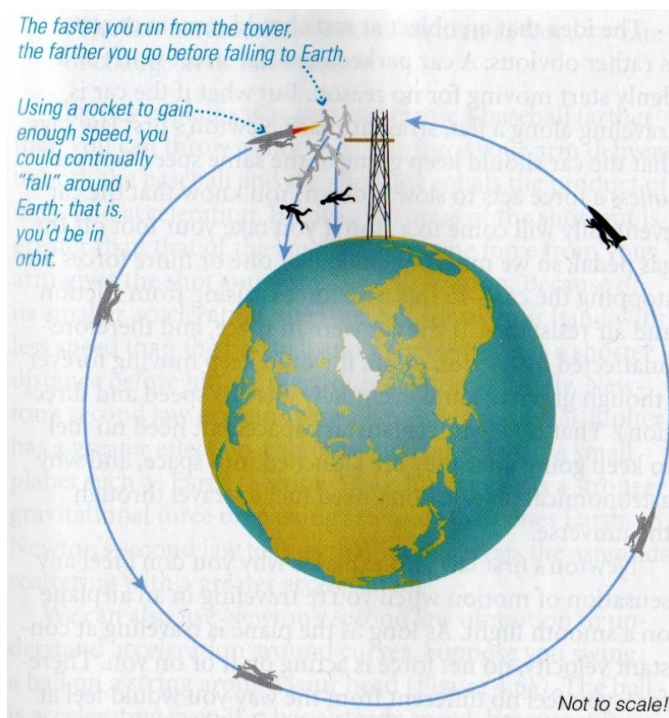
↪ on admet que l'expression de E_m se généralise en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a ,

$$E_m = -\frac{Gm_0m}{2a}.$$

Conséquence : le demi-grand axe de la trajectoire du satellite est entièrement déterminée par l'énergie mécanique qui lui est communiquée initialement.

b) Vitesse minimale de mise en orbite basse : première vitesse cosmique

• Approche qualitative



Imaginez que vous sautez d'une tour en prenant de l'élan. Plus vous courez vite sur le tremplin, plus vous retombez loin. Si vous courez suffisamment vite (ou que vous vous aidez d'une fusée), vous irez tellement loin que vous retomberez continuellement « à côté » de la Terre : vous serez en orbite autour de la Terre.

Ainsi, on peut dire que la Lune et les satellites tombent en permanence sur Terre ... mais à côté, ce qui a inspiré cette phrase à Paul Valéry : « Il fallait être Newton pour s'apercevoir que la Lune tombe alors que tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas. » (1939).

Figure extraite du cours en ligne de Rémy Duperray ... et probablement d'une autre origine.

On appelle **première vitesse cosmique**, notée v_1 , la vitesse minimale à donner à un satellite pour le mettre en orbite basse circulaire autour de la Terre.

↪ si $v < v_1$, le satellite retombe sur Terre.

• Expression

Exercice C3 : Première vitesse cosmique

Déterminer la première vitesse cosmique terrestre en raisonnant sur une orbite circulaire de rayon $R = R_T + h \simeq R_T$, ce qui revient à négliger l'altitude du satellite.

- **En pratique**

L'intérêt des orbites basse est une communication rapide entre le satellite et la Terre, ainsi qu'une bonne résolution des instruments d'observation. Cependant, les frottements atmosphériques rendent les orbites d'altitude inférieure à environ 200 km inutilisables : celle de l'ISS est elliptique, comprise entre des altitudes de 330 et 420 km.

c) Vitesse de libération : deuxième vitesse cosmique

On appelle **vitesse de libération** ou **seconde vitesse cosmique**, notée v_2 , la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un satellite depuis la Terre pour qu'il puisse quitter l'attraction gravitationnelle.

Exercice C4 : Seconde vitesse cosmique

- 1 - Rappeler la valeur minimale d'énergie mécanique permettant à un satellite d'atteindre un état de diffusion. L'interpréter physiquement.
- 2 - En déduire l'expression de la seconde vitesse cosmique.

Remarque : pour obtenir une satellisation en orbite liée, le satellite doit avoir une vitesse initiale $v_1 < v_0 < v_2$, ce qui laisse peu de marge.

III.4 - Satellites géostationnaires

On appelle **satellite géostationnaire** un satellite artificiel qui reste constamment au dessus d'un même point de la surface terrestre : il est immobile dans le référentiel terrestre.

Objectif du paragraphe : étudier le mouvement d'un tel satellite.

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Comme on s'intéresse à des mouvements où la rotation de la Terre n'est pas négligeable, le référentiel terrestre n'est pas galiléen : il faut mener l'étude dans le référentiel géocentrique.

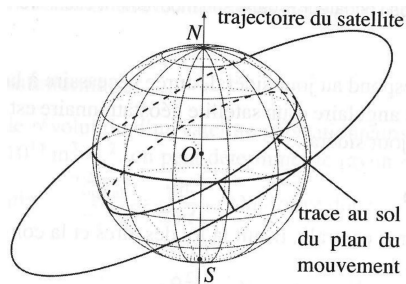
Remarque : On se rend compte d'un problème rien qu'en essayant d'écrire le TRC dans le référentiel terrestre ...

Exercice C5 : Satellite géostationnaire

- 1 - En raisonnant par l'absurde, montrer que le mouvement du satellite se fait nécessairement dans le plan de l'équateur.
- 2 - Montrer qualitativement que la vitesse angulaire du satellite est nécessairement constante.
- 3 - Déterminer la période du mouvement du satellite.
- 4 - En déduire que la trajectoire est un cercle et déterminer son rayon, puis l'altitude du satellite.

• Plan de la trajectoire

Rappel : par conservation du moment cinétique, on a déjà montré que la trajectoire du satellite est nécessairement plane, dans un plan qui contient le centre de masse de la Terre.



Espace 22

Le plan de l'orbite géostationnaire coïncide avec le plan de l'équateur.

• Vitesse angulaire

Espace 23

• Période du mouvement

La période de rotation propre de la Terre est appelée **jour sidéral**, de durée légèrement différente d'un jour solaire (24 heures).

↔

Espace 24

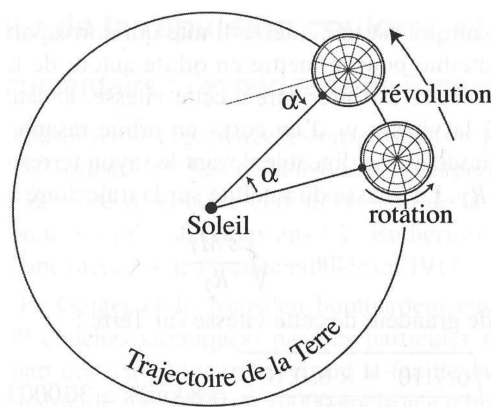


Figure 7 – Notion de jour sidéral.

En 24 heures, la Terre parcourt un angle $2\pi + \alpha$ où α est l'angle dont elle s'est déplacée sur son orbite autour du Soleil, c'est-à-dire $(1/365,25)^\circ$ de tour (le 0,25 tient compte des années bissextiles). Le **jour sidéral** est défini lorsqu'un point à la surface de la Terre parcourt exactement 2π . Comme le mouvement est uniforme, on en déduit la durée d'un jour sidéral,

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = \frac{2\pi + \alpha}{T_{\text{sol}}} \quad \text{d'où} \quad T_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{2\pi + \alpha} T_{\text{sol}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s}.$$

La période du mouvement d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique est égale à la période de rotation propre de la Terre, c'est-à-dire un jour sidéral.

- **Rayon de l'orbite et altitude du satellite**

Montrons que l'orbite est circulaire.

Espace 25

Déterminons son rayon.

Espace 26

Numériquement,

$$R = 42\,164 \text{ km} \quad \text{soit} \quad h = R - R_T = 35\,786 \text{ km}.$$

- **Conclusion**

Un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre.
Dans le référentiel géocentrique, l'orbite géostationnaire est circulaire, à l'altitude $h \sim 36 \cdot 10^3 \text{ km}$, parcourue à vitesse constante avec une période $T \sim 24 \text{ heures}$.

- **En pratique**

L'orbite géostationnaire a énormément d'applications dans le domaine des télécommunications, bien qu'elle présente l'inconvénient de ne pas desservir directement les pôles et d'être éloignée de la Terre, ce qui implique que le temps de communication est perceptible.

Plus de 300 satellites s'y trouvent, elle est donc très encombrée, et directement gérée par l'Union Internationale des Télécommunications, qui dépend de l'ONU. La précision imposée sur la position du satellite est inférieure à 50 km, et l'exploitant doit retirer son satellite de l'orbite lorsqu'il est en fin de vie.

La durée de vie des satellites vient principalement des perturbations qui peuvent dévier le satellite de son orbite. Il dispose alors de réserves de carburant pour y revenir, et se trouve en fin de vie lorsque ses réserves sont épuisées.