

# Champ magnétique

## Cartes de champ magnétique

### Exercice 1 : Cartes de champ magnétique

1 | ✂ 0



▸ Analyse d'une carte de champ.

- Les lignes de champ s'enroulent autour des sources, qui sont donc situées au niveau des points noirs de chaque figure. Il y en a six sur la figure de gauche et quatre sur la figure de droite.
- Connaissant l'enroulement des lignes de champ, le sens du courant dans les fils se déduit de la règle de la main droite (l'enroulement des doigts donne le sens des lignes de champ, le pouce donne le sens du courant). Dans tous les cas, le courant est perpendiculaire au plan de la feuille. Raisonons dans le cas où la feuille est posée sur votre table. Sur la carte de gauche, le courant va du sol vers le plafond  $\odot$  pour les trois sources du bas et du plafond vers le sol  $\otimes$  pour les trois sources du haut. C'est le contraire sur la carte de droite : le courant va du sol vers le plafond  $\odot$  pour les deux sources du haut et du plafond vers le sol  $\otimes$  pour les deux sources du bas.
- Les zones de champ fort sont celles où les lignes de champ sont très rapprochées, les zones de champ faible celles où il y a peu de lignes de champ.
- Une zone de champ uniforme se traduit par des lignes de champ parallèles et régulièrement espacées : il n'y en a sur aucune des deux cartes.

### Exercice 2 : Champ sur l'axe d'une spire

 2 | ✂ 2 |  $\odot$ 


▸ Symétries et invariances ;  
▸ Moment magnétique.

**1** Tout plan contenant l'axe ( $Oz$ ) est un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant. Ainsi,  $\vec{B}(M)$  doit être inclus dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection. On a donc

$$\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{e}_z.$$

Géométriquement,

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

*Pour identifier ou contrôler la nature « anti-symétrie » du plan identifié, se placer en un point de ce plan et analyser le sens de courant : ici, il est orthogonal au plan, ce qui permet de reconnaître un plan d'anti-symétrie. S'il avait été inclus dans le plan, il se serait agi d'un plan de symétrie.*

**2** Compte tenu du sens du courant, le vecteur normal à la spire est  $\vec{e}_z$ . Ainsi,

$$\vec{m} = IS \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \vec{m} = \pi I R^2 \vec{e}_z.$$

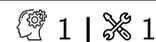
3 Dans la limite  $z \gg R$ , on a  $R/z \ll 1$ , ce qui permet de simplifier

$$\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{\left[ z^2 \left( 1 + \left( \frac{R}{z} \right)^2 \right) \right]^{3/2}} \simeq \frac{R^2}{z^3} \quad \text{donc} \quad \vec{B}(M) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \vec{e}_z$$

ce qui donne

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi z^3} \vec{m}.$$

### Exercice 3 : Aimantation



▷ Moment magnétique.

1 Le moment magnétique d'une spire plane d'aire  $S$  et parcourue par un courant  $I$  a pour norme  $\|\vec{\mu}\| = IS$ . On en déduit qu'un moment magnétique s'exprime en  $A \cdot m^2$ . Il est donc logique que l'aimantation, égale à un moment magnétique divisé par un volume, s'exprime en  $A \cdot m^{-1}$ .

2 Un aimant est d'autant meilleur que son moment magnétique est élevé et son volume faible : un bon aimant doit donc être fait d'un matériau qui possède **une forte aimantation**.

3 Pour une aimantation  $\|\vec{M}\| = 3 \cdot 10^6 A \cdot m^{-1}$ , le moment magnétique de l'aimant en question vaut

$$\|\vec{\mu}\| = \|\vec{M}\| \times \pi R^2 e = 0,2 A \cdot m^2.$$

4 Le moment magnétique d'un ensemble de  $N$  spires juxtaposées montées en série vaut  $\|\vec{\mu}\| = NI\pi R^2$ , ce qui donne donc

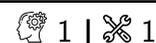
$$N = \frac{\|\vec{M}\| \pi R^2 e}{I \pi R^2} \quad \text{soit} \quad N = \frac{\|\vec{M}\| e}{I} = 3 \cdot 10^4.$$

Il faut donc un enroulement de 30 000 spires pour obtenir le même moment magnétique !

*On peut en retenir qualitativement que le magnétisme de la matière est bien plus fort que le magnétisme des courants.*

## Action mécanique d'un champ magnétique

### Exercice 4 : Équilibre d'un aimant



▷ Moment magnétique ;  
▷ Couple magnétique.

Considérons un axe  $\Delta$  sortant de la feuille  $\odot$ .

▷ Le poids a pour moment par rapport à cet axe  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -d \times mg$  (bras de levier  $OG = d$  mais rotation en sens négatif).

▷ Le couple magnétique s'exprime lui par  $\Gamma_\Delta = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta = +\mu B$  à l'équilibre où  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux. À l'équilibre,

$$\Gamma_\Delta + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \quad \text{d'où} \quad d = \frac{\mu B}{mg}.$$

### Exercice 5 : Définition historique de l'ampère



- Symétries et invariances ;
- Force de Laplace.

1 Considérons un point  $M$  appartenant au fil 2. Le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie du fil 1, donc

$$\vec{B}_1(M) = B_{1y}(M) \vec{e}_y.$$

La règle de la main droite appliquée au fil 1 montre que  $B_{1y}(M) > 0$ . On en déduit

$$\vec{B}_1(M) = + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{e}_y.$$

Attention, on ne s'intéresse ici qu'au champ créé par le fil 1. La distribution de courant à considérer pour l'étude des symétries et l'application de la règle de la main droite est donc le fil 1 pris seul.

2 Le fil 2 ressent la force de Laplace due à  $\vec{B}_1$  :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\text{fil 2}} I_2 d\ell \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L \vec{e}_x.$$

D'après le principe des actions réciproques,

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L \vec{e}_x.$$

On en déduit que **les deux fils s'attirent**.

3 La définition concerne le rapport  $F/L$ , avec les courants  $I_1$  et  $I_2$  et la distance  $d$  entre les fils imposés. La seule grandeur restante est bien  $\mu_0$ ,

$$\mu_0 = \frac{2\pi d F}{I_1 I_2 L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}.$$

On écrit usuellement  $[\mu_0] = \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$  ... ce qui apparaîtra naturellement quand nous exprimerons l'inductance d'une bobine dans le prochain chapitre.

### Exercice 6 : Moteur synchrone



- Champ magnétique tournant ;
- Moment magnétique ;
- Moment cinétique.

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 1.

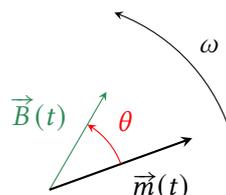
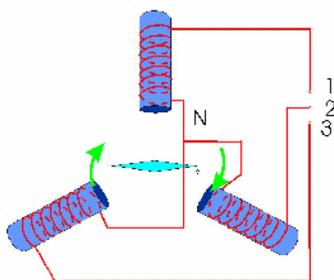


Figure 1 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.

1 On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de  $\pi/2$  et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasées de  $2\pi/3$  les



**Figure 2 – Champ tournant généré par trois bobines.** Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 2.

**2** Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique  $\vec{M}$ . D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

On en déduit que  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires, c'est-à-dire  $\theta = 0$ .

**3** Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{\mu} \wedge \vec{B} + \vec{M}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$\mu B \sin \theta = M_r \quad \text{soit} \quad \theta = \arcsin \frac{M_r}{\mu B} = 24^\circ.$$

L'angle  $\theta$  est bien positif, d'une part car il est défini de  $\vec{\mu}$  vers  $\vec{B}$ , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = M_r \omega \quad \text{donc} \quad \mathcal{P} = \mu B \omega \sin \theta = 205 \text{ W}.$$

Cette puissance provient du générateur électrique qui alimente les bobines produisant le champ tournant.

**4** La question précédente montre que  $\mu B \sin \theta = M_r$ , c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment  $M_r$ ) n'a d'influence que sur l'angle interne  $\theta$  mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour  $\sin \theta = 1$ , soit

$$\mathcal{M}_{\max} = mB = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

## Exercice 7 : Balance de Cotton



- ▷ Force de Laplace ;
- ▷ Moment cinétique.

Introduisons des coordonnées cylindriques de centre  $O$  et d'axe  $Oz$  tel que  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

1 Les parties circulaires ont pour centre  $O$ , si bien que l'élément de courant  $I d\vec{\ell}$  est porté par  $\pm\vec{e}_\theta$  ( $\oplus$  pour le conducteur aller et  $\ominus$  pour le retour) et la force de Laplace élémentaire  $I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  par  $\pm\vec{e}_r$ . Toutes ces forces sont donc des forces centrales de centre  $O$ , dont le moment en  $O$  est donc nul.

2 Sur la partie rectiligne de longueur  $L$ , la force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = -IL\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = ILB\vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du segment rectiligne, son bras de levier vaut donc  $a$ , d'où

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = a\vec{e}_r \wedge ILB\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}_L) = aILB\vec{e}_z.}$$

3 Le bras gauche de la balance est soumis à la force de Laplace et à son propre poids. Le bras droit de la balance est soumis à son propre poids et à celui de la masse  $m$  additionnelle qui a été déposée sur le plateau. L'énoncé indique qu'à vide la balance est équilibrée, ce qui veut dire que les moments en  $O$  du poids de chaque bras se compensent. Comme la balance est de nouveau à l'équilibre, le moment du poids de la masse  $m$  doit exactement compenser celui des forces de Laplace, c'est-à-dire

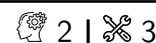
$$-a'mg\vec{e}_z + aILB\vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B = \frac{a'mg}{aIL}.}$$

4 La plus petite valeur de champ magnétique mesurable est celle pour laquelle  $m = \delta m$ , c'est-à-dire

$$\boxed{B_{\min} = \frac{a' \delta m g}{a I L} = 2 \text{ mT}.}$$

À titre de comparaison, le champ magnétique terrestre a pour norme  $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  et n'est pas mesurable avec la balance, mais le champ créé par un aimant permanent « basique » est de l'ordre de  $10 \text{ mT}$ . **La balance de Cotton est donc tout à fait utilisable**, mais peu précise pour les champs faibles.

## Exercice 8 : Cadre oscillant



- ▷ Moment magnétique ;
- ▷ Énergie potentielle.

Raisonnons énergétiquement, avec les notations de la figure 3, définies de telle sorte que la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_\Delta)$  soit directe.

1 L'énergie potentielle de pesanteur du cadre s'écrit

$$E_{pp} = mgy = -mg\frac{a}{2} \cos \theta.$$

Le moment magnétique du cadre vaut

$$\vec{\mu} = iab (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)$$

d'où on déduit l'énergie potentielle magnétique

$$E_{pm} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -iBab \sin \theta.$$

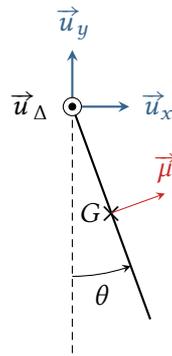


Figure 3 – Définition des notations pour l'étude du cadre oscillant.

L'énergie potentielle totale vaut donc

$$E_p = -\frac{mga}{2} \cos \theta - i B ab \sin \theta .$$

Les positions d'équilibre correspondent aux extrêmums de l'énergie potentielle, tels que

$$\frac{dE_p}{d\theta} (\theta = \theta_{\text{éq}}) = 0 = +\frac{mga}{2} \sin \theta_{\text{éq}} - i B ab \cos \theta_{\text{éq}}$$

ce qui donne

$$\tan \theta_{\text{éq}} = \frac{2ib B}{mg} .$$

Il n'y a donc qu'une seule position d'équilibre, et puisque tous les termes sont positifs, on en déduit  $0 < \theta_{\text{éq}} < \pi/2$ . En calculant la dérivée seconde,

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} (\theta = \theta_{\text{éq}}) = \frac{mga}{2} \cos \theta_{\text{éq}} + i B ab \sin \theta_{\text{éq}} > 0 ,$$

il s'agit donc d'un minimum d'énergie potentielle, et donc d'une position d'équilibre stable.

2 D'après le théorème de l'énergie mécanique,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - \frac{mga}{2} \cos \theta - i B ab \sin \theta \right) = 0 \quad \text{soit} \quad J \ddot{\theta} - \frac{mga}{2} \dot{\theta} \sin \theta - i B ab \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre, en posant  $\theta = \theta_{\text{éq}} + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . Au premier ordre,

$$\cos \theta = \cos \theta_{\text{éq}} - \varepsilon \sin \theta_{\text{éq}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \sin \theta_{\text{éq}} + \varepsilon \cos \theta_{\text{éq}} ,$$

d'où on déduit

$$J \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{mga}{2} \sin \theta_{\text{éq}} - i B ab \cos \theta_{\text{éq}}}_{=0} + \left( \frac{mga}{2} \cos \theta_{\text{éq}} + i B ab \sin \theta_{\text{éq}} \right) \varepsilon = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{J} \left( \frac{mga}{2} \cos \theta_{\text{éq}} + i B ab \sin \theta_{\text{éq}} \right)} .$$

Attention, ce n'est pas l'angle  $\theta$  qui est petit mais la différence  $\theta - \theta_{\text{éq}}$ . Les développements limités ne se font donc pas au voisinage de 0, mais de  $\theta_{\text{éq}}$ , en utilisant la formule de Taylor-Young sous la forme

$$f(\theta_{\text{éq}} + \varepsilon) = f(\theta_{\text{éq}}) + \varepsilon f'(\theta_{\text{éq}}) + o(\varepsilon) .$$