

# Champ magnétique

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Cartes de champ magnétique</b>	<b>2</b>
I.A	Sources de champ magnétique . . . . .	2
I.B	Symétries et invariances. . . . .	5
I.C	Moment magnétique . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Action mécanique de Laplace</b>	<b>8</b>
II.A	Force de Laplace élémentaire . . . . .	8
II.B	Couple de Laplace sur une spire . . . . .	10
<b>III</b>	<b>Mouvement d'un aimant dans un champ magnétique uniforme</b>	<b>11</b>
III.A	Analyse qualitative . . . . .	11
III.B	Équation du mouvement . . . . .	11
III.C	Énergie potentielle magnétique. . . . .	11
<b>IV</b>	<b>Mouvement d'un aimant dans un champ magnétique tournant</b>	<b>13</b>
IV.A	Production d'un champ tournant . . . . .	13
IV.B	Principe du moteur synchrone . . . . .	13

- R Résultat à connaître par cœur.
- M Méthode à retenir, mais pas le résultat.
- D Démonstration à savoir refaire.
- Q Aspect qualitatif uniquement.

*Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.*

On appelle **induction électromagnétique** le phénomène par lequel un courant ou une tension apparaît dans un conducteur lorsqu'il est soumis à un champ magnétique variable, ou lorsqu'il se déplace dans un champ magnétique.

Ce phénomène est d'une importance pratique capitale : il est à l'œuvre aussi bien dans les transformateurs, les moteurs électriques, les centrales électriques utilisant des machines tournantes, les plaques à induction, les chargeurs sans fil, etc.

Ce chapitre a pour but de présenter quelques propriétés des champs **magnétostatiques**, c'est-à-dire indépendants du temps, et de leurs actions mécaniques.

## I - Cartes de champ magnétique

Une carte de champ apporte des informations qualitatives sur le champ magnétique et les variations dans l'espace de sa direction, son sens et son intensité.

R



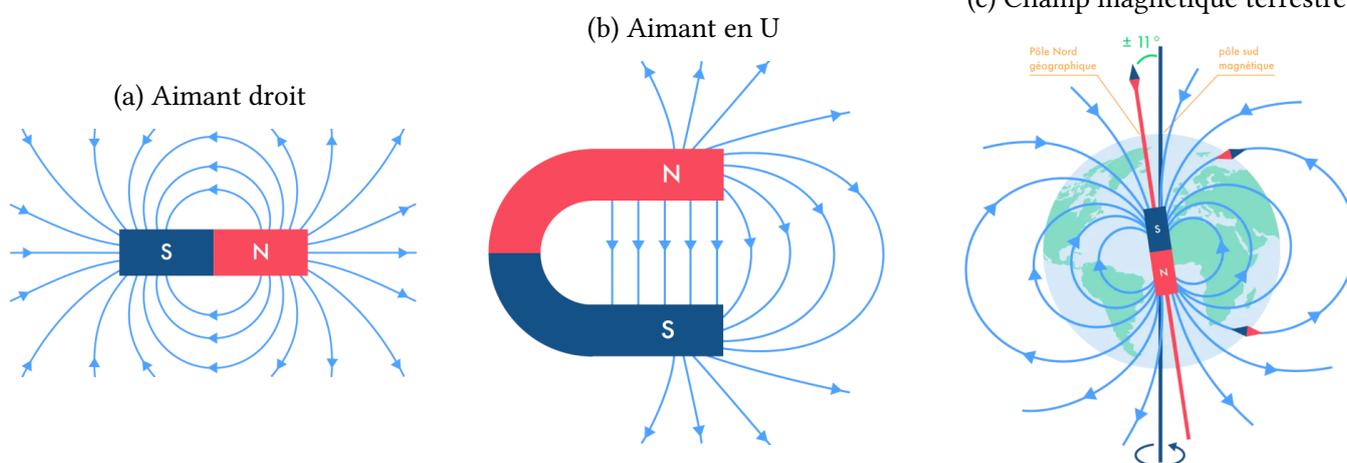
Une **carte de champ** est une représentation d'un ensemble de **lignes de champ**, c'est-à-dire de courbes tangentes au champ en tout point et orientées dans le sens du champ.

Plus les lignes de champ sont proches, plus le champ est intense.

### I.A - Sources de champ magnétique

Un champ magnétostatique peut être créé par la matière aimantée et les courants électriques. En outre, un champ magnétique variable peut également être créé par un champ *électrique* variable : vous y reviendrez l'an prochain.

#### • Exemples de champs créés par des aimants



Source images : <https://www.schoolmouv.fr>

► Un aimant possède deux pôles, appelés Nord et Sud. Deux pôles identiques se repoussent, deux pôles opposés s'attirent.

► Allure des lignes de champ :

partent du pôle Nord et aboutissent pôle Sud de l'aimant : « le champ sort par le Nord ».

Q

Espace 1

**Un peu de culture :** La direction pointée par le pôle Nord de l'aiguille d'une boussole, qui définit le pôle Nord géographique, coïncide donc avec le pôle Sud magnétique terrestre.

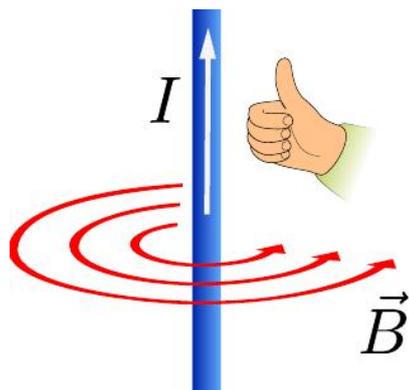
On distingue trois types de matériaux magnétiques :

- les matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt, etc.), qui peuvent posséder une aimantation permanente, indépendamment de la présence d'un champ extérieur ;
- les matériaux paramagnétiques (aluminium, titane, etc.), qui réagissent à un champ magnétique extérieur par une aimantation faible et temporaire, de même sens que ce champ ;
- les matériaux diamagnétiques (cuivre, plomb, eau, etc.), pour qui cette aimantation temporaire est de sens opposée au champ extérieur.

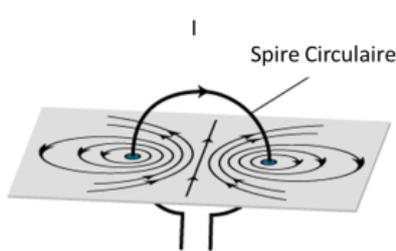
Lorsqu'un matériau ferromagnétique est chauffé à une température suffisamment élevée, supérieure à sa température dite de Curie, il devient paramagnétique. Pour lui rendre une aimantation permanente, il faut le refroidir en présence d'un champ extérieur suffisamment fort. C'est ainsi qu'il est possible de désaimanter et réaimanter un aimant !

• Exemples de champs créés par des courants

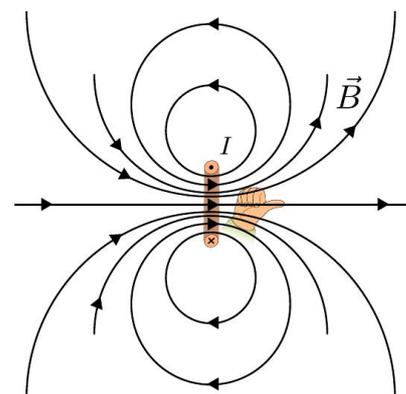
(a) Fil rectiligne



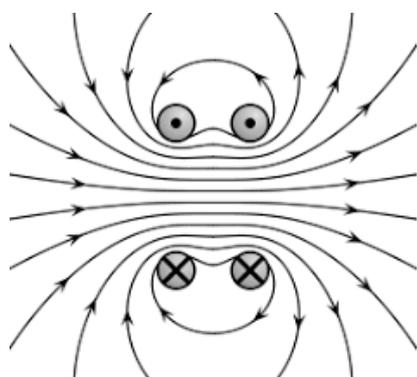
(b) Spire circulaire plane (vue 3d)



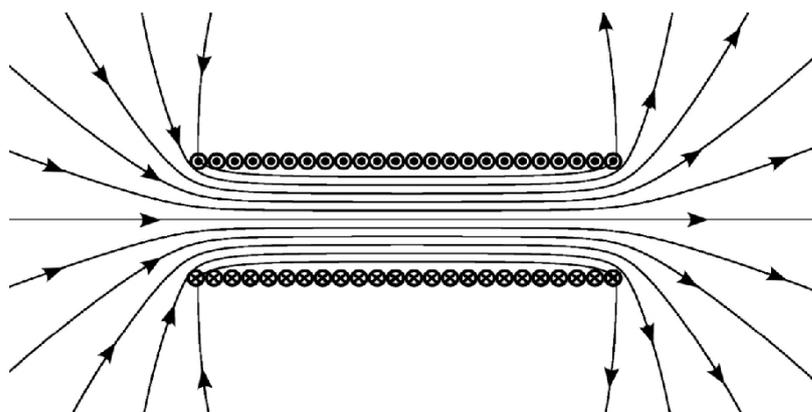
(c) Spire circulaire plane (vue en coupe)



(d) « Bobines de Helmholtz », c'est-à-dire deux spires séparées d'une distance égale à leur rayon :



(e) Solénoïde, c'est-à-dire une bobine regroupant un grand nombre de spires jointives :

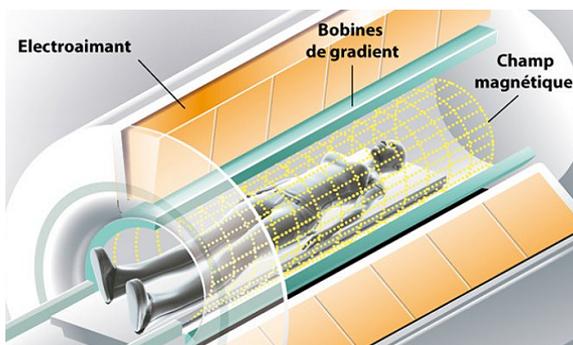


► Allure des lignes de champ : lignes fermées qui s'enroulent autour du/des fil(s)

Règle de la main droite :

- si le courant est dirigé dans le sens donné par le pouce, alors le sens d'enroulement des doigts donne le sens d'enroulement des lignes de champ ;
- si le courant s'enroule dans le sens des doigts, alors le sens du pouce donne le sens du champ.

Un peu de culture :



Dans un appareil d'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique), le patient est soumis à un champ magnétique intense créé par un grand solénoïde, l'électroaimant, à l'intérieur duquel il est placé. Ce champ permet d'aligner les moments magnétiques des noyaux d'hydrogène du corps. Des ondes radio les excitent, puis ces noyaux émettent un signal mesurable lorsqu'ils reviennent à leur état initial. Des champs magnétiques secondaires « de gradients », permettent de localiser ces signaux pour créer des images précises du corps.

Pour éviter de chauffer à cause du courant intense qui le parcourt, l'électroaimant est refroidi par de l'hélium liquide à 4 K. Cette température permet de rendre les matériaux supraconducteurs, ce qui revient à annuler leur résistance électrique ... et donc l'effet Joule.

- **Champ magnétique uniforme**

Q Allure des lignes de champ :  
parallèles et régulièrement espacées

Espace 2

M **Application 1 : Zones de champ uniforme**

Sur les exemples ci-dessus, identifier les zones de champ uniforme. Pourquoi un dispositif produisant un champ uniforme dans tout l'espace ne peut-il pas exister ?

Zones de champ uniforme : entrefer de l'aimant en U, entre les bobines de Helmholtz, à l'intérieur d'un solénoïde. Un champ uniforme dans tout l'espace est impossible car les lignes de champ doivent être fermées, et ne peuvent donc pas rester parallèles.

Espace 3

- **Principe de superposition**

R  Si deux sources créent respectivement des champs  $\vec{B}_1(M)$  et  $\vec{B}_2(M)$ , alors le champ résultant de la présence simultanée des deux sources vaut

$$\vec{B}_{1+2}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

- **Ordres de grandeur**

R  Les champs magnétiques s'expriment en **Tesla**, de symbole T.

Dans les unités de base du système international :

$$[F] = [q][v][B] \quad \text{soit} \quad \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{A} \cdot \text{s} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times [B] \quad \text{d'où} \quad [B] = \text{kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Espace 4

Q On retiendra les ordres de grandeur suivants :

- ▶ Champ magnétique terrestre : 50  $\mu\text{T}$ ;
- ▶ Aimant de réfrigérateur : 5 mT;
- ▶ Aimant permanent puissant : 0,1 à 1,5 T;
- ▶ IRM médical standard : 1,5 à 3 T;
- ▶ Aimants supraconducteurs avancés : 20 à 30 T;
- ▶ Champs pulsés en laboratoire (records) : >100 T.

***Un peu d'histoire :** Nikola Tesla, né en 1856 en Croatie, était un inventeur et ingénieur visionnaire. Il a grandement contribué au développement de l'électricité, et notamment du courant alternatif. Installé aux États-Unis, Tesla a aussi exploré la radio, les ondes électromagnétiques et les transmissions sans fil. Il déposa ainsi plus de 300 brevets. Souvent incompris, célèbre pour son mode de vie excentrique, il mourut seul et pauvre en 1943, mais est aujourd'hui reconnu comme l'un des plus grands inventeurs de l'histoire.*

## I.B - Symétries et invariances

On se restreint dans ce paragraphe aux champs créés par les courants, excluant le cas des aimants car nous n'avons pas suffisamment d'outils pour les modéliser.

### • Principe de Curie



Lorsqu'un phénomène physique peut s'interpréter en termes de cause et conséquence, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les conséquences.



La réciproque n'est pas vraie : les conséquences peuvent être « par hasard » plus symétriques que les causes.

→ en magnétostatique :

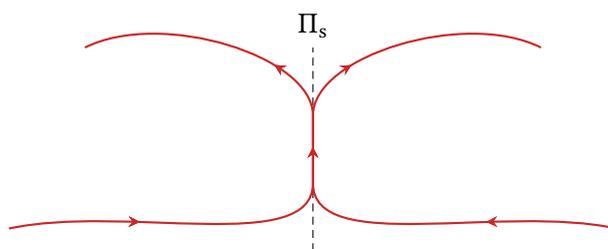
cause = les courants et leur répartition dans l'espace, conséquence = champ magnétique

Espace 5

### • Plan de symétrie de la distribution de courant et conséquence pour le champ magnétique



Une distribution de courant possède un **plan de symétrie**  $\Pi_s$  lorsque les courants en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_s$  sont symétriques l'un de l'autre. En particulier, le courant en un point  $P_s \in \Pi_s$  est inclus dans  $\Pi_s$ .



**Cas particulier** : si la distribution de courant est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

#### Application 2 : À la recherche des plans de symétrie



Identifier un plan de symétrie sur les exemples (c), (d) et (e) du paragraphe précédent.



Un plan de symétrie de la distribution de courant est un plan d'**anti-symétrie** des lignes de champ magnétique. Ainsi, pour deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_s$ ,

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi_s}(\vec{B}(M))$$

En particulier, le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_s)$  en un point  $M_s \in \Pi_s$  est orthogonal à ce plan.



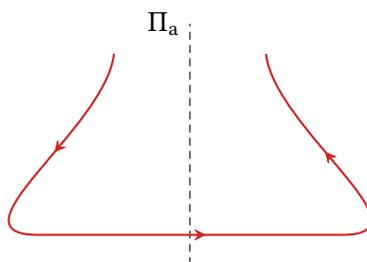
→ pour déterminer la direction du champ magnétique en un point, « il suffit » d'identifier un plan de symétrie de la distribution de courant passant par ce point.



- **Plan d'anti-symétrie de la distribution de courant et conséquence pour le champ magnétique**

Une distribution de courant possède un **plan d'anti-symétrie**  $\Pi_a$  lorsque les courants en tous points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $\Pi_a$  sont anti-symétriques, c'est-à-dire de sens opposé au symétrique.

En particulier, le courant en un point  $P_a \in \Pi_a$  est orthogonal à  $\Pi_a$ .



**Q** **Astuce pratique :** si l'on identifie un plan intéressant mais qu'il subsiste un doute sur la nature symétrie ou anti-symétrie, il suffit de regarder comment se place le courant en un point de ce plan : s'il est inclus dans le plan c'est un plan de symétrie, s'il lui est orthogonal c'est un plan d'anti-symétrie.

**Q** **Application 3 : À la recherche des plans d'anti-symétrie**

Identifier un plan d'anti-symétrie sur les exemples (c), (d) et (e) du paragraphe précédent.

**R** Un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant est un plan de **symétrie** des lignes de champ magnétique.

Ainsi, pour deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport au plan  $\Pi_a$ ,

$$\vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi_a}(\vec{B}(M))$$

En particulier, le champ magnétostatique  $\vec{B}(M_a)$  en un point  $M_a \in \Pi_s$  est inclus dans ce plan.

- **Invariances**

Une distribution de courant est dite **invariante** par un certain déplacement si ce déplacement ne modifie pas la façon dont un observateur voit la distribution.

Une invariance restreint les variables dont dépend la norme du champ créé par cette distribution.

**Q** En pratique, les distributions peuvent être invariantes par translation ou par rotation, ce qui supprime une dépendance en une variable cartésienne ou en une variable angulaire.

- **Mise en pratique**

Il est fréquent de s'intéresser au champ créé « au centre » de la distribution, ou autrement dit loin de ses extrémités. On raisonne alors fréquemment comme si elles étaient situées à distance infinie du point d'observation : on dit que l'on néglige les **effets de bord**.

**M** **Application 4 : Symétries, invariances et conséquences**

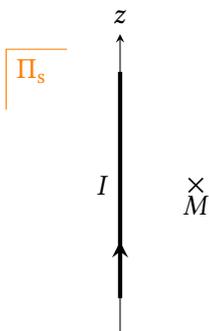
Justifier autant que possible la direction du champ magnétique créé par les distributions ci-dessous et les variables dont il dépend. On commencera par identifier le système de coordonnées le plus adapté.

1 - Champ créé par un fil rectiligne infini.

2 - Champ créé par un solénoïde infini.

**1 Champ créé par un fil rectiligne infini :**

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$



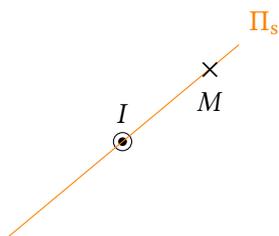
Coordonnées cylindriques.

Plan de symétrie :  $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  donc  $\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta$ .

Invariance par translation le long du fil, et rotation autour du fil, donc  $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

Cohérent que l'intensité du champ diminue quand on s'éloigne du fil.

Cohérent avec l'existence d'un plan d'anti-symétrie  $\Pi_a = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  dans lequel  $\vec{B}(M)$  est inclus puisque  $B_z(M) = 0$ .

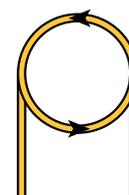
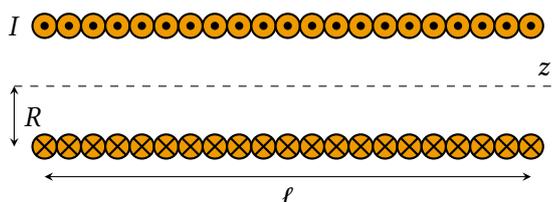
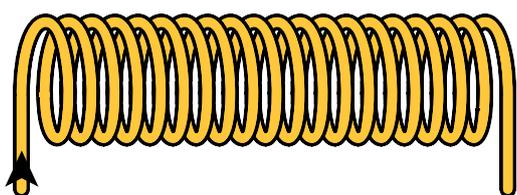


**2 Champ créé par un solénoïde infini :** la répartition des spires du bobinage est décrite par la densité linéique de spires, ou nombre de spires par unité de longueur,

$$n = \frac{N}{\ell} = \text{cte} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N \rightarrow \infty \\ \ell \rightarrow \infty \end{cases}$$

Le champ vaut alors

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } M \text{ à l'extérieur} \\ \mu_0 n I \vec{e}_z & \text{pour } M \text{ à l'intérieur} \end{cases}$$



Coordonnées cylindriques.

Plan de symétrie :  $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  donc  $\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{e}_z$ .

Invariance par translation le long du fil, et rotation autour du fil, donc  $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_z$ .

Cohérent avec l'existence d'un plan d'anti-symétrie  $\Pi_a = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  dans lequel  $\vec{B}(M)$  est inclus puisque  $B_\theta = 0$ . Il y a bien une dépendance en  $r$  dans le champ, mais elle est « cachée » par la condition intérieur/extérieur. On ne peut pas facilement prévoir que le champ est uniforme par morceaux.

## I.C - Moment magnétique

Q

Les cartes de champ d'un aimant droit et d'une spire présentent la même allure, voir figure 1, en particulier à grande distance. Par analogie, on peut associer un pôle Nord et un pôle Sud à la spire : un aimant ou une spire forment un **dipôle magnétique**. Ces dipôles sont décrits par leur moment magnétique, qui permet une description unifiée du champ créé mais aussi des actions mécaniques qu'ils subissent.

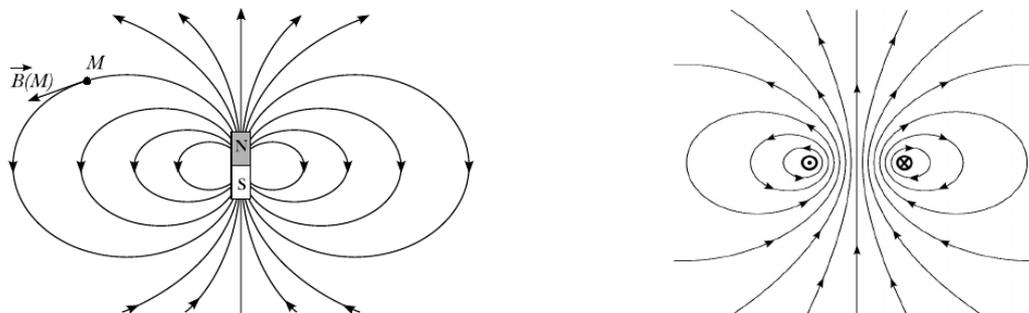
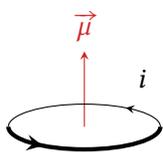


Figure 1 – Carte de champ d'un aimant droit et d'une spire.

R



On appelle **moment magnétique** d'une spire plane le vecteur

$$\vec{\mu} = iS\vec{n}$$

avec  $i$  l'intensité du courant,  $S$  la surface de la spire et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la spire, orienté par la règle de la main droite par rapport au sens de l'intensité.

Par analogie, le moment magnétique  $\vec{\mu}$  d'un aimant est défini comme celui de la spire qui produit le même champ à grande distance.

Le moment magnétique d'un dipôle est dirigé du pôle Sud vers le pôle Nord.

## II - Action mécanique de Laplace

Considérons un circuit conducteur parcouru par un courant  $i$  soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$ . Les électrons se déplaçant dans le circuit subissent la force de Lorentz, qui se traduit à l'échelle macroscopique par l'**action mécanique de Laplace**.

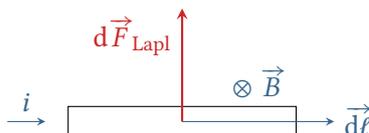
### II.A - Force de Laplace élémentaire

R

Sur un tronçon de fil élémentaire de longueur  $d\ell$  parcouru par un courant  $i$ , un champ magnétique  $\vec{B}$  exerce la **force de Laplace élémentaire**

$$d\vec{F}_{\text{Lapl}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$

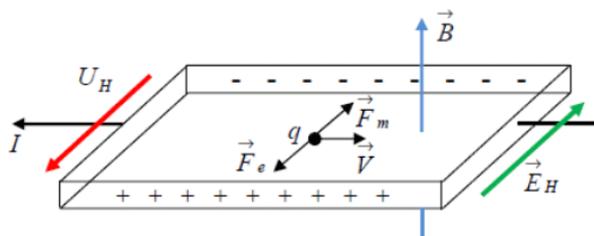
où le vecteur  $d\vec{\ell}$  est de même direction que le fil, de même sens que  $i$  et de norme  $d\ell$ .



⚠️ **Attention !**  $\vec{B}$  représente ici uniquement le champ extérieur, **PAS** le champ créé par le fil lui-même.

►► **Pour approfondir** : Le mécanisme physique permettant de passer de la force de Lorentz microscopique à la force de Laplace macroscopique est plus subtil qu'il n'en a l'air.

Considérons un électron de conduction, libre de se déplacer au sein du conducteur. Sous l'effet du champ magnétique, il tend à être dévié de sa trajectoire rectiligne par la force de Lorentz magnétique  $\vec{F}_m$ . Toutefois, si cet électron se trouve à proximité immédiate des bords de l'échantillon, il ne peut pas en sortir et se trouve bloqué dans son mouvement. Ainsi se crée une accumulation d'électrons d'un côté et un déficit de l'autre.



Source image : <https://science.mainguet.org>

Ces charges accumulées créent à leur tour un champ électrique  $\vec{E}_H$ , appelé **champ de Hall**, au sein de l'échantillon. Ce mécanisme perdure jusqu'à ce qu'un équilibre soit trouvé, où la déviation des électrons par le champ de Hall compense exactement leur déviation magnétique. Leur mouvement redevient alors rectiligne.

La force de Laplace subie par le conducteur est alors la force de Lorentz subie par « les atomes » du conducteur, ou plus précisément les cations fixes constituant le réseau cristallin au sein duquel évoluent les électrons. S'agissant de charges positives, cette force est dirigée dans la direction et le sens de  $\vec{E}_H$ , qui coïncide bien avec le sens de  $i\vec{dl} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{dl}$  est orienté dans le sens de  $i$ . Établir l'expression du champ de Hall, nécessaire pour démontrer ce résultat, demande un formalisme que nous n'avons pas en MPSI. ■

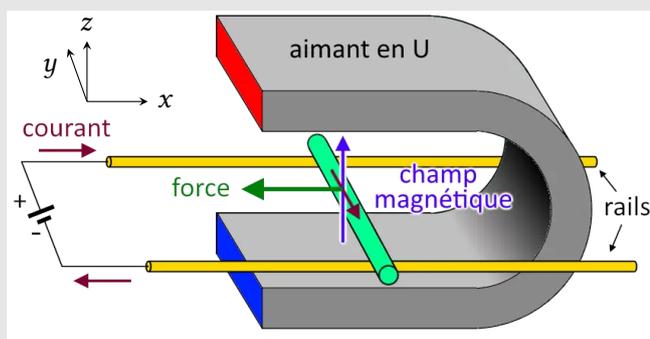
• **Résultante sur une tige rectiligne**

Pour le fil complet, la force de Laplace résultante est la somme des forces exercées sur chaque tronçon :

$$\vec{F}_{Lapl} = \sum_{\text{tronçons}} d\vec{F}_{Lapl} = \int_{\text{fil}} i \vec{dl} \wedge \vec{B}.$$

Dans le cas d'une tige conductrice rectiligne, le point d'application de la force est le milieu de la tige.

**Application 5 : Rail de Laplace**



Source image : <https://science.mainguet.org>

Exprimer la force de Laplace subie par la tige mobile de l'expérience des rails de Laplace. On notera  $a$  la distance entre les rails.

$$\vec{F}_L = \int_{\text{tige}} i (-dy \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_z = -iaB \vec{e}_x.$$

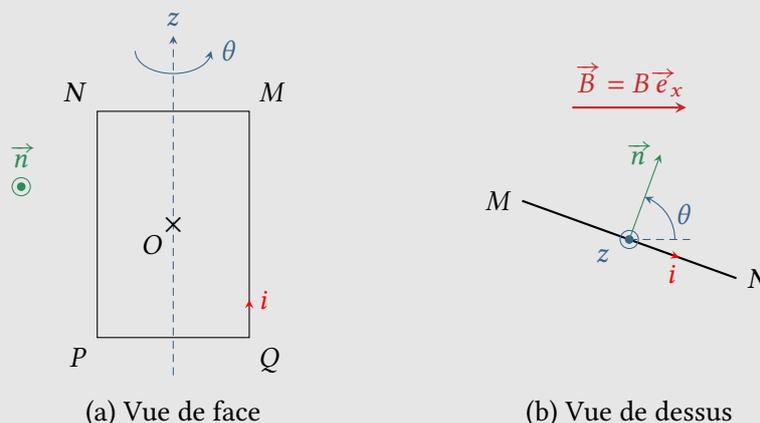
## II.B - Couple de Laplace sur une spire

### • Démonstration sur un exemple

M

#### Application 6 : Couple subi par une spire rigide rectangulaire

Considérons la spire rectangulaire rigide schématisée ci-dessous, de côtés  $a = NP = MQ$  et  $b = MN = PQ$  susceptible de tourner autour de l'axe  $(Oz)$ . Cette spire est parcourue par un courant  $i$ , et on note  $\vec{n}$  le vecteur normal à la spire, orienté par la règle de la main droite par rapport au sens du courant. Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .



- 1 - Exprimer la force de Laplace subie par chaque côté du rectangle, sans chercher à exprimer les produits vectoriels des vecteurs de base.
- 2 - Montrer que la force résultante des actions de Laplace à l'échelle de la spire est nulle.
- 3 - Pourquoi le moment résultant par rapport à l'axe de rotation  $(Oz)$  n'est-il pas nécessairement nul pour autant ? Le calculer.
- 4 - Exprimer ce moment en fonction uniquement du moment magnétique  $\vec{\mu}$  de la spire et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

### • Généralisation

La notion de moment magnétique permet de généraliser le résultat précédent aussi bien à une spire de géométrie quelconque qu'à un aimant.

R

L'action mécanique subie par un circuit ou un aimant de moment magnétique  $\vec{\mu}$  plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}$  est un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}.$$

Selon qu'il s'agisse d'un circuit ou d'un aimant, on parle de **couple de Laplace** ou de **couple magnétique**.

## III - Mouvement d'un aimant dans un champ magnétique uniforme

### III.A - Analyse qualitative

Considérons un aimant de moment magnétique  $\vec{\mu}$ , de centre de masse  $O$ , en liaison pivot autour d'un axe ( $Oz$ ) vertical, voir figure 2. Cet aimant est placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B\vec{e}_x$  uniforme.

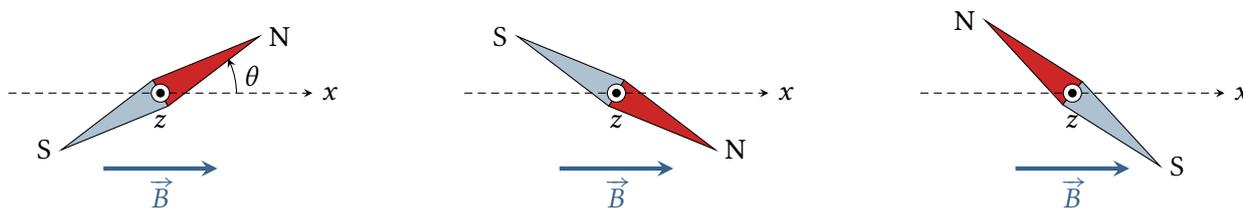


Figure 2 – Exemples de positions de l'aimant par rapport au champ magnétique.

Effet qualitatif du couple magnétique :

le dessiner sur les trois figures et montrer qu'il tend à aligner le moment magnétique  $\vec{\mu}$  avec le champ  $\vec{B}$ .

M

Q

Espace 8

Nature du mouvement :

probablement oscillations autour de l'axe ( $Ox$ )

Espace 9

Positions d'équilibre :

Positions où le couple magnétique est nul, c'est-à-dire lorsque l'aimant est aligné sur la direction du champ donc  $\theta = 0$  ou  $\pi$

Si  $\theta = 0$  la position est stable car en cas de perturbation le couple magnétique ramène l'aimant vers la position d'équilibre, si  $\theta = \pi$  c'est l'inverse, la position est donc instable.

Espace 10

### III.B - Équation du mouvement

#### Application 7 : Oscillations d'un aimant

Notons  $J$  le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe ( $Oz$ ). Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  et retrouver les positions d'équilibre.

M

### III.C - Énergie potentielle magnétique

#### • Expression

Établissons l'expression de l'énergie potentielle magnétique, par la méthode de l'intégrale première du mouvement.

Pour faire apparaître des puissances, on multiplie l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$  :

D

$$J\ddot{\theta} \times \dot{\theta} + \mu B \sin \theta \times \dot{\theta} = 0$$

et on identifie des dérivées de fonctions composées :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \mu B \cos \theta \right) = 0$$

On identifie alors l'énergie cinétique (de rotation) et on interprète le second terme comme l'énergie potentielle dont dérive le couple magnétique.

Espace 11

R



Un dipôle magnétique  $\vec{\mu}$  placé dans un champ  $\vec{B}$  extérieur possède une énergie potentielle

$$E_{\text{pm}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

► **Pour approfondir** : Bien qu'introduite différemment, cette énergie potentielle magnétique possède les mêmes caractéristiques que ses consœurs rencontrées dans le cours sur l'énergie mécanique.

En particulier, il existe une force magnétique subie par l'aimant dérivant de cette énergie potentielle :

$$\vec{F}_{\text{magn}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{\text{pm}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Si le champ magnétique est uniforme, la quantité  $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  l'est aussi et donc le gradient est nul : le moment magnétique ne ressent aucune force, l'action mécanique magnétique est un couple. En revenant à une vision « spire équivalente », cela est cohérent avec la nullité de la force de Laplace résultante sur un circuit fermé établie dans l'application 6.

Notons également que nous aurions pu établir son expression en raisonnant en termes de travail élémentaire : lorsque l'angle de l'aimant autour de l'axe ( $Oz$ ) passe de  $\theta$  à  $\theta + d\theta$ , le couple magnétique fournit un travail

$$\delta W = \Gamma_{\text{magn}} d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta$$

On cherche alors s'il existe une fonction  $E_{\text{pm}}$  telle que

$$\delta W = -dE_{\text{pm}} \quad \text{soit} \quad \frac{dE_{\text{pm}}}{d\theta} = \mu B \sin \theta$$

ce qui permet d'identifier l'expression de l'énergie potentielle magnétique, définie comme il se doit à une constante additive près. ■

### • Application aux oscillations d'un aimant

M

#### Application 8 : Analyse énergétique des oscillations d'un aimant

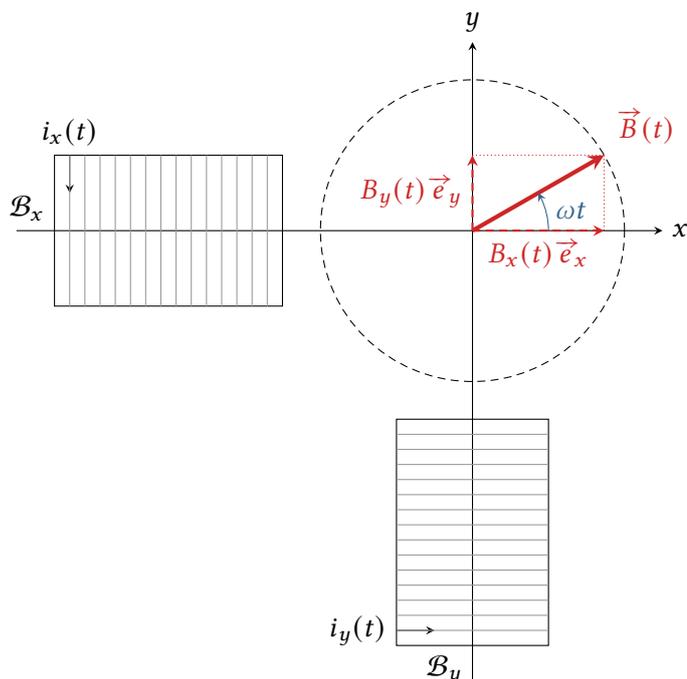
1 - En s'appuyant sur un graphe d'énergie potentielle, retrouver les positions d'équilibre de l'aimant et analyser leur stabilité.

2 - Montrer que l'aimant peut présenter deux types de mouvement, dits pendulaire et révolatif. Supposons qu'il se trouve à l'instant initial à  $\theta_0 = 0$  : quelle vitesse angulaire initiale faut-il lui communiquer pour obtenir un mouvement révolatif ?

## IV - Mouvement d'un aimant dans un champ magnétique tournant

### IV.A - Production d'un champ tournant

Un **champ tournant** est un champ magnétique de norme constante, dont la direction décrit un cercle parcouru à vitesse angulaire  $\omega$  constante.



Composantes du champ tournant :

$$B_x(t) = B \cos(\omega t) \text{ et } B_y(t) = B \sin(\omega t)$$

Espace 12

Comment les générer ?

champ créé par une bobine colinéaire avec l'axe de la bobine et proportionnel au courant, donc  $i_x = B_x/k = I_0 \cos(\omega t)$  et  $i_y = B_y/k = kI_0 \sin(\omega t)$ .

Espace 13

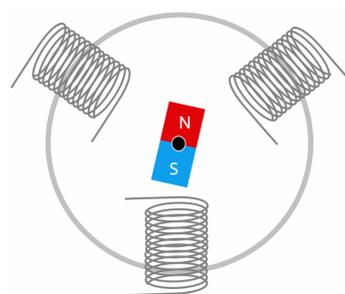
Un champ tournant peut être produit par superposition de champs créés par des bobines décalées parcourues par des courants sinusoïdaux de même amplitude.

Le déphasage entre les courants d'alimentation des bobines doit être égal au décalage angulaire entre les bobines.



**En pratique :** EDF délivre du courant triphasé, c'est-à-dire qu'un câble électrique contient en fait trois câbles, appelés phases, parcourus par des courants déphasés de  $2\pi/3$ . Dans un usage domestique, les phases sont réparties entre les différentes habitations. Dans un usage industriel, les trois phases peuvent être reliées à une même machine. Schématiquement, les champs tournants industriels sont produits par trois bobinages décalés de  $2\pi/3$ , chaque bobine étant alimentée par une phase de la tension d'alimentation de la machine.

### IV.B - Principe du moteur synchrone



Une **moteur synchrone** est constitué d'un rotor aimanté (aimant permanent ou plutôt spires parcourues par un courant constant) au centre de plusieurs bobines pouvant créer un champ tournant.

Qualitativement, l'aimant tend à s'aligner sur le champ, mais comme ce dernier tourne alors l'aimant le suit dans sa course et prend un mouvement de rotation uniforme à la même vitesse que le champ : on parle de **condition de synchronisme**. La mise en équation exhaustive est évidemment complexe, car le moment magnétique n'est pas ponctuel et le champ tournant dépend de l'espace, plus fort au voisinage des bobines : plus à ce sujet en PSI.

**Remarque culturelle :** Un moteur synchrone offre une puissance et un rendement élevés ainsi qu'une vitesse de rotation constante, ce qui le rend idéal pour les applications industrielles précises. Toutefois, il nécessite une commande complexe et ne démarre pas seul sans dispositif d'aide. Il se retrouve dans des installations de puissance variée : imprimantes 3d, drones, compresseurs de frigo, ascenseur, pompes industrielles, broyeur industriels, propulsion des sous-marins nucléaires, etc.

**Application 9 : Démonstration qualitative de la condition de synchronisme**

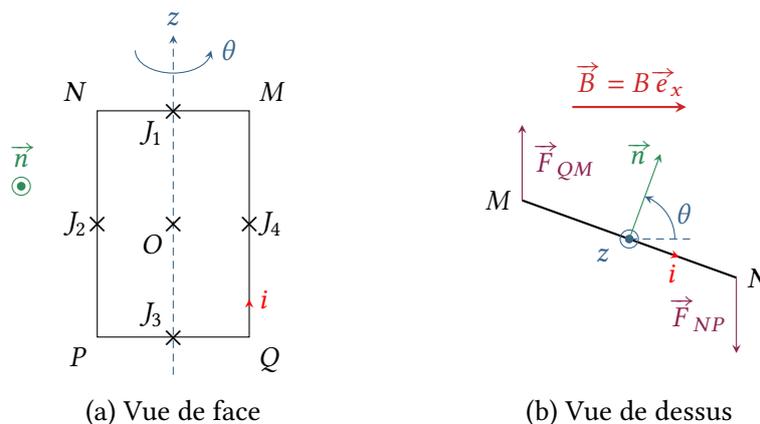
Supposons que le moteur est celui d'un treuil servant à soulever une masse. Le poids de la masse à soulever se traduit par un couple résistant  $\vec{\Gamma}_r$  constant subi par le rotor, en plus du couple magnétique.

Montrer qu'en régime permanent le rotor tourne à la même vitesse que le champ, et déterminer l'angle  $\phi$  entre la direction du champ et celle de l'aimant. Quel couple résistant maximal le moteur peut-il entraîner ?

## Correction des applications de cours

### Application 6 : Couple subi par une spire rectangulaire

Reprenons la figure de l'énoncé pour pouvoir poser des notations.



**Figure 3 – Action de Laplace sur une spire rectangulaire.**

- 1** Posons  $\vec{n}_\perp$  le vecteur unitaire tel que la base  $(\vec{n}, \vec{n}_\perp, \vec{e}_z)$  soit orthonormée directe. On a

$$\begin{aligned}\vec{F}_{MN} &= i(-b\vec{n}_\perp) \wedge \vec{B} \\ \vec{F}_{NP} &= i(-a\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_x = -iaB\vec{e}_y \\ \vec{F}_{PQ} &= i(+b\vec{n}_\perp) \wedge \vec{B} \\ \vec{F}_{QM} &= i(a\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_x = iaB\vec{e}_y\end{aligned}$$

- 2** Il n'y a qu'à sommer. Cela signifie que l'action mécanique de Laplace à l'échelle de la spire ne peut qu'être un couple, et pas une force.

- 3** Les forces s'appliquent en des points différents, donc bien que les forces soient deux à deux opposées leur moment ne l'est pas forcément. Les forces  $\vec{F}_{MN}$  et  $\vec{F}_{PQ}$  s'appliquent en des points de l'axe, donc leur moment est nul. Pour les deux autres, on peut raisonner avec les bras de levier ou vectoriellement :

$$\vec{M}_{NP} = \vec{OJ}_2 \wedge (-iaB\vec{e}_y) = \frac{b}{2} (+\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y) \wedge (-iaB\vec{e}_y) = -i\frac{ab}{2}B\sin\theta\vec{e}_z,$$

et de même

$$\vec{M}_{QM} = \vec{OJ}_4 \wedge (+iaB\vec{e}_y) = \frac{b}{2} (-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \wedge (+iaB\vec{e}_y) = -i\frac{ab}{2}B\sin\theta\vec{e}_z,$$

En conclusion,

$$\vec{\Gamma} = -i ab \sin\theta \vec{e}_z.$$

- 4** On calcule

$$\vec{\mu} \wedge \vec{B} = i ab \vec{n} \wedge B\vec{e}_x = i ab (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -i ab \sin\theta \vec{e}_z.$$

On identifie alors

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}.$$

### Application 7 : Oscillations d'un aimant

TMC par rapport à l'axe (Oz) :

$$J\ddot{\theta} = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = -\mu B \sin\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{J}\theta = 0.}$$

Les positions d'équilibre correspondent aux solutions particulières constantes, donc  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

### Application 8 : Analyse énergétique des oscillations d'un aimant

1 Les positions d'équilibre stables correspondent aux minimums d'énergie potentielle, soit  $\theta_s = 2k\pi$ , les positions instables aux maximums, soit  $\theta_i = \pi + 2k\pi$ .

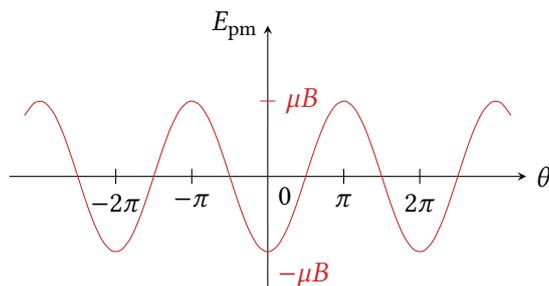


Figure 4 – Graphe d'énergie potentielle magnétique.

2 On a  $E_m = E_c + E_{pm} > E_{pm}$ .

→ mouvement pendulaire si  $E_m < \max(E_{pm}) = \mu B$ , et révolatif au delà car la vitesse ne s'annule jamais donc l'aimant ne fait jamais demi-tour.

Mouvement révolatif si

$$E_m = E_m(t=0) = \frac{1}{2}J\omega_0^2 - \mu B > \mu B \quad \text{soit} \quad \omega_0 > \sqrt{\frac{4\mu B}{J}}.$$

### Application 9 : Condition de synchronisme d'un moteur synchrone

Par application du TMC au rotor,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} + \vec{\Gamma}_r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} \vec{0}$$

Par projection sur l'axe de rotation,

$$\mu B \sin \phi - \Gamma_r = 0 \quad \text{soit} \quad \sin \phi = \frac{\Gamma_r}{\mu B} = \text{cte}.$$

L'angle entre la direction de l'aimant et celle du champ est constante, signe qu'ils tournent à la même vitesse. Puisque  $\sin \phi \leq 1$ , on en déduit que le moteur ne peut entraîner la charge que si le couple résistant est tel que  $\Gamma_r \leq \mu B$ .

Dans le cas où le moteur tourne à vide ( $\Gamma_r = 0$ ), le champ et l'aimant sont alignés.