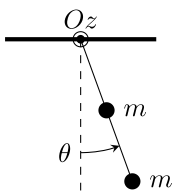
Rotation et moment cinétique

Exercices

Exercice 1 : Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté [♦◊◊]



On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

1 - Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

2 - Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3 - Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Exercice 2 : Volant d'inertie [♦♦◊]

On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ». On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J, soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_\mathrm{f} = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1 - Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2 - Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_f et un temps caractéristique τ.

3 - Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_\mathrm{vib}(t) = \gamma\cos(\Omega t)$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en considérant ce couple harmonique ? Après un régime transitoire, la vitesse angulaire du rotor est elle aussi harmonique de pulsation Ω. Donner le temps caractéristique de la durée du transitoire.

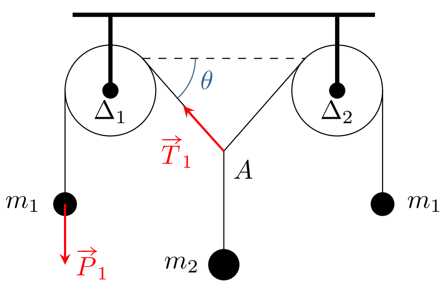
4 - Après la fin du transitoire, on cherche la vitesse angulaire de rotation ω sous la forme

$$\omega(t) = \omega_\mathrm{f} + A\cos(\Omega t + \varphi)$$

Déterminer l'amplitude A. L'équation différentielle étant linéaire, on pourra utiliser le théorème de superposition et traiter la partie harmonique avec la notation complexe.

5 - En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

Exercice 3 : Des poulies en équilibre [♦♦◊]



On s'intéresse au dispositif ci-contre, à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies sont identiques, de même rayon R et masse m_0, et les deux liaisons pivot avec le bâti sont modélisées par des liaisons parfaites : les frottements d'axe sont négligés. Les fils sont également tous supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils sont inextensibles et de masse négligeable. Enfin, on suppose que les fils ne glissent pas sur les poulies.

La force $\vec{P}_1$ est le poids de la masse m_1. La force $\vec{T}_1$ est exercée par le fil touchant la poulie d'axe Δ_1 sur le fil relié à la masse m_2. Comme il s'agit d'une force de contact, son point d'application est le point d'attache A entre les deux fils.

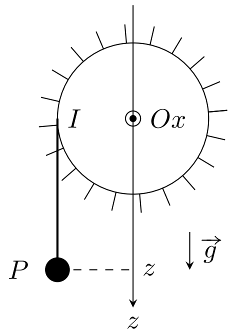
1 - Faire un bilan soigneux des actions mécaniques s'appliquant à la poulie 1. Pour chaque action mécanique, indiquer s'il s'agit d'une force ou d'un couple et préciser, s'il est possible de le déterminer, le moment de l'action mécanique par rapport à l'axe Δ_1.

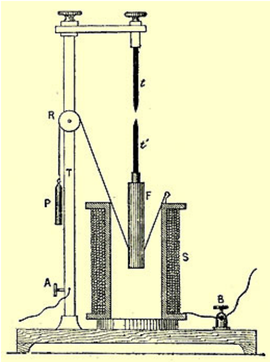
2 - Par application du théorème du moment cinétique à la poulie 1, montrer qu'en norme $T_1 = P_1 = m_1 g$.

3 - Caractériser l'action mécanique de liaison entre la poulie 1 et le bâti. Exprimer sa résultante $\vec{R}_1$ et son moment en fonction de $\vec{T}_1, m_0, m_1$ et $\vec{g}$.

4 - Déterminer l'angle θ et analyser qualitativement la vraisemblance du résultat.

Exercice 4 : Régulateur d'Archereau–Foucault [♦♦◇]





Un régulateur d'Archereau–Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique.

On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m. Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x. La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_\mathrm{f} = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

1 - Justifier que $\dot{z} = R\omega$.

2 - Montrer que la force $\vec{T}$ de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\vec{T} = m(g - \ddot{z})\vec{u}_z\,.$$

3 - En appliquant la loi du moment cinétique au cylindre, montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR$$

4 - Retrouver cette équation différentielle en appliquant la loi du moment cinétique au système composé du cylindre, du fil et du contrepoids P.

5 - Résoudre l'équation différentielle. En déduire l'intérêt du dispositif.

Exercice 5 : Lancer d'une toupie [♦♦◇]

On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie.

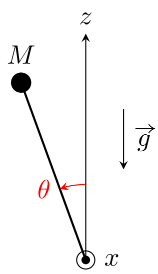
On notera ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on supposera qu'à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil la toupie est immobile.

1 - Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.

2 - Déduire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ de la toupie.

3 - Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?

Exercice 6 : Gravimètre de Holweck–Lejay [♦♦◇]



Instrument ancien, un gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur L, libre de tourner autour d'un axe Ox, au bout de laquelle est placée en M une masse m. On négligera le moment d'inertie de la tige et on ne tiendra compte que de la masse située à son extrémité. Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple $\mathcal{M}_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C\theta^2$.

1 - Exprimer l'énergie potentielle totale de la masse m en fonction de l'angle θ.

2 - Montrer que les positions d'équilibre $\theta_\text{éq}$ de la tige sont solution de l'équation

$$\sin\theta_\text{éq} = \frac{C}{mgL}\theta_\text{éq}\,.$$

Justifier, par exemple par un raisonnement graphique, qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon. Prévoir qualitativement leur stabilité.

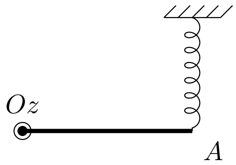
3 - Démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.

4 - Établir par une méthode énergétique l'équation du mouvement de M.

5 - Supposons que la raideur du ressort spirale et les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude. Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g.

Annale de concours

Exercice 7 : Barre fixée à ses extrémités [oral CCP, ♦♦◊]



Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

1 - Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.

2 - La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Résolution de problème

> *Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Exercice 8 : Vitesse d'un marcheur [oral banque PT, ♦♦◊]

Retrouver, en fonction des dimensions de votre corps, l'ordre de grandeur de la vitesse de marche naturelle.

Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse m et longueur ℓ par rapport à une de ses extrémité vaut $J = m\ell^2/3$.

Rotation et moment cinétique

Exercices

Exercice 1 : Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté

1 La tige a un mouvement de rotation autour de l'axe z. Comme il s'agit d'un solide, l'équation du mouvement s'obtient par le théorème du moment cinétique scalaire autour de l'axe Oz.

▷ Système : tige, modélisée par un solide formé de deux points matériels de masse m liés rigidement.

▷ Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre, qui est galiléen en bonne approximation pour un tel mouvement.

▷ Bilan des actions mécaniques :

→ le contact entre la tige et le bâti est modélisé par une liaison pivot, qu'on suppose implicitement parfaite donc de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0\,;$$

→ le poids $\vec{P}_1$ du point matériel M_1, située à distance $L/2$ de l'axe, a pour moment par rapport à l'axe (on utilise le repère polaire habituel)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= \left[\overrightarrow{OM_1} \wedge m\vec{g}\right] \cdot \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge m\left(g\cos\theta\,\vec{e}_r - g\sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)\right] \cdot \vec{e}_z \\ &= -\frac{mgL}{2}\sin\theta\,[\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta] \cdot \vec{e}_z \\ \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) &= -\frac{mgL\sin\theta}{2}\end{aligned}$$

→ le poids $\vec{P}_2$ de la deuxième masse a pour les mêmes raisons un moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = -mgL\sin\theta\,.$$

Comme le moment cinétique est additif, le moment cinétique du système est la somme des moments cinétiques de chacune des deux masses (le moment cinétique de la tige est nul car son moment d'inertie est négligeable). Le moment cinétique du point matériel M_1 vaut

$$L_{z,M_1/\mathcal{R}} = \vec{L}_{O,M_1/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_z = (m\,\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{v}_{M_1}) \cdot \vec{u}_z = m \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2}\dot\theta\,(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z \qquad \text{soit} \qquad L_{z,M_1} = \frac{mL^2}{4}\dot\theta\,.$$

> *Ce résultat se retrouve directement à partir du moment d'inertie d'un point matériel situé à distance R de l'axe de rotation z, $J_z = mR^2$ ... mais aucune expression de moment d'inertie n'est a priori à connaître.*

De même, on trouve pour M_2

$$L_{z,M_2} = mL^2\dot\theta$$

et ainsi au total

$$L_z = L_{z,M_1} + L_{z,M_2} = \left(\frac{mL^2}{4} + mL^2\right)\dot\theta \qquad \text{soit} \qquad L_z = \frac{5}{4}mL^2\dot\theta\,.$$

Finalement, d'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{5}{4}mL^2\ddot\theta = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

ce qui donne en simplifiant

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0}$$

2 Par application de la définition,

$$2m\,\overrightarrow{OG} = m\,\overrightarrow{OM_1} + m\,\overrightarrow{OM_2} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\vec{u}_r + \frac{1}{2}L\vec{u}_r \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}L\vec{u}_r\,.}$$

> ***Et en SI ?*** *Vous définissez le centre de masse à partir d'une intégrale,*
>
> $$m_{tot}\overrightarrow{OG} = \iiint_{P\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OP}\,dm_P$$
>
> *où dm_P est la masse d'un volume infinitésimal centé sur le point P. En pensant qu'une intégrale n'est ni plus ni moins qu'une somme, cette relation a exactement la même signification que la relation barycentrique utilisée ici.*

3 Appliquons le théorème du moment cinétique à ce nouveau système, un point matériel G de masse $2m$ situé à distance $3L/4$ de l'axe. La seule action mécanique qu'il subit est son poids, de moment

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}) = -2m \times g \times \frac{3L}{4}\sin\theta\,,$$

et son moment cinétique par rapport à l'axe z vaut

$$L_{z,G} = 2m \times \frac{9L^2}{16}\dot\theta\,.$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{9mL^2}{8}\ddot\theta = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot\theta + \frac{4g}{3L}\sin\theta = 0}$$

On n'aboutit pas à la même équation du mouvement, ce qui signifie que **les deux systèmes ne sont pas équivalents**.

> *La conclusion à retenir que la dynamique d'un solide en rotation n'est pas donnée par celle d'un matériel situé en son centre d'inertie, ce qui est une différence importante avec un solide translation, pour lequel on aurait obtenu la même équation avec les deux modèles.*

Exercice 2 : Volant d'inertie

1 La puissance fournie au système par le couple de frottement vaut

$$\mathcal{P}_\mathrm{f} = \Gamma_\mathrm{f}\,\omega = -\alpha\omega^2\,.$$

Comme il s'agit d'un couple de frottement, alors forcément $\mathcal{P}_\mathrm{f} < 0$ donc $\alpha > 0$.

2 L'équation différentielle se déduit du théorème du moment cinétique.
▷ Système : rotor, solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation ;
▷ Référentiel : lié au stator, donc probablement le référentiel terrestre, et en tous cas un référentiel galiléen ;
▷ Bilan des actions mécaniques :
  → Couple moteur Γ_0 ;
  → Couple de frottement $\Gamma_\mathrm{f} = -\alpha\omega$.
D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 - \alpha\omega\,,$$

ce qui se met sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{J}{\alpha}\,.$$

Le second membre de cette équation est constant, donc on peut chercher une solution particulière constante également,

$$\omega_\mathrm{f} = \frac{\tau\Gamma_0}{J} = \alpha\Gamma_0\,.$$

Physiquement, ω_f correspond à la vitesse de rotation une fois le régime permanent atteint. Ainsi,

$$\omega(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \omega_\mathrm{f}\,.$$

La constante A se trouve à partir de la condition initiale $\omega(0) = 0$, d'où

$$\boxed{\omega(t) = \omega_\mathrm{f}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

3 L'équation différentielle étant linéaire, on peut à partir du théorème de Fourier reconstruire la réponse à n'importe quelle forme de vibration comme une somme des réponses à des vibrations sinusoïdales. La vibration se traduit comme un second terme de forçage, mais comme le couple qu'elle exerce est indépendant de ω, **elle ne modifie pas le régime transitoire, qui est toujours caractérisé par $\tau = J/\alpha$.**

4 En prenant en compte le couple de vibration, l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{1}{\tau}\omega_\mathrm{f} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$$

Le second membre, le forçage, se compose d'une partie constante et d'une partie harmonique. Comme l'équation différentielle est linéaire, alors d'après le principe de superposition la solution particulière, c'est-à-dire en régime permanent, est la somme des réponses à chaque terme du forçage.

Le cas du terme constant est immédiat. Une solution particulière de l'équation différentielle ne prenant que ce forçage constant,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{1}{\tau}\omega_\mathrm{f}$$

est en effet directement $\omega_\mathrm{p,cst} = \omega_\mathrm{f}$.

Cherchons maintenant la réponse au forçage harmonique, solution particulière de l'équation différentielle ne prenant en compte que le forçage harmonique,

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\omega = \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$$

La représentation complexe est la méthode naturelle pour trouver cette solution. Posons donc comme suggéré par l'énoncé $\underline{\omega} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$. L'équation différentielle donne alors

$$\mathrm{j}\Omega\,\underline{\omega} + \frac{1}{\tau}\,\underline{\omega} = \frac{\gamma}{J}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{j}\Omega A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \frac{1}{\tau}A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{\gamma}{J} \qquad \text{d'où} \qquad A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{\gamma\tau}{J(1+\mathrm{j}\Omega\tau)}$$

Remplaçons τ par J/α et déterminons l'amplitude A à partir du module,

$$A = \frac{1}{J}\left|\frac{\gamma\frac{J}{\alpha}}{1+\mathrm{j}\Omega\frac{J}{\alpha}}\right| \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\Omega^2 J^2}}\,.}$$

5 Ajouter à la machine tournante un anneau de masse élevée et de grand rayon augmente considérablement son moment d'inertie. Comme on peut le voir sur l'expression obtenue à la question précédente, augmenter le moment d'inertie permet de diminuer l'amplitude des variations de vitesse angulaire : **un volant d'inertie permet donc de stabiliser la vitesse angulaire de rotation de la machine tournante**. En contre-partie, augmenter le moment d'inertie a aussi pour effet **d'augmenter la durée des régimes transitoires** avant que la vitesse angulaire ne retrouve sa valeur stationnaire de consigne.

Exercice 3 : Des poulies en équilibre

1 La poulie 1, d'axe Δ_1 est soumise à

- Son propre poids $m_0\,\vec{g}$. Compte tenu de la symétrie circulaire de la poulie, son centre d'inertie où s'applique le poids est situé sur l'axe Δ_1, le moment du poids par rapport à cet axe est donc nul.
- Une force exercée par le fil attaché à la masse m_1, égale à $\vec{P_1}$ car le fil idéal transmet parfaitement les efforts. Son point d'application est I, voir figure 1, donc son bras de levier vaut R (rayon de la poulie) et elle est donc de moment
$$\mathcal{M}_{\Delta_1} = +P_1 R = +m_1 g R$$
Le signe « + » tient au fait que $\vec{P_1}$ tend à faire tourner la poulie en sens direct autour de Δ_1.
- Une force exercée par le fil relié au point d'attache A, égale à $-\vec{T_1}$ compte tenu de la définition de $\vec{T_1}$. Son point d'application est J, donc son bras de levier est également R, et son moment vaut
$$\mathcal{M}_{\Delta_1} = -T_1 R\,,$$
le signe étant attribué car la force tend à faire tourner la poulie en sens horaire autour de Δ_1.
- Une action mécanique de liaison autour de l'axe Δ_1, de résultante $\vec{R_1}$ impossible à déterminer directement mais de moment nul par rapport à Δ_1 car les frottements d'axe sont négligés.

2 Le dispositif étant à l'équilibre, c'est a fortiori le cas de la poulie 1, donc on en déduit que la somme des moments qu'elle subit est nulle,

$$m_1 g R - T_1 R = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_1 = m_1 g}$$

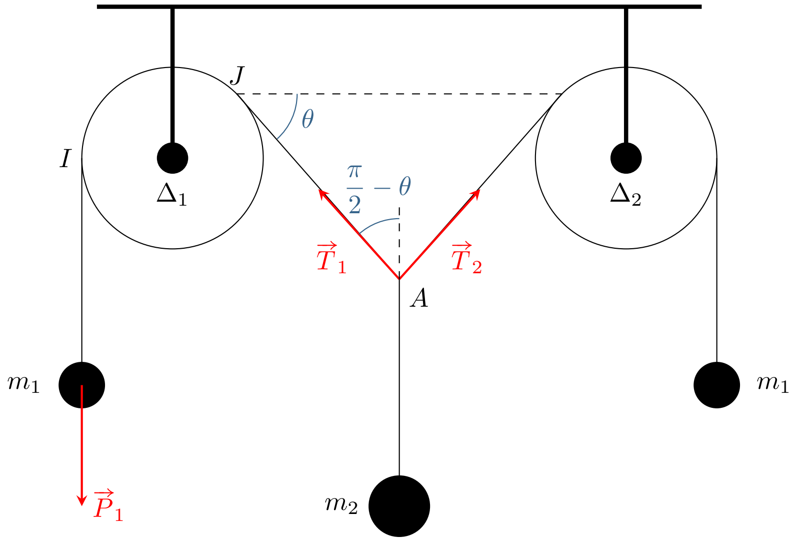


Figure 1 – Équilibre de deux poulies. Schéma introduisant les notations complémentaires du corrigé.

> *On a ici montré le résultat postulé dans le cours du chapitre M2 : lorsqu'un fil passe par une poulie, la force exercée sur ses extrémités change de direction mais pas de norme.*

$\boxed{3}$ L'action mécanique de liaison permet une liaison pivot parfaite. Son moment par rapport à l'axe Δ_1 est donc nul, comme annoncé dans la première question. D'après le théorème du centre d'inertie, comme la poulie 1 est à l'équilibre, alors la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur la poulie est nulle, donc

$$m_0\vec{g} + \vec{P}_1 - \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \vec{R}_1 = \vec{T}_1 + (m_0 + m_1)\vec{g}$$

$\boxed{4}$ Comme le système est symétrique, le même raisonnement permet de montrer que le fil reliant la poulie 2 au point A exerce au point A une force $\vec{T}_2$ symétrique de $\vec{T}_1$ par rapport à la verticale, voir figure 1, et en particulier de norme $m_1 g$. En outre, le fil relié à la masse m_2 transmet parfaitement les efforts, donc le point A est également soumis à une force $m_2\vec{g}$. Comme le point A est à l'équilibre, alors

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = \vec{0}$$

ce qui donne en projetant sur la direction verticale ascendante

$$T_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + T_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - m_2 g = 0 \qquad \text{soit} \qquad m_1 g \sin\theta + m_1 g \sin\theta - m_2 g = 0$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\sin\theta = \frac{m_2}{2m_1}}$$

On remarque que si $m_2 > 2m_1$ cette solution n'est pas définie : si la masse centrale est trop lourde, elle entraîne les deux masses sur les côtés et l'ensemble tombe. L'équilibre est impossible. Au contraire, si $m_2 \ll m_1$, on pratiquement $\theta = 0$: le fil supérieur est presque horizontal, ce qui est cohérent avec l'intuition.

Exercice 4 : Régulateur d'Archereau–Foucault

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

$\boxed{1}$ Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie « libre » que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Ceux encore enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire ω, leur vitesse vaut donc $R\omega$. Le point d'attache entre le contrepoids P et le fil se déplace lui à la vitesse $\dot{z}$ de P. Ainsi,

$$\boxed{\dot{z} = R\omega\,.}$$

$\boxed{2}$ Considérons comme système le point matériel P. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la force de tension du fil $\vec{T'}$, verticale et vers le haut. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\ddot{z}\vec{u}_z = mg\vec{u}_z + \vec{T'} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{T'} = m(\ddot{z} - g)\vec{u}_z\,.$$

D'après le principe des actions réciproques, le contrepoids P exerce sur le fil une force $-\overrightarrow{T'}$. Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en I la même force $-\overrightarrow{T'} = \overrightarrow{T}$ par définition. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u}_z\,.}$$

3

▷ Système : le cylindre, solide de moment d'inertie J_x ;

▷ Bilan des actions mécaniques :

→ la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe Ox ;

→ les frottements avec l'air exercent un couple $\Gamma_{\mathrm{f}} = -\lambda\omega$;

→ la force $\overrightarrow{T}$, de bras de levier R, a un moment non nul qui vaut $+TR$ car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct.

Comme le moment cinétique du cylindre par rapport à Ox vaut $J_x\omega$, on a d'après le théorème du moment cinétique

$$J_x \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + m(g - \ddot{z})R$$

Or d'après la première question $\ddot{z} = R\dot{\omega}$, donc

$$J_x \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + mgR - mR^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR\,.}$$

4 Si l'on applique la loi du moment cinétique au système composé, les forces de tension du fil sont des forces internes au système et il n'est plus nécessaire de les calculer puisqu'elles n'interviennent pas dans la loi du moment cinétique. En revanche, le moment cinétique total se compose désormais de deux termes grâce à la propriété d'additivité : le moment cinétique du cylindre et celui du contrepoids,

$$L_x = L_x(\text{cylindre}) + L_x(P) = J_x\omega + R \times m\dot{z}\,.$$

Le moment cinétique du contrepoids P se calcule par une technique de type bras de levier. Finalement, la loi du moment cinétique donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_x\omega + mR\dot{z}\right) = \Gamma_{\mathrm{f}} + \mathcal{M}_x(m\overrightarrow{g}) \qquad \text{soit} \qquad (J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + mgR$$

ce qui donne bien la même équation qu'à la question précédente.

5 Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2}\,,$$

faisant apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{J_x + mR^2}{\lambda}\,.$$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_{\mathrm{p}} = \frac{mgR}{\lambda}\,,$$

et la forme générale des solutions est

$$\omega(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \omega_{\mathrm{p}}\,,$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de 5τ, la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à ω_{p} : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre**.

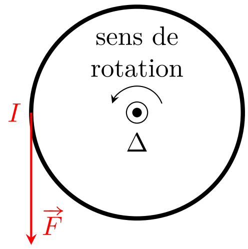


Figure 2 – Schéma de la toupie vue de dessus.

Exercice 5 : Lancer d'une toupie

Commençons par un schéma de la toupie en vue de dessus pour fixer les notations, figure 2. En toute rigueur, la force $\vec{F}$ est appliquée au fil entourant la toupie, mais en supposant celui-ci parfait (inextensible), cette force se retrouve au point I.

1 Comme on peut le constater sur le schéma, la force $\vec{F}$ est tangente à la toupie, appliquée en un point situé à distance R de l'axe de rotation. Comme elle tend à faire tourner la toupie en sens direct autour de l'axe de rotation Δ, son moment vaut donc

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = +FR\,.$$

En notant ω la vitesse angulaire de rotation, la puissance développée par la force vaut

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(F) \times \omega \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = F\,R\,\omega\,.}$$

2 La toupie est soumise à son poids, qui ne travaille pas car son altitude reste constante, à la force de réaction du sol qui ne travaille pas non plus car son point d'application (la pointe de la toupie) est immobile, et à la force $\vec{F}$ dont la puissance a été calculée à la question précédente. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué dans le référentiel terrestre,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \mathcal{P}(\vec{F} \qquad \text{d'où} \qquad J\,\omega\,\dot\omega = F\,R\,\omega$$

ce qui donne finalement pour l'accélération angulaire

$$\boxed{\dot\omega = \frac{F\,R}{J} = \frac{2F}{mR}\,.}$$

3 Comme la question concerne la vitesse à un instant donné seulement, il faut privilégier la loi intégrale de l'énergie cinétique,

$$E_\mathrm{c,f} - E_\mathrm{c,i} = W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}(\vec{F})$$

Le travail de F peut se calculer par exemple à partir de l'expression de la puissance. Comme $\mathcal{P} = F\,R\,\omega$ où ω est la vitesse angulaire, alors on en déduit le travail élémentaire

$$\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = F\,R\,\omega\,\mathrm{d}t = F\,R\,\mathrm{d}\theta\,.$$

En intégrant ce travail élémentaire sur les quatre tours, on trouve

$$W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}(\vec{F}) = F\,R\,(4\times 2\pi)\,,$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2}J{\omega_\mathrm{f}}^2 - 0 = 8\pi\,F\,R \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}\,.}$$

Exercice 6 : Gravimètre de Holweck–Lejay

1 Outre le couple de rappel, la masse m est également soumise à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_\mathrm{pp} = mgz + \mathrm{cte} = mgL\cos\theta + \mathrm{cte}$$

car l'axe z est orienté vers le haut. Ainsi, l'énergie totale de masse s'écrit

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}C\theta^2 + mgL\cos\theta + \mathrm{cte}\,.}$$

2 Les positions d'équilibre de la tige correspondent aux extremums de l'énergie potentielle,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_\text{éq}) = C\theta_\text{éq} - mgL\sin\theta_\text{éq} = 0$$

ce qui conduit à l'équation voulue

$$\boxed{\sin\theta_\text{éq} = \frac{C}{mgL}\theta_\text{éq}\,.}$$

Vous avez montré en cours de maths que $\forall x, \sin x \leq x$ donc $\sin\theta_\text{éq} \leq \theta_\text{éq}$. Ainsi, si $C/mgL > 1$ la seule position d'équilibre possible est $\theta_\text{éq} = 0$, alors que si $C/mgL < 1$ deux autres positions d'équilibre apparaissent, voir figure 3. Pour des valeurs encore plus faibles de C/mgL, d'autres positions d'équilibre sont possibles, dans lesquelles la tige fait plus d'un tour complet.

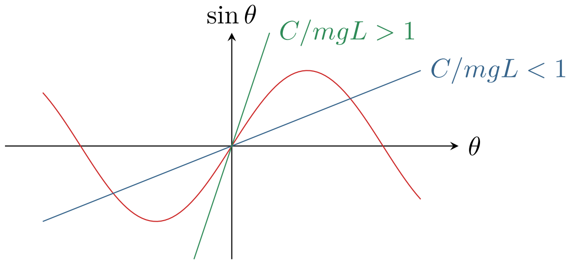


Figure 3 – Détermination des positions d'équilibre du gravimètre. Résolution graphique de l'équation $\sin\theta_\text{éq} = \frac{C}{mgL}\theta_\text{éq}$.

Qualitativement, une position d'équilibre sera stable si le poids et la force de rappel du ressort spirale se compensent.

▷ Si $C/mgL > 1$, le ressort est tellement raide qu'il ramène toujours la tige à la verticale : la position d'équilibre $\theta = 0$ est alors stable.

▷ Si $C/mgL < 1$, la raideur du ressort ne permet pas de ramener la tige à l'équilibre : les deux positions d'équilibre symétriques $\theta \neq 0$ sont stables, et la position d'équilibre $\theta = 0$ ne l'est plus (penser à une tige verticale qui ne reste verticale que parce qu'elle « ne sait pas » de quel côté tomber).

3 Pour déterminer analytiquement la stabilité d'une position d'équilibre, il faut calculer la dérivée seconde de l'énergie potentielle et étudier son signe,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\theta} = C\theta - mgL\sin\theta \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\theta^2} = C - mgL\cos\theta\,.$$

Ainsi, la dérivée seconde en $\theta = 0$ est positive si $C > mgL$ (équilibre stable) et négative sinon (équilibre instable).

4 M est en mouvement conservatif à trajectoire circulaire de rayon L. L'équation du mouvement s'obtient à partir de l'énergie mécanique

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + mgL\cos\theta + \text{cte}$$

qui est une constante du mouvement, donc

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = mL^2\ddot\theta\dot\theta + C\dot\theta\theta - mgL\dot\theta\sin\theta = 0$$

En factorisant par $\dot\theta$, on aboutit à l'équation du mouvement de la masse m,

$$\boxed{mL^2\ddot\theta + C\theta - mgL\sin\theta = 0\,.}$$

5 Supposer les oscillations de faible amplitude permet d'utiliser le développement limité $\sin\theta \simeq \theta$, qui transforme l'équation du mouvement en

$$mL^2\ddot\theta + (C - mgL)\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot\theta + \frac{C - mgL}{mL^2}\theta = 0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} \qquad \text{soit} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}$$

Pour bien comprendre le fonctionnement du gravimètre, posons $g_0 = C/mL$, d'où

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}$$

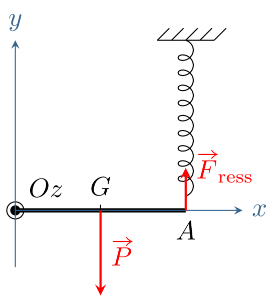
On remarque que si g_0 est réglé très proche de la valeur de g, alors de faibles variations de la valeur de g, par exemples dues à des variations de densité dans le sous-sol, se traduisent par de fortes variations de la période des oscillations, aisément mesurables.

> *Si $g_0 < g$, l'équation différentielle change de nature et n'est plus celle d'un oscillateur harmonique : il n'y a plus du tout d'oscillations.*

Annale de concours

Exercice 7 : Barre fixée à ses extrémités [oral CCP]

Attention ! Sur tous les dessins, la base doit absolument être dessinée **directe** pour que les produits vectoriels s'expriment correctement.



1 On étudie la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

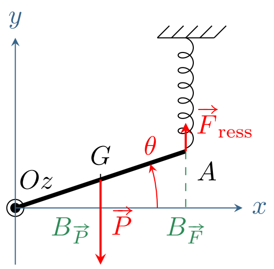
$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a\,.$$

Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}\,.}$$



2 On suppose maintenant la barre inclinée d'un angle θ.

Attention ! L'angle doit absolument être dessiné positif pour que les signes soient corrects.

Méthode 1 : conservation de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique de la barre vaut

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2} I_z \dot\theta^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot\theta^2\,.$$

Son énergie potentielle compte deux contributions, celle de pesanteur et celle élastique.

$$E_{\text{pp}} = mgy_G = mga\sin\theta \simeq mga\theta$$

$$E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0\right)^2 \simeq \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k} - 2a\theta\right)^2$$

en remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{c}} + E_{\text{pp}} + E_{\text{pe}}\right) = 0$$

soit

$$\frac{2}{3}ma^2 \times 2\dot\theta\ddot\theta + mga\dot\theta + \frac{1}{2}k \times 2\left(2a\theta - \frac{mg}{2k}\right)2a\dot\theta = 0$$

ce qui conduit en simplifiant par $\dot\theta$ à

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot\theta + 4ka^2\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot\theta + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Méthode 2 : théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\vec{P}} = -mga\cos\theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\vec{F}} = +k(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0) \times 2a\cos\theta \simeq +2ka(\ell_{\text{éq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0\right) = mga - 4ka^2\theta$$

Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$I_z\ddot{\theta} = -mga + mga - 4ka^2\theta \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\theta} + \frac{4ka^2}{I_z}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Résolution de problème

Exercice 8 : Vitesse d'un marcheur [oral banque PT]

Commençons par déterminer la fréquence des pas, en modélisant une jambe par un pendule pesant fait de la tige homogène dont l'énoncé donne le moment d'inertie. L'équation du mouvement s'écrit (cf. cours)

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J}\sin\theta = 0\,.$$

> *Il y a un facteur 2 car on suppose que le centre d'inertie de la jambe se trouve en son milieu, donc à distance $\ell/2$ de l'axe. Dans le cours, la distance utilisée était directement la distance OG.*

Le mouvement de la jambe étant d'amplitude assez faible (45° grand maximum), la pulsation des oscillations est donc approximativement égale à la pulsation propre,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

et ainsi la période du mouvement est de l'ordre de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\,.$$

En considérant qu'une jambe mesure environ 1 m, on trouve numériquement

$$T \simeq 1{,}6\,\text{s}$$

ce qui semble tout à fait raisonnable. En supposant par ailleurs qu'un pas mesure un peu moins d'un mètre, disons $d = 80\,\text{cm}$ pour simplifier les calculs, on peut en déduire la vitesse de marche, mais attention, un pas ne correspond qu'à la moitié d'une période du mouvement de la jambe.

$$\boxed{v = \frac{2d}{T} = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 3{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}\,.}$$

On trouve un ordre de grandeur excellent, puisque la vitesse typique de marche est de l'ordre de 4 à 5 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

On pourrait conclure que le modèle est assez chanceux de retomber sur la bonne valeur. Dans le cas présent, je pense plutôt que l'accord est dû au fait que l'évolution (la biologie) a favorisé un mouvement de marche qui se fasse à moindre coût pour le corps humain, et qui donc exploite au mieux les lois de la physique.