Version complétée

Transitoires du premier ordre

Plan du cours

(R) Résultat à connaître par cœur.

(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.

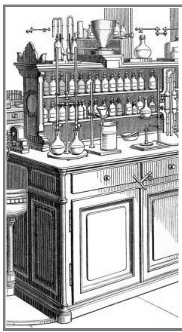
(D) Démonstration à savoir refaire.

(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

I - Tension aux bornes d'un condensateur soumis à un échelon de tension

I.A - Condensateur



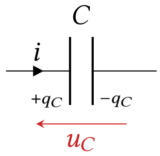
Un peu d'histoire : *Au XVIII^e siècle, la découverte du principe de stockage de charges électriques avec la bouteille de Leyde par von Kleist et Musschenbroek marque l'origine des condensateurs. Ces premiers modèles consistaient en deux électrodes séparées par un isolant, configuration encore valable aujourd'hui. L'évolution a conduit aux condensateurs électrolytiques, céramiques, à film ou encore aux supercondensateurs à très forte capacité. Leur rôle est essentiel dans le lissage des tensions des alimentations électriques, le filtrage fréquentiel ou encore le stockage temporaire d'énergie. On les retrouve ainsi dans des capteurs de proximité, les écrans tactiles, les véhicules électriques, les défibrillateurs cardiaques, etc.*

CC BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Loi de comportement**

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant.



La charge stockée sur les armatures est reliée à la tension aux bornes du condensateur par

$$q_C = C u_C$$

Le courant « traversant » le condensateur est relié à la tension à ses bornes par

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

La **capacité** du condensateur s'exprime en Farad : $[C] = \mathrm{F}$.

▹ **Attention !** Ces deux formes de la loi de comportement ne sont valables qu'en convention récepteur, et en définissant $+q_C$ comme la charge de l'armature vers laquelle pointe le sens du courant. Des signes apparaissent dans toute autre configuration.

▹ Dimensionnellement :

$[C] = \dfrac{[i]}{[\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t]} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1}$ ... ou bien directement avec les coulomb et la charge

Espace 1

La dimension d'une dérivée se retrouve avec le taux d'accroissement :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u_C(t+\Delta t)-u_C(t)}{\Delta t}$$

donc

$$\left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[u_C]}{[\Delta t]} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

▹ Si $|q_C|$ et donc $|u_C|$ augmentent, on dit que le condensateur se **charge**. S'ils diminuent, on dit qu'il se **décharge**.

> ***Remarque :*** *Vous apprendrez l'an prochain à relier la capacité d'un condensateur à sa géométrie et au matériau qui le constitue. Retenons que 1 F est une forte capacité : celle des condensateurs de TP varie de quelques pF à quelques µF.*

Pour approfondir : Montrons l'équivalence entre les deux formes de la loi de comportement du condensateur. Raisonnons entre deux instants proches t et $t+\mathrm{d}t$. La variation de charge $\mathrm{d}q_C = q_C(t+\mathrm{d}t) - q_C(t)$ du condensateur entre ces deux instants est égale à la charge δq qui a traversé la section du fil la plus proche du condensateur, orientée dans le sens du courant. Par définition de l'intensité (cf. cours E1) on obtient

$$\mathrm{d}q_C = \delta q \underset{\text{déf}}{=} i\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

puisque $q_C = C u_C$ avec C une constante indépendante du temps. ■

- **Équivalent en régime permanent**

Régime permanent signifie $u_C = \text{cte}$ donc $i = 0$

Espace 2

En régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
Le courant qui le traverse est toujours nul, quelle que soit la tension à ses bornes.

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Énergie stockée par un condensateur**

Puissance électrique (algébrique) reçue : Puisque $(u^2)' = 2uu'$, on identifie :

D

$$\mathcal{P}_C = u_C i = C u_C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} C {u_C}^2\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}$$

Espace 3

Travail électrique (algébrique) reçu :

M

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} C {u_C}^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C u_C^2(t_2) - \frac{1}{2} C u_C^2(t_1) = \mathcal{E}_C(t_2) - \mathcal{E}_C(t_1)$$

Espace 4

Le travail électrique reçu par un condensateur entre deux instants ne dépend que de la tension à ses bornes à ces deux instants, et pas du tout de la façon dont elle a évolué entre temps (brusquement, lentement, monotone, fluctuante, etc.).

$\rightsquigarrow$ caractéristique de la variation d'une énergie stockée.

L'énergie électrique stockée par un condensateur est reliée à la tension à ses bornes par

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

R

- **Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur**

Une énergie stockée est une grandeur toujours continue au cours du temps : le contraire voudrait dire qu'elle s'échange infiniment vite, donc avec une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue au cours du temps.

R

I.B - Phénoménologie du circuit RC

- **Étude expérimentale (voir figure 1)**

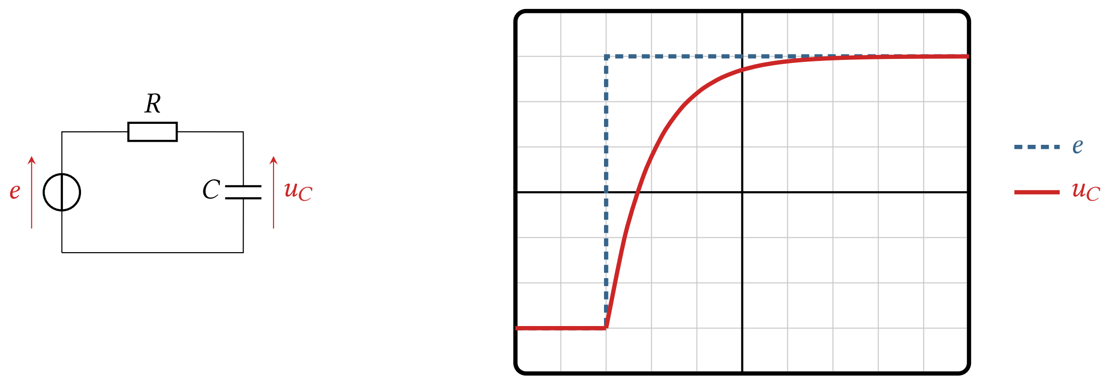


Figure 1 – Étude expérimentale du circuit RC. La tension imposée par le générateur varie instantanément de $e = 0$ à $e = E$ à l'instant $t = 0$, la courbe a été décalée sur l'écran pour bien la visualiser. Dessiner branchement oscillo

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Vocabulaire : faire légender sur le chronogramme

R

Le générateur impose un **forçage** au circuit, à laquelle l'évolution de u_C constitue la **réponse**.
Ici, le forçage est une tension constante par morceaux : on parle d'un **échelon de tension**.

En **régime établi**, la réponse est du même type que le forçage.
Il s'agit ici de constantes : le régime établi est dit **permanent** ou **continu**.

La réponse évolue lors du **régime transitoire**, qui fait suite à un changement de forçage jusqu'à atteindre un autre régime établi.

- **Interprétation des régimes permanents**

M

Application 1 : Interprétation des régimes permanents

Raisonnons lors d'un régime permanent où $e = E =$ cte. Montrer que l'on a alors $u_C = E$.

- **Estimation du temps caractéristique par analyse dimensionnelle**

Cherchons maintenant à estimer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, en raisonnant par **analyse dimensionnelle**. On note τ le **temps caractéristique** associé.

M

▹ *Identification des paramètres :* de quels paramètres du circuit τ dépend-il probablement ? On cherche une relation sous forme de **loi de puissance**.

$\tau = \tau(R, C, E) = E^n\, R^p\, C^q$

Espace 5

▹ *Postulat d'homogénéité :* la relation entre τ et ces paramètres doit être homogène, donc

$$[E^n\, R^p\, C^q] = [E]^n [R]^p [C]^q = [\tau] = \mathrm{s}\,.$$

▹ *Équation aux dimensions :* se ramener aux unités de base (ici V et A) conduit à un système linéaire.

$$[E] = \mathrm{V},\ [R] = \frac{[U]}{[I]} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1} \text{ et } [C] = \frac{[i]}{\left[\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right]} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1}$$

Espace 6

Système :

$$\begin{cases} 1 = q & (\mathrm{s}) \\ 0 = n + p - q & (\mathrm{V}) \\ 0 = -p + q & (\mathrm{A}) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} p = q = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

▹ *Conclusion :*

$\tau = RC$ quelle que soit l'amplitude E de l'échelon, ce qui se vérifie expérimentalement

Espace 7

⇝ l'analyse dimensionnelle permet d'aboutir à un résultat peu intuitif en un minimum de calcul !

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Le temps caractéristique d'un circuit dépend uniquement des composants
mais pas du forçage qui lui est imposé.

Q

$\rightsquigarrow$ ce résultat est en fait général à une grande classe de systèmes allant bien au delà des circuits électriques : les **systèmes linéaires**, dont nous parlerons abondamment dans la suite de l'année.

Q

Attention ! Bien que très puissante, l'analyse dimensionnelle possède néanmoins des limites :

- elle postule une expression sous forme de loi de puissance, ce qui est en pratique toujours vrai à notre niveau ... mais il pourrait y avoir une exception ;
- elle ne peut pas prévoir la présence de nombres sans dimension : $1/2$, π, etc.
- elle ne peut pas donner de résultat lorsque deux paramètres de même dimension, p.ex. deux résistances, interviennent car leur rapport est sans dimension.

Q

$\rightsquigarrow$ l'analyse dimensionnelle ne fournit pas de résultats exacts, mais seulement des résultats qualitatifs qui permettent d'anticiper les dépendances par rapport à certains paramètres et des ordres de grandeur numériques.

I.C - Équation différentielle

Méthode pour établir une équation différentielle électrique :

❶ Utiliser en alternance (une étape sur deux) les lois des mailles/des nœuds et les lois de comportement des dipôles pour modifier l'équation de travail ;
❷ À chaque étape, remplacer les grandeurs inconnues et sans intérêt par les grandeurs connues et/ou intéressantes ;
❸ Si nécessaire, dériver l'équation de travail pour y insérer certaines lois de comportement ;
❹ Toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations doivent être légendées sur le schéma du circuit.

M

Attention ! Pour arriver au résultat en un temps raisonnable, nommer toutes les tensions et tous les courants possibles puis écrire toutes les lois des nœuds et toutes les lois des mailles imaginables **n'est pas du tout une bonne idée** !

Application 2 : Équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur

M

Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C pour $t > 0$, c'est-à-dire une fois que le générateur impose $e = E$. L'écrire sous forme canonique en identifiant le temps caractéristique τ.

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

R

On appelle **forme canonique** d'une équation différentielle une écriture normalisée, faisant apparaître toujours les mêmes paramètres caractéristiques, ce qui facilite les calculs nécessaires à sa résolution.

La forme canonique d'une équation différentielle du premier ordre comme celle ci-dessus portant sur une grandeur s quelconque s'écrit

$$\underbrace{\overset{\text{préfacteur 1 devant la dérivée}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} + \overset{\text{inverse du temps caractéristique}}{\frac{1}{\tau}} s}_{\text{membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée}} = \underbrace{\text{des choses qui dépendent de } e}_{\text{membre de droite ou second membre : le reste = ce qui implique le forçage}}$$

Cette équation différentielle est dite

- **linéaire** : si un forçage $e_1(t)$ donne une solution $s_1(t)$, un forçage $e_2(t)$ une solution $s_2(t)$, alors un forçage $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ conduit à une solution $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$;
- **du premier ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé est une dérivée première ;
- **à coefficients constants** car τ ne dépend pas du temps.

I.D - Résolution de l'équation différentielle

• Principe général de résolution

On appelle **équation homogène** associée à une équation différentielle l'équation dans laquelle le second membre est nul. Elle s'écrit dans notre cas

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} s = 0$$

et ses solutions sont les fonctions de la forme

$$s_H(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad A = \text{cte}\,.$$

R

Toute solution d'une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants s'écrit comme la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + s_P(t)\,.$$

Pour trouver efficacement une solution particulière, on la cherche de la même forme que le forçage, c'est-à-dire ici constante.

Pour identifier *la* solution « physique » décrivant la réponse du système parmi l'ensemble des solutions mathématiquement possibles, la constante A se détermine en utilisant une **condition initiale** connue :

$$s(t=0^+) \underset{\text{CI}}{\overset{}{=}} S_0 \underset{\text{expr}}{=} A\,\underbrace{\mathrm{e}^{-0/\tau}}_{=1} + s_P(0) \qquad \text{d'où} \qquad A = S_0 - s_P(0)\,.$$

Attention ! Les grandeurs électriques peuvent être discontinues ! La condition initiale doit donc être exprimée du « bon côté » de la discontinuité, c'est-à-dire juste après.

> ***Remarque :*** *déterminer la condition initiale ne repose pas sur un raisonnement mathématique, mais sur un raisonnement physique, qui s'appuie de manière très générique sur des circuits équivalents et les lois usuelles des mailles et des nœuds.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

➽ **Pour approfondir :** Montrons d'abord par analyse synthèse que les solutions de l'équation homogène sont l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad A = \text{cte}\,.$$

▹ *Analyse :* soit s_H une solution de l'équation homogène. Posons $f(t) = \mathrm{e}^{+t/\tau} s_H(t)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = +\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \times s_H(t) + \mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}s_H}{\mathrm{d}t} = +\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \times s_H(t) + \mathrm{e}^{-t/\tau} \times \left(-\frac{1}{\tau} s_H(t)\right) = 0$$

en utilisant le fait que s_H est une solution de l'équation homogène. Sa dérivée étant nulle, on en déduit

$$f(t) = A = \text{cte} \qquad \text{donc} \qquad s_H(t) = \frac{A}{\mathrm{e}^{+t/\tau}} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

On a donc montré qu'une fonction s_H solution de l'équation homogène s'écrit forcément sous cette forme.

▹ *Synthèse :* un calcul de dérivée immédiat montre que *toutes* les fonctions de la forme $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ sont solutions de l'équation homogène, d'où le résultat.

Considérons ensuite l'équation complète, en notant $g(t)$ le second membre :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} s = g(t)\,.$$

Supposons que l'on en connaisse deux solutions s_1 et s_2. Montrons que $s_1 - s_2$ est une solution de l'équation homogène. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}\,(s_1 - s_2)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}(s_1 - s_2) = \left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s_1\right) - \left(\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s_2\right) = g(t) - g(t) = 0$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Par conséquent, $s_1(t) - s_2(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: on retrouve comme annoncé la forme générale des solutions à partir de la solution homogène et d'une solution particulière. ■

- **Application au circuit RC**

Application 3 : Détermination de la tension aux bornes du condensateur

M

Résoudre l'équation différentielle établie précédemment : en réponse à un échelon de tension $0 \longrightarrow E$, pour $t > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}\,.$$

1 - Déterminer une solution particulière et en déduire la forme générale des solutions de cette équation.

2 - Montrer que $u_C(t = 0^+) = 0$ et conclure.

3 - Représenter graphiquement $u_C(t)$.

- **Analyse qualitative du résultat**

▹ pour $t \ll \tau$:

Q

$\mathrm{e}^{-t/\tau} \simeq 1$ donc $u_C \simeq 0 \rightsquigarrow$ on est encore quasiment sur la condition initiale, le transitoire n'a pas encore commencé.

Espace 8

▹ pour $t \gg \tau$:

$\mathrm{e}^{-t/\tau} \simeq 0$ donc $u_C \simeq E \rightsquigarrow$ on est quasiment sur la solution particulière décrivant le régime permanent, le transitoire est terminé

Espace 9

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▹ pour $t \sim \tau$:
pas de simplification possible, on est en plein dans le transitoire

Espace 10

R

Le temps caractéristique τ donne l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

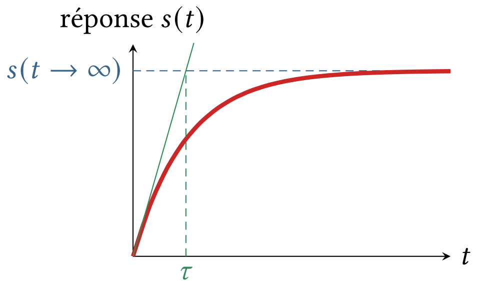
Qualitativement, la solution homogène décrit physiquement le régime transitoire, et est nulle au delà, alors que la solution particulière décrit le régime établi.

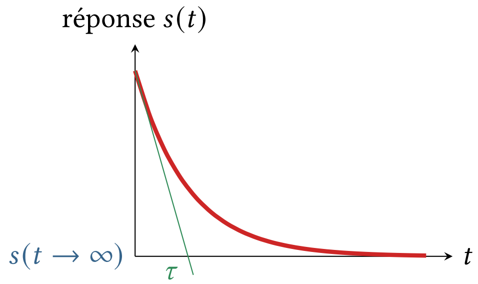
Attention ! Il s'agit d'une analyse *qualitative* ! En particulier, la solution particulière est bien présente lors du régime transitoire, qui n'a pas une durée « égale à » τ.

- **Détermination graphique de τ**

R

Sur tout graphe représentant la réponse d'un système du premier ordre,
la tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$.





Démonstration sur un exemple : raisonnons sur l'expression établie précédemment,

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) .$$

Équation de l'asymptote :
$u_C \longrightarrow E$ pour $t \longrightarrow \infty$

Espace 11

Équation de la tangente à l'origine :

▹ *Avec les notations des maths :* équation de la tangente en $x = a$ à la courbe représentative d'une fonction f

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = f(0) + f'(0)\,x$$

Espace 12

▹ *Avec les notations de la physique :*

$$u_{C,\tan} = u_C(0) + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) \times t = 0 + \frac{E}{\tau} t$$

Espace 13

Conclusion :
intersection lorsque $Et/\tau = E$, donc en $t = \tau$.

Espace 14

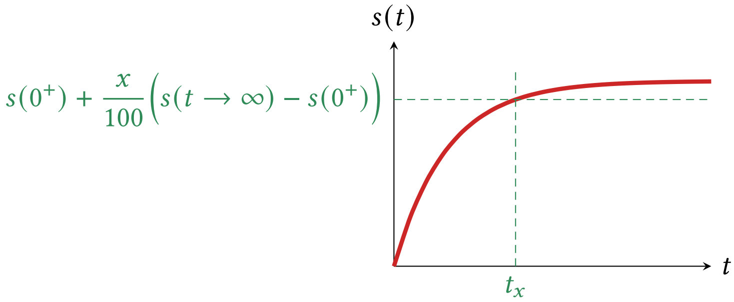
BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I.E - Temps de réponse

- **Définition**

On appelle **temps de réponse à x%**, noté t_x, la durée nécessaire pour que x% du transitoire ait lieu.

$$s(t_x) = s(t=0^+) + \frac{x}{100}\Big(s(t\to\infty) - s(0^+)\Big)$$



Attention ! Deux conventions de définition existent : on peut aussi définir t_x comme la durée nécessaire pour que l'écart entre la valeur de s et sa valeur finale soit de moins de x% de l'écart initial,

$$s(t_x) = s(t\to\infty) - \frac{x}{100}\Big(s(t\to\infty) - s(0^+)\Big)$$

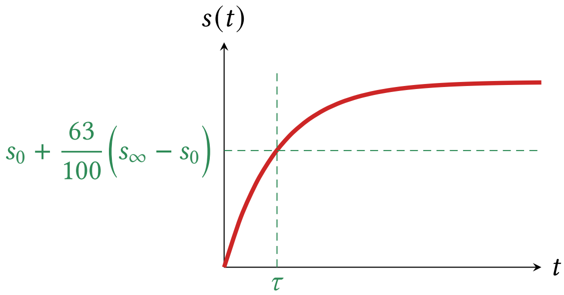
Les valeurs sont alors inversées : le temps de réponse à 95 % dans la première convention devient le temps de réponse à 5 % dans la deuxième, etc.

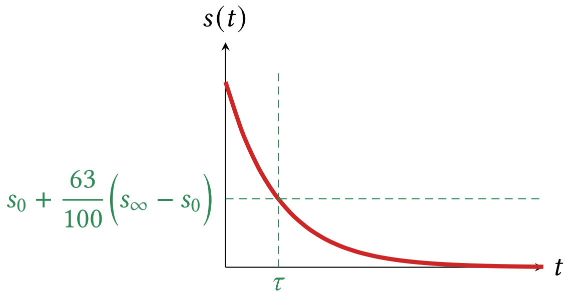
Application 4 : Temps de réponse

Déterminer en fonction de τ le temps de réponse à 95 % et à 99,9 % dans l'exemple du circuit RC.

- **Détermination graphique de τ (bis)**

Pour tout système du premier ordre, le temps de réponse à 63 % est égal à τ.





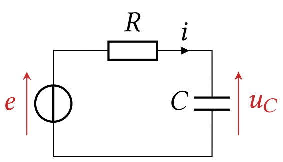
⇝ sur des relevés expérimentaux, cette méthode est plus fiable que celle de la tangente à l'origine.

I.F - Analyse énergétique

- **Bilan de puissance**

Méthode : la puissance échangée par un dipôle est reliée au produit $u \times i$ à ses bornes (fournie si convention générateur, reçue si convention récepteur)

⇝ tous les dipôles sont ici montés en série, donc multiplier la loi des mailles par i donne directement le bilan de puissance.



$$ei = Ri^2 + u_C i \text{ soit } \mathcal{P}_{\text{g,fournie}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_C$$

Espace 15

⇝ la puissance fournie par le générateur est répartie entre la résistance (où elle est dissipée par effet Joule) et le condensateur.

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Comme toutes les grandeurs dépendent du temps de manière « quelconque », aller plus loin est peu parlant : dans le cas du circuit RC, un bilan *d'énergie* est plus intéressant.

- **Bilan d'énergie**

Rappel : travail électrique échangé par un dipôle

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Application 5 : Bilan d'énergie du circuit RC

On s'intéresse toujours à la réponse à un échelon $0 \longrightarrow E$ du circuit RC, pour lequel on a

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

1 - Calculer de manière séparée le travail électrique total fourni entre $t = 0$ et $t \longrightarrow \infty$ par le générateur, l'énergie reçue par le condensateur et l'énergie dissipée dans la résistance.

2 - Vérifier la conservation de l'énergie.

3 - Définir et calculer le rendement énergétique global.

Généralisation :

On appelle **rendement énergétique** de la charge du condensateur le rapport

$$\rho = \frac{\Delta\mathcal{E}_C}{W_\mathrm{g}}$$

Dans le cas d'un échelon de tension, il est toujours égal à 1/2, quels que soient R, C et E.

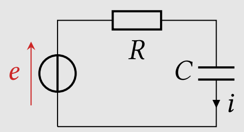
$\rightsquigarrow$ si le but est de stocker de l'énergie dans le condensateur, le charger en imposant un échelon de tension n'est pas la meilleure façon de procéder !

II - Courant dans un condensateur soumis à un échelon de tension

II.A - Équation différentielle

Lorsque l'on cherche à établir une équation différentielle d'un circuit électrique, il est parfois nécessaire de dériver l'équation de travail pour pouvoir utiliser certaines lois de comportement.

Application 6 : Équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un circuit RC



On s'intéresse comme précédemment à un circuit RC soumis à un échelon de tension $0 \longrightarrow E$ à l'instant $t = 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans le circuit pour $t > 0$.

Le temps caractéristique est propre à un système physique,
quelle que soit la grandeur mesurée du sein de ce système.

II.B - Résolution

Lorsque l'on s'intéresse à une grandeur qui peut être discontinue, la recherche de la condition initiale nécessite d'abord de l'exprimer en fonction de la grandeur continue puis d'utiliser la continuité pour conclure.

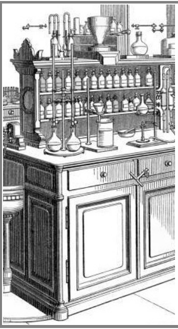
Application 7 : Intensité dans le circuit RC

Résoudre l'équation différentielle précédemment établie, et représenter graphiquement $i(t)$.

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III - Courant dans une bobine soumise à un échelon de tension

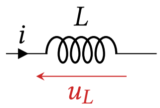
III.A - Bobine



Un peu d'histoire : *Les bobines sont des composants électriques formés d'un enroulement de fil conducteur, souvent plusieurs centaines de mètres. Leur fonctionnement a été compris au XIX*[e] *siècle grâce aux travaux de Faraday et Henry sur les phénomènes d'induction, que nous étudierons en fin d'année. Essentielles dans les circuits oscillants, les transformateurs et les filtres radiofréquence, on les retrouve dans les alimentations à découpage, les moteurs électriques, les chargeurs sans fil, ou encore des appareils médicaux comme les IRM. En revanche, leur grande taille et leur masse imposante les rend peu commodes dans les petits circuits électroniques, où elles sont remplacées par des circuits intégrés qui simulent le même comportement.*

- **Loi de comportement**

Une bobine est constituée d'un long fil conducteur enroulé sur lui-même,
ce qui génère un champ magnétique et des phénomènes inductifs à l'intérieur.



Sa loi de comportement en convention récepteur s'écrit

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L'**inductance** de la bobine s'exprime en Henry : $[L] = \mathrm{H}$.

Dimensionnellement,
$[L] = \frac{[u]}{[\mathrm{d}i/\mathrm{d}t]} = \mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1}$

Espace 16

- **Équivalent en régime permanent**

$i = \text{cte}$ donc $u_L = 0$

Espace 17

En régime permanent, une bobine est équivalente à un fil.
La tension à ses bornes est nulle, quel que soit le courant qui la traverse.

- **Énergie stockée par une bobine**

Puissance électrique (algébrique) reçue : Puisque $(u^2)' = 2uu'$, on identifie :

$$\mathcal{P}_L = u_L i = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}$$

Espace 18

Même sans passer par un calcul de travail électrique, que la puissance s'exprime comme une dérivée donne l'expression de l'énergie stockée dans la bobine.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

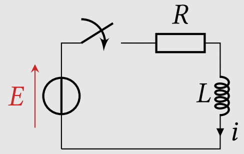
L'énergie magnétique stockée par une bobine est reliée au courant qui la traverse par

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$$

Une énergie stockée ne pouvant être discontinue, le courant traversant une bobine est toujours continu.

III.B - Temps caractéristique d'un circuit RL

Application 8 : Analyse dimensionnelle



On s'intéresse au circuit ci-contre, dans lequel un générateur de tension constante E alimente un circuit RL. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

En raisonnant par analyse dimensionnelle, identifier le temps caractéristique du circuit.

III.C - Équation différentielle et résolution

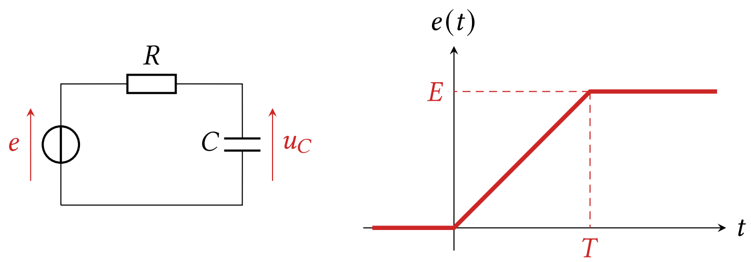
Application 9 : Transitoire d'un circuit RL

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans le montage de l'application 8.

IV - Résolution numérique par la méthode d'Euler

- **Un exemple problématique**

Nous nous sommes concentrés jusqu'à présent sur la réponse de circuits à des échelons de tension, ce qui permet une résolution analytique (= à la main). Supposons maintenant que l'on souhaite étudier par exemple la réponse d'un circuit RC à une rampe de tension de durée T, comme schématisé figure 2.



$$e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \dfrac{Et}{T} & 0 \leq t \leq T \\ E & t \geq T \end{cases}$$

Figure 2 – Rampe de tension.

La mise en équation est exactement identique à ce qui précède, si ce n'est que $e(t)$ dépend du temps différemment :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{e(t)}{\tau} .$$

La résolution devient toutefois nettement plus technique, car il y a deux changements de forçage, donc deux solutions à déterminer différemment et à raccorder par continuité à l'instant $t = T$. C'est faisable à la main, mais ... si on ne s'intéresse qu'à des aspects qualitatifs et/ou des valeurs numériques, passer à une résolution numérique est profitable.

- **Schéma d'Euler explicite**

Comme il n'est pas possible de résoudre une équation différentielle « à tout instant » avec un ordinateur, il est nécessaire de passer par une résolution à N **instants discrets** $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{N-1}$ séparés d'un **pas de temps** Δt ($t_n = n\,\Delta t$), en cherchant à ce que la valeur obtenue numériquement u_n soit aussi proche que possible de ce que donnerait la solution analytique $u(t_n)$.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> ***Remarque :*** *formellement, la discrétisation revient à transformer la recherche d'une fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en celle des éléments d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

En pratique, il faut transformer l'équation différentielle en une relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1} à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la tension aux instants passés u_n, u_{n-1}, ..., la tension de forçage à tout instant et les paramètres caractéristiques du système. La « recette » pour passer de l'équation différentielle à la relation de récurrence est appelée **schéma numérique**.

Schéma d'Euler explicite :

La dérivée est approximée par un taux d'accroissement entre les instants t_n et t_{n+1}, et toutes les autres grandeurs sont prises à l'instant t_n.

Application à l'exemple précédent :

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} + \frac{1}{\tau}\,u_n = \frac{1}{\tau}\,e(t_n) \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{\tau}\big(e(t_n) - u_n\big)\,.$$

Espace 19

> ***Remarque :*** *Bien sûr, il existe des schémas numériques plus astucieux, plus précis et/ou plus rapides, d'où l'intérêt d'utiliser des fonctions issues de bibliothèques. Nous le ferons un peu plus tard dans l'année. Notons d'ailleurs qu'il existe des domaines de recherche comme la climatologie, la turbulence, l'astrophysique, la physique des plasmas, la météorologie, etc., dans lesquels une grosse partie, pour ne pas dire la majorité, du travail théorique consiste à construire des schémas numériques performants pour résoudre des équations « assez simples » à poser.*

- **Exemple de code Python**

Pour un même schéma numérique, c'est-à-dire un même algorithme, il existe de nombreuses implémentations, c'est-à-dire de nombreuses façons d'écrire un code qui réponde à la problématique. Voici une proposition de code relativement simple, basée sur l'utilisation de listes.

```
### DEFINITION DES PARAMETRES PHYSIQUES :
R = 1e3             # en ohms
C = 1e-6            # en farad
tau = R*C           # en secondes

E = 2               # amplitude de la rampe, en volts
T = 1e-3            # durée de la rampe, en s


### PARAMETRES DE LA SIMULATION :
dt = 2e-5           # pas de temps, en s
N = 500             # nbre de pas de temps


### INITIALISATION DES LISTES :
t = [n*dt for n in range(N)]      # tps, en secondes
e = [None for n in range(N)]      # tension d'entrée, en V
u = [None for n in range(N)]      # tension du condensateur, en V
    # tout est initialisé à None, c-a-d "rien du tout"

### REMPLISSAGE DE LA LISTE e
for n in range(N):
    if t[n] <= 0:
        e[n] = 0
    elif t[n] <= T:
```


CC BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

```
26            e[n] = E*t[n]/T
27        else:
28            e[n] = E

30    ### RELATION DE RECURRENCE
31    u[0] = 0 # condition initiale
32    for n in range(N-1):
33        u[n+1] = u[n] + dt/tau * (e[n] - u[n])
```

Rôle des lignes 19 et 20 ?

Construire des listes directement de bonne taille, ce qui permet ensuite de les parcourir (et de les remplir !) par indice.

Espace 20

Pourquoi une seule inégalité à la ligne 27 et pas du tout à la ligne 29 ?

On ne fait ce test que si le précédent a répondu False, donc pas de risque d'écraser par erreur une bonne valeur

Espace 21

Pourquoi la boucle **for** de la ligne 34 s'arrête-t-elle à $N - 1$ au lieu de N ?

On remplit ensuite le $n + 1^{e}$ élément de la liste, qui n'en compte que N, il faut donc s'arrêter à $N - 1$ pour ne pas sortir de la liste.

Espace 22

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Éléments de correction des applications de cours

Application 4 : Temps de réponse

Dans ce cas
$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{donc} \qquad u_C(t_x) = 0 + \frac{x}{100}\,(E-0) = \frac{x}{100}E$$
On résout alors
$$\frac{x}{100} = 1 - \mathrm{e}^{-t_x/\tau} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{e}^{-t_x/\tau} = 1 - \frac{x}{100} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{t_x = -\tau \ln \frac{100-x}{100}\,.}$$
On a alors
$$t_{95} = -\tau \ln 0{,}05 \simeq 3\tau \qquad \text{et} \qquad t_{99.9} = -\tau \ln 0{,}001 \simeq 6{,}9\tau$$
ce qui confirme τ comme l'ordre de grandeur de la durée du transitoire.

Application 5 : Bilan d'énergie du circuit RC

1 Commençons par calculer le courant i au cours de la charge,
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CE\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = -CE \times \frac{-1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$
On en déduit le travail électrique fourni par le générateur,
$$W_\mathrm{g} = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = CE^2\,.$$
Il peut également être calculé de manière un peu plus astucieuse :
$$W_\mathrm{g} = EC\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = EC\left[u_C(t\to\infty) - u_C(t{=}0)\right] = CE^2$$
Le travail électrique reçu par le condensateur est égal à sa variation d'énergie,
$$\Delta\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 - 0\,.$$
Enfin, l'énergie dissipée par effet Joule vaut
$$W_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

2 On trouve bien
$$W_\mathrm{g} = \Delta\mathcal{E}_C + W_\mathrm{J}$$
L'énergie apportée par le générateur est ou bien stockée dans le condensateur ou bien dissipée par effet Joule.

3 On pose
$$\rho = \frac{\Delta\mathcal{E}_C}{W_\mathrm{g}} = \frac{1}{2}\,.$$

Application 7 : Intensité dans le circuit RC

L'équation différentielle s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = 0\,.$$
Forme des solutions : il s'agit d'une équation homogène (autrement dit la solution particulière est nulle), donc
$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Condition initiale : l'intensité dans un condensateur n'a pas de raison d'être continue : $i(0^+) \neq i(0^-)$. La déterminer demande donc de l'exprimer en fonction de la seule grandeur continue : u_C ... mais tout le travail est déjà fait ou presque, car il ne s'agit que de réutiliser les lois des mailles et des nœuds, écrites à l'instant 0^+.

$$E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$$

Or on a montré précédemment (ou on retrouve) que $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$, si bien que

$$i(0^+) = \frac{E}{R} \neq i(0^-) = 0\,.$$

Par conséquent,

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{R} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A\,\mathrm{e}^{-0/\tau} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

Application 8 : Analyse dimensionnelle d'un circuit RL

- Paramètres pertinents : $\tau = \tau(R, L, E)$ probablement
- Postulat d'homogénéité : $\tau = R^n L^p E^q$
- Équation aux dimensions :

$$[\tau] = (\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1})^n \times (\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1})^p \times (\mathrm{V})^q \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} 1 = p & (\mathrm{s}) \\ 0 = n + p + q & (\mathrm{V}) \\ 0 = -n - p & (\mathrm{A}) \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} p = 1 \\ n = -1 \\ q = 0 \end{cases}$$

- Conclusion : $\tau = \dfrac{R}{L}$, qui comme on pouvait s'y attendre par analogie avec le circuit RC dépend uniquement des composants du système et pas du tout du forçage.

Application 9 : Transitoire d'un circuit RL

Équation différentielle : pour $t > 0$, l'interrupteur est fermé donc

$$E = Ri + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=1/\tau} i = \frac{E}{L}$$

Résolution :

- forme générale des solutions :

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

- condition initiale : par continuité du courant dans une bobine, et puisque l'interrupteur est ouvert pour $t < 0$,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \qquad \text{donc} \qquad i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + \frac{E}{R}$$

  si bien que

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

BY-NC-SA © Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Expériences de cours

Date et salle :

Expérience : circuit RC série

- ☐ GBF
- ☐ Oscillo + de quoi projeter pour montrer l'écran de l'oscillo au vidéoprojecteur
- ☐ Résistance variable p.ex. boîte de résistances, ou bien AOIP $\times 1\,\mathrm{k\Omega}$
- ☐ Condensateur $\simeq 100\,\mathrm{nF}$
- ☐ Fils de couleur.

Merci ☺

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr