

# Circuit fixe dans un champ variable

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Loi de Faraday</b>	<b>1</b>
I.A	Mise en évidence expérimentale . . . . .	1
I.B	Flux magnétique et force électromotrice induite . . . . .	2
I.C	Loi qualitative de Lenz . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Auto-induction</b>	<b>4</b>
II.A	Flux propre et inductance propre . . . . .	4
II.B	Énergie magnétique . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Induction mutuelle</b>	<b>6</b>
III.A	Mise en évidence expérimentale . . . . .	6
III.B	Inductance mutuelle . . . . .	6
III.C	Loi de comportement de deux bobines couplées . . . . .	7
III.D	Énergie magnétique en présence de couplage inductif . . . . .	9

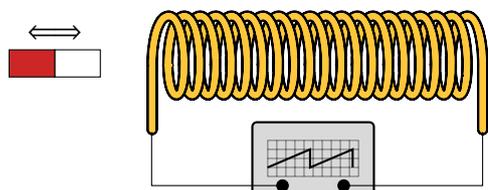
- |  |   |
|--|---|
| <b>(R)</b> Résultat à connaître par cœur.  | <b>(M)</b> Méthode à retenir, mais pas le résultat. |
| <b>(D)</b> Démonstration à savoir refaire. | <b>(Q)</b> Aspect qualitatif uniquement.            |

*Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.*

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les phénomènes d'induction dans les circuits immobiles soumis à un champ magnétique dépendant du temps : on parle alors d'**induction de Neumann** (ou cas de Neumann). La situation « symétrique » d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique stationnaire sera étudiée au chapitre suivant.

## I - Loi de Faraday

### I.A - Mise en évidence expérimentale



**Observations :**

- ▶ Aimant au repos à côté de la bobine :  $u_L = 0$
- ▶ Aimant en mouvement vers la bobine :  $u_L \neq 0$  de signe constant
- ▶ Aimant au repos à l'intérieur de la bobine :  $u_L = 0$
- ▶ Aimant en mouvement vers l'extérieur de la bobine :  $u_L \neq 0$  de signe opposé au cas précédent

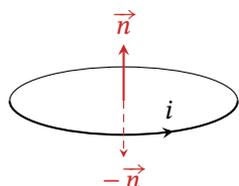
**Interprétation :** l'apparition d'une tension n'est pas liée à l'existence du champ magnétique créé par l'aimant, mais à la variation de la « quantité de champ magnétique » traversant la bobine.

La tension due au mouvement de l'aimant est appelée **force électromotrice induite**. Quand le circuit est fermé, il en résulte un courant appelé **courant induit**.

### I.B - Flux magnétique et force électromotrice induite

#### • Flux magnétique au travers d'un circuit plan

(R)

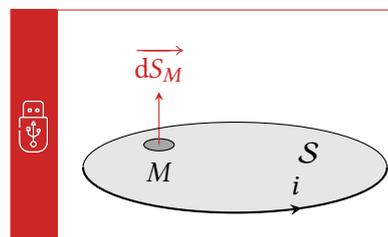


Considérons un circuit  $C$ , orienté par le sens du courant. Par convention, le **vecteur normal**  $\vec{n}$  à ce circuit est le vecteur unitaire orthogonal au plan du circuit orienté par la règle de la main droite par rapport à  $i$ .

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** Pour que  $\vec{n}$  soit défini, il faut donc **d'abord** orienter le courant.

**Remarque :** Le sens du courant qui intervient dans la définition est son sens d'algèbrisation conventionnelle, qui ne dit rien sur son sens réel : l'intensité peut être positive ou négative ... sans que cela ne change quoi que ce soit à  $\vec{n}$ .

(R)



On appelle **flux magnétique** au travers d'un circuit

$$\Phi = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot \vec{dS}_M \quad \text{avec} \quad \vec{dS}_M = dS_M \vec{n},$$

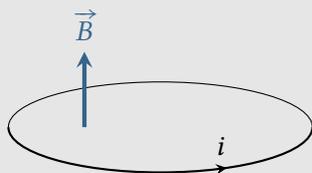
où  $S$  désigne la surface du circuit,  $dS_M$  l'élément de surface centré sur  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal au circuit.

**Remarque :** on a naturellement  $[\Phi] = T \cdot m^2$ , que l'on exprime occasionnellement avec une unité dédiée appelée le Weber  $Wb$ .

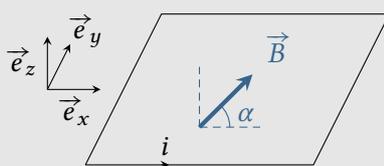
#### Application 1 : Calculs de flux

Calculer le flux magnétique au travers des circuits suivants, plongés dans un champ uniforme à l'échelle du circuit.

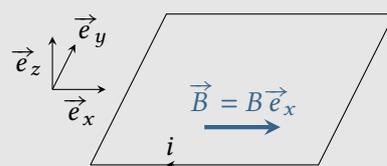
(a) Spire circulaire de rayon  $R$



(b) Spire carrée de côté  $a$



(c) Spire carrée de côté  $a$



Qualitativement, le flux magnétique peut s'interpréter comme « le nombre » de lignes de champ magnétique qui traversent le circuit, voir figure 1.

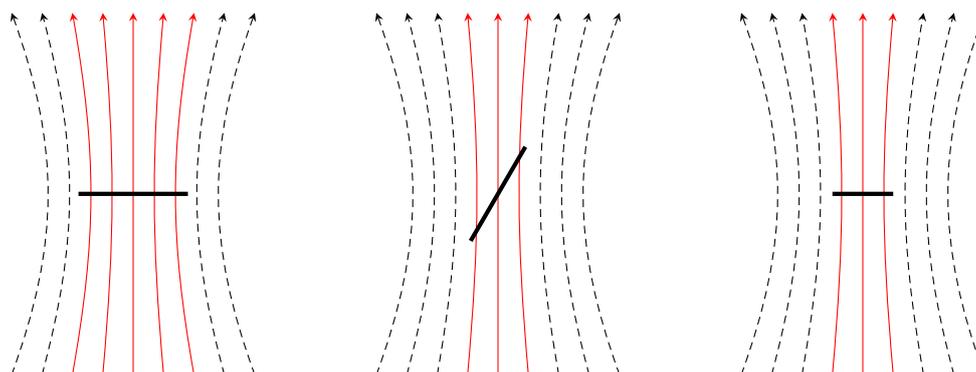


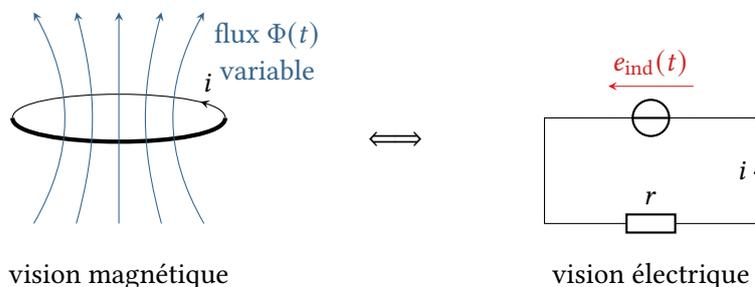
Figure 1 – Flux magnétique et lignes de champ. Le trait épais symbolise le circuit vu de côté.

## • Loi de Faraday

Les variations de flux magnétique  $\Phi$  au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un **générateur induit** dans le circuit, dont la **force électromotrice (fém) induite**  $e_{\text{ind}}$  est reliée au flux magnétique  $\Phi$  au travers du circuit par

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Le générateur induit doit être orienté en convention générateur par rapport à  $i$ .



Le générateur induit est un modèle équivalent (« tout se passe comme si »), dont on peut voir et mesurer les conséquences (mise en mouvement d'une partie mobile, courant induit, etc.) mais dont la fém n'est pas toujours directement mesurable.

**Attention!** Le respect des conventions d'orientation est crucial pour la bonne mise en équation d'un problème d'induction. Ainsi, la première étape dans tout exercice consiste à flécher le sens conventionnel du courant ... tout en se rappelant qu'il ne s'agit que d'un sens conventionnel, l'intensité pouvant être algébrique.

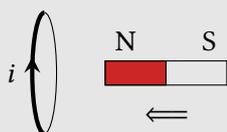
*Un peu d'histoire : Michael Faraday (1791-1867) est un physicien et chimiste britannique autodidacte, dont les découvertes ont profondément transformé la science. Il est célèbre pour avoir mis en évidence l'induction électromagnétique, principe fondamental des générateurs électriques, et pour avoir inventé la cage de Faraday (enceinte permettant de bloquer les champs électriques externes). Ses travaux sur l'électrolyse ont établi les bases de l'électrochimie moderne. Polyvalent, Faraday contribua également à l'optique, aux matériaux (découvrant le benzène) et au magnétisme. Communicant hors pair, il popularisa la science par ses conférences. Malgré ses modestes origines, il devint l'un des plus grands expérimentateurs de l'histoire, influençant profondément la physique et la technologie modernes.*

## I.C - Loi qualitative de Lenz

Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes.

En pratique, la cause est toujours la variation du flux magnétique au travers du circuit, les phénomènes d'induction tendant à atténuer ces variations de flux.

### Application 2 : Mise en évidence de la loi de Lenz



Un aimant est progressivement rapproché d'une spire conductrice de résistance  $r$ . Déterminer le signe de  $i$  (ou de manière équivalente le sens réel du courant) lors de l'opération, d'abord en raisonnant par la loi de Lenz puis en retrouvant le résultat avec la loi de Faraday.

On rappelle que les lignes de champ magnétique créées par un aimant partent du pôle Nord pour aboutir au pôle Sud, et que le champ est plus intense à proximité de l'aimant.

## II - Auto-induction

Un circuit parcouru par un courant crée un champ magnétique, dont le flux au travers du circuit lui-même est non nul, et peut donc causer des phénomènes inductifs : on parle alors d'**auto-induction**. Ces phénomènes existent dans tous les circuits, mais ne jouent un rôle prépondérant que dans les bobines où les nombreuses spires enroulées permettent d'amplifier leur effet. Ils sont négligeables dans la plupart des autres cas.

### II.A - Flux propre et inductance propre

Pour étudier les phénomènes inductifs dans un circuit, on distingue le **champ propre**, c'est-à-dire le champ magnétique créé par le circuit lui-même, du **champ extérieur**, créé par les autres sources à proximité (autre circuit, aimant, etc.) Le **flux propre**  $\Phi_p$  est le flux du champ propre au travers du circuit lui-même. Le champ propre étant proportionnel au courant  $i$  dans le circuit, le flux propre est également proportionnel à  $i$ .

R

On appelle **inductance propre** d'une bobine la grandeur  $L$  telle que

$$\Phi_p = Li,$$

où  $i$  est l'intensité traversant la bobine.

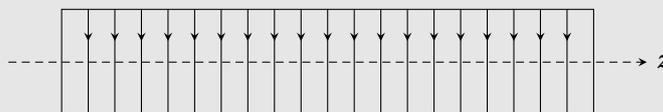
L'inductance propre est toujours positive, et ne dépend que de la géométrie de la bobine. En particulier, elle ne dépend pas de l'intensité qui la traverse.

L'inductance propre s'exprime en Henry :  $[L] = \text{H}$ .

D

#### Application 3 : Inductance propre d'un solénoïde infini

Considérons une bobine de longueur  $\ell$  très supérieure à son rayon, contenant  $N$  spires montées en série, d'axe  $\vec{e}_z$  et de surface  $S$ . La bobine est parcourue par un courant  $i$ .

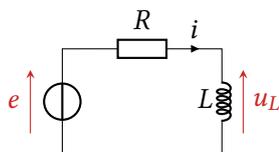


- 1 - On modélise la bobine par un solénoïde infini : que néglige-t-on ? Rappeler l'expression du champ magnétique.
- 2 - Calculer le flux  $\varphi$  au travers d'une spire de la bobine. En déduire le flux propre  $\Phi_p$ , puis l'expression de l'auto-inductance  $L$ .
- 3 - Retrouver la loi de comportement de la bobine telle que vous la connaissez.

**Remarques :** Une spire parcourue par un courant  $i$  créant un champ  $B \propto i$ , une bobine de  $N$  spires crée donc  $B \propto Ni$ . Ainsi, le flux au travers d'une spire  $\varphi \propto Ni$  et on a alors toujours  $\Phi_p \propto N^2 i$  et donc  $L \propto N^2$ . L'expression de  $L$  permet d'identifier facilement l'unité usuelle de  $\mu_0$  :  $[\mu_0] = \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### II.B - Énergie magnétique

Raisonnons pour l'établir sur un exemple simple, celui du circuit  $RL$  série.



**Équation électrique :**

$$e = Ri + u_L$$

Espace 1

**Bilan de puissance :** puissance = tension  $\times$  intensité donc

$$ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_{\text{g.fournie}} = \mathcal{P}_J + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Espace 2

Au contraire de la puissance reçue par la résistance, la puissance reçue par la bobine s'écrit comme la dérivée d'une certaine fonction, qui peut s'interpréter comme l'énergie stockée dans la bobine.

**Bilan d'énergie :** entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} e(t) i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} R i(t)^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) dt \quad \text{soit} \quad W_g = W_R + \left[ \frac{1}{2} L i(t_2)^2 - \frac{1}{2} L i(t_1)^2 \right]$$

Espace 3

Même conclusion que pour le bilan de puissance : le travail électrique reçu par la bobine entre deux instants s'écrit comme la différence d'énergie stockée dans la bobine entre ces deux instants, quelle que soit la façon dont les échanges d'énergie ont eu lieu.

**Comment l'énergie est-elle stockée ?**

forcément dans le champ magnétique, qui agit comme un réservoir d'énergie

Espace 4

Le champ magnétique créé par une bobine lui permet de stocker de l'énergie.

L'énergie magnétique stockée par une bobine est liée à son inductance par

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L i^2 .$$

► **Pour approfondir :** Partant de cette expression, il est possible d'établir une expression de l'énergie magnétique en fonction de  $B$ . Raisonnons sur un solénoïde de grande longueur, pour lequel on a

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z \quad \text{et} \quad L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S .$$

Faisons apparaître  $B$  dans l'énergie magnétique :

$$E_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i^2 = \frac{1}{2 \mu_0} \left( \frac{\mu_0 N i}{\ell} \right)^2 \ell S = \frac{B^2}{2 \mu_0} S \ell$$

En reconnaissant le volume du solénoïde  $V = S \ell$ , cette expression permet d'identifier une énergie magnétique par unité de volume,

$$u_{\text{magn}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

et d'aboutir à une expression qui se généralise à un volume  $\mathcal{V}$  et un champ  $\vec{B}$  quelconques,

$$E_{\text{magn}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{B(M)^2}{2 \mu_0} dV .$$

Cette expression montre notamment que l'énergie magnétique est toujours positive. Vous la retrouverez l'année prochaine en la reliant aux équations fondamentale de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell. ■

## III - Induction mutuelle

### III.A - Mise en évidence expérimentale

Plaçons deux bobines l'une à côté de l'autre, comme schématisé figure 2. La bobine ① est alimentée par une tension sinusoïdale, la bobine ② n'est pas alimentée, mais on observe la tension à ses bornes à l'oscilloscope.

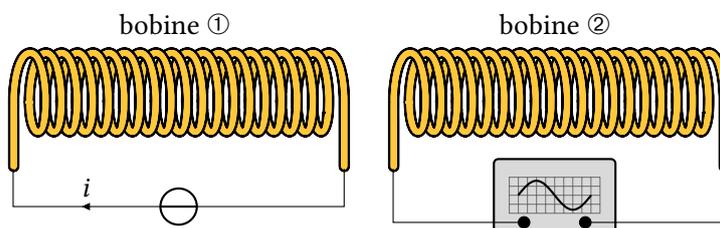


Figure 2 – Mise en évidence expérimentale du phénomène d'auto-induction.

**Observation :** apparition d'une tension aux bornes de la bobine ②, oscillant à la même fréquence que la tension imposée à la bobine ①, et d'amplitude d'autant plus grande que les bobines sont proches.

**Interprétation :**

Le champ créé par la bobine ① a un flux au travers de la bobine ② non-nul et qui dépend du temps, d'où un phénomène d'induction dont on mesure la fém induite.

Espace 5

→ on dit qu'il y a **couplage inductif** entre les deux bobines.

### III.B - Inductance mutuelle

Considérons le cas plus général où les deux bobines ① et ② sont parcourues toutes les deux par des courants  $i_1$  et  $i_2$ , et créent chacune un champ magnétique. On suppose qu'il n'y a pas d'autre champ extérieur.

- **Définition**

Flux total au travers de la bobine ① :

$$\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1} = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

On reconnaît alors le flux propre  $\Phi_{p1}$  et un flux « extérieur » qu'on appelle parfois flux croisé  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ .

Espace 6

Le champ créé par une bobine est proportionnel au courant qui la parcourt, il en est donc de même pour le flux.

Le flux créé par une bobine ② au travers d'une bobine ① est proportionnel au courant  $i_2$  :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

Le coefficient  $M$  est appelé **inductance mutuelle** ou **coefficient d'induction mutuelle**.

Il dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines,  
mais pas du tout des courants qui les parcourent.

Il peut être positif ou négatif, en fonction des conventions d'orientation choisies.

L'inductance mutuelle s'exprime en Henry :  $[M] = \text{H}$ .

De façon absolument pas intuitive, c'est *le même* coefficient  $M$  qui permet de décrire le couplage réciproque :

$$\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \end{cases}$$

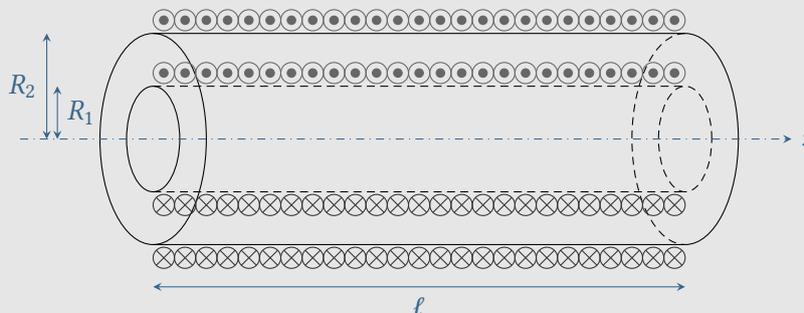
Ce résultat constitue le **théorème de Neumann**, qui se démontre avec des outils très éloignés du programme.

- **Calcul d'un coefficient d'induction mutuelle**

#### Application 4 : Solénoïdes imbriqués

Deux solénoïdes  $S_1$  et  $S_2$  de même axe ( $Oz$ ), de grande longueur  $\ell$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , et possédant respectivement  $N_1$  et  $N_2$  spires sont imbriqués l'un dans l'autre, comme schématisé ci-dessous. Ils sont parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ .

Calculer de deux manières différentes l'inductance mutuelle  $M$  entre ces deux solénoïdes.



**Remarque :** Un bobinage de  $N_1$  spires crée un champ  $B \propto N_1 i$ , donc au travers d'une spire d'un second bobinage de  $N_2$  spires  $\varphi_{1 \rightarrow 2} \propto N_1 i$  d'où  $\Phi_{1 \rightarrow 2} \propto N_1 N_2 i$  et  $M \propto N_1 N_2$ .

- **Circuits en influence totale**

Deux circuits sont dits **en influence totale** lorsque toutes les lignes de champ créés par l'un passent au travers de l'autre.

#### Application 5 : Solénoïdes imbriqués en influence totale

- 1 - À quelle condition les deux solénoïdes de l'application précédente sont-ils en influence totale ?
- 2 - Montrer que dans ce cas l'inductance mutuelle s'exprime simplement en fonction des inductances propres des deux solénoïdes.

**Généralisation :** on a toujours

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2},$$

le maximum étant atteint lorsque les circuits sont en influence totale.

*Démonstration physique :*

le flux croisé est maximum en valeur absolue lorsque les circuits sont en influence totale, l'inductance mutuelle  $M$  est donc forcément maximale dans cette situation également.

Espace 7

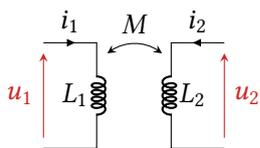
### III.C - Loi de comportement de deux bobines couplées

Faire un dessin. Loi de Faraday :

$$u_{L1} = -e_{\text{ind},1} = + \frac{d\Phi_{\text{tot} \rightarrow 1}}{dt} = + \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + M i_2) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Espace 8

R



En présence de couplage inductif, les lois de comportement des bobines ne s'écrivent pas sous la forme habituelle «  $u = L \frac{di}{dt}$  » mais impliquent les intensités dans les deux circuits couplés.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

M

### Application 6 : Modélisation simplifiée d'un transformateur

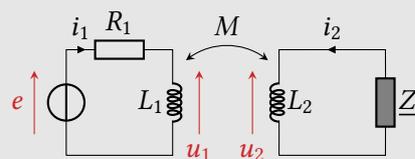
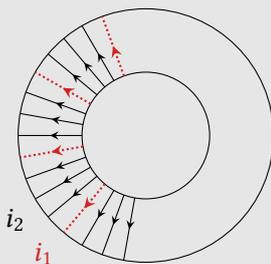
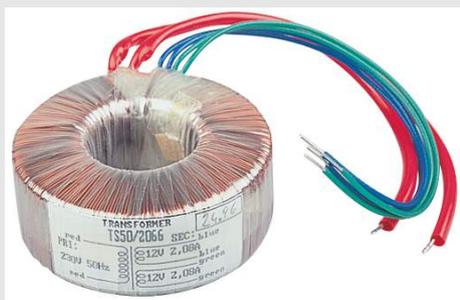
Un transformateur est constitué de deux bobinages indépendants électriquement, contenant respectivement  $N_1$  et  $N_2$  spires, enroulés de façon à se rapprocher le plus possible de la situation d'influence totale. Sur le schéma central, les spires du bobinage ①, appelé bobinage primaire, sont représentées en traits pointillés et les spires bobinage ②, dit bobinage secondaire, en traits pleins : avec ce schéma, on aurait  $N_2 = 3N_1$ .

Les inductances  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$ , et dépendent des nombres de spires par des résultats voisins de ceux établis pour les solénoïdes imbriqués :

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 \lambda \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 \lambda \quad M = \mu_0 N_1 N_2 \lambda$$

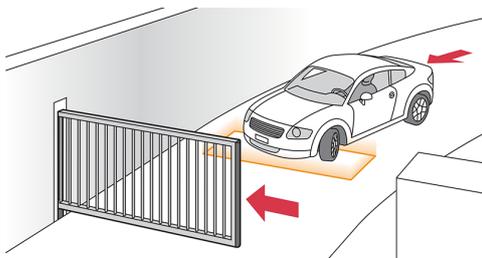
où  $\lambda$  est une constante homogène à une longueur dépendant de la géométrie du transformateur.

Une tension sinusoïdale  $e$  est imposée au primaire au travers d'une résistance  $R_1$  alors que le secondaire sert à alimenter une charge d'impédance  $Z$ .



- 1 - Exprimer en toute généralité les tensions complexes  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  en fonction de  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$ .
- 2 - Déterminer le rapport de transformation  $m$ , égal à  $\underline{U}_2/\underline{U}_1$  lorsque le secondaire est en sortie ouverte.
- 3 - Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur, c'est-à-dire l'impédance équivalente vue du primaire, lorsqu'il débite dans une charge  $\underline{Z}$  quelconque.

**Remarque culturelle :** Au delà du transformateur, de nombreuses autres applications reposent sur les mêmes principes. C'est le cas des détecteurs de métaux au sens large, par exemple pour la détection automatique de véhicules, à un feu rouge ou pour l'ouverture d'une barrière.

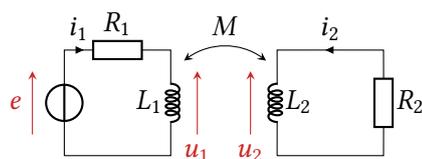


Source image : <https://www.accor-solutions.com>

Le bobinage primaire alimenté par une tension sinusoïdale se trouve dans le sol, et lorsqu'un véhicule se place au dessus des courants (appelés courants de Foucault) apparaissent dans la carcasse du véhicule. Ce dernier joue alors un rôle analogue au bobinage secondaire du transformateur, qui modifie en retour l'impédance apparente du bobinage primaire. Détecter cette variation d'impédance apparente permet de repérer la présence du véhicule.

### III.D - Énergie magnétique en présence de couplage inductif

Raisonnons pour l'établir sur un exemple simple, celui de deux circuits  $RL$  série couplés inductivement.



Équations électriques :

$$e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Espace 9

M

**Bilan de puissance :**

Multiplication par  $i$  des deux équations électriques et somme pour faire apparaître le bilan de puissance complet,

$$e i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

que l'on interprète en puissance dissipée par effet Joule et variation d'énergie magnétique.

Espace 10

→ bien que le circuit ② ne soit pas alimenté, de l'énergie  $y$  est dissipée par effet Joule : le couplage inductif permet de réaliser un **transfert d'énergie sans contact**.

L'énergie magnétique stockée dans deux bobines couplées est reliée à leurs inductances par

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Le couplage inductif modifie le courant dans les deux bobines, et donc le champ qu'elles créent. Il est donc logique que l'énergie magnétique ne s'écrive pas simplement comme la somme des énergies magnétiques de chaque bobine isolée.

► **Pour approfondir** : Raisonner sur l'énergie magnétique permet de démontrer la relation  $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$ , que nous n'avons justifié « que » physiquement. En posant  $x = i_2/i_1$ ,

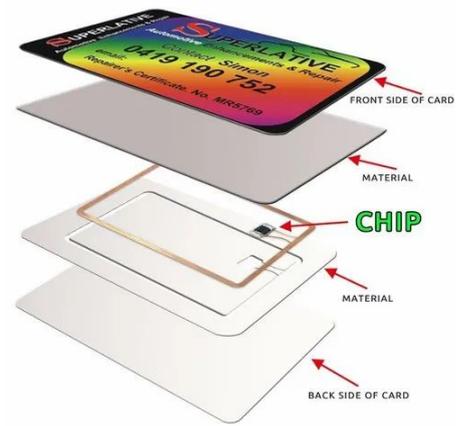
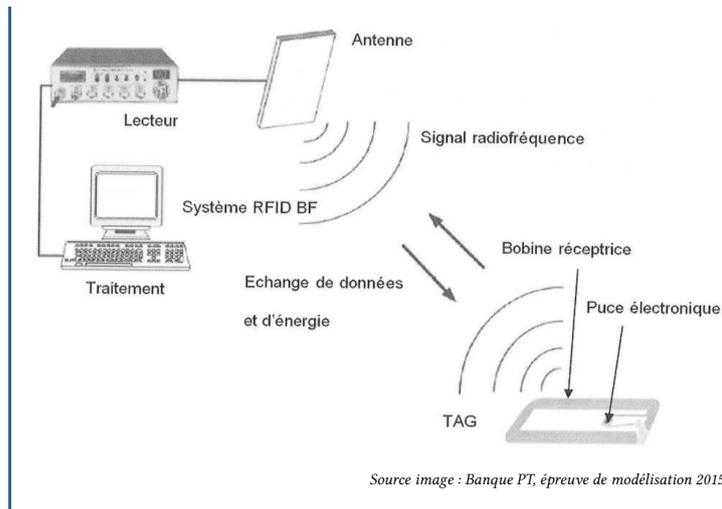
$$E_{\text{magn}} = i_1^2 \left( \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} x^2 + Mx \right) = i_1^2 f(x).$$

Or nous avons expliqué dans l'approfondissement p. 5 que l'énergie magnétique était toujours positive, ce qui implique que la fonction polynômiale du second degré  $f$  admet au plus une racine double. C'est le cas si son discriminant est négatif ou nul,

$$M^2 - 4 \frac{L_1}{2} \frac{L_2}{2} \leq 0 \quad \text{soit} \quad M^2 \leq L_1 L_2,$$

ce qui est bien le résultat annoncé. ■

**Remarque culturelle** : Ce principe est à la base du fonctionnement de tous les chargeurs sans fil, ou encore de toutes les cartes magnétiques, p.ex. pour les réseaux de transport en commun. Un bobinage se trouve dans l'appareil de lecture, et un second dans la carte. L'énergie reçue par le bobinage de la carte lui permet d'émettre un signal radio codant le numéro de l'utilisateur et celui de l'abonnement enregistré sur la carte, que reconnaît l'appareil de lecture. Ce processus est appelé RFID, pour Radio-Frequency Identification.



## Correction des applications de cours

### Application 2 : Loi de Lenz

#### • Avec la loi de Lenz

L'aimant est approché de la spire, ce qui augmente le champ magnétique vu par la spire et donc le flux magnétique au travers de la spire, comme schématisé figure 3. Ainsi, pour diminuer ces variations de flux<sup>1</sup>, le champ magnétique induit s'oppose au champ extérieur. Par la règle de la main droite, on en déduit que le sens du courant induit est opposé au sens conventionnel. On a donc  $i < 0$  au cours de l'expérience ... et bien sûr nul avant et après lorsque l'aimant est immobile.

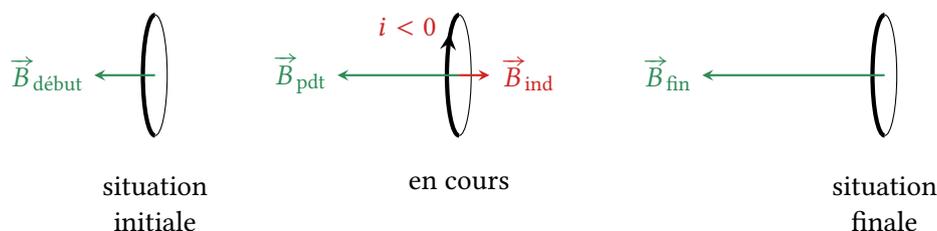


Figure 3 – Spire rapprochée d'un aimant.

#### • Avec la loi de Faraday

$\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont de même sens, donc on peut dire que le flux  $\Phi$  est positif et qu'il augmente au cours de l'expérience, même s'il est impossible de le calculer exactement. Ainsi,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$$

D'après la loi des mailles appliquée au circuit électrique équivalent,

$$e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{donc} \quad i < 0$$

### Application 3 : Inductance propre d'un solénoïde

**1** La modélisation par un solénoïde infini revient à négliger l'influence des bords de la bobine. À l'extérieur de la bobine le champ est nul, et à l'intérieur de la bobine et loin des bords, le champ vaut donc

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{e}_z.$$

**2** Compte tenu du sens (conventionnel) de  $i$  le vecteur normal à une spire est  $\vec{n} = +\vec{e}_z$ . Le flux au travers d'une spire vaut donc

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i S.$$

Le flux propre est la somme des flux au travers de toutes les spires. En négligeant les effets de bord,

$$\phi_p = N\varphi \quad \text{soit} \quad \phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i S$$

d'où par identification

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S.$$

La dépendance en  $N^2$  indique que les effets d'auto-induction sont d'autant plus marqués que le nombre de spires bobinées est élevé. La conclusion se généralise sans peine.

1. Ce qui n'est pas la même chose que de diminuer le flux!

3 D'après la loi de Faraday, la fém d'induction propre vaut

$$e_p = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Cependant, elle est orientée en convention générateur alors que la loi de comportement est donnée en convention récepteur,

$$u = -e_p = +L\frac{di}{dt}.$$

#### Application 4 : Solénoïdes imbriqués

##### • Premier point de vue

Champ créé par le solénoïde  $\mathcal{S}_2$  :

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \vec{e}_z & \text{pour } r < R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

Flux au travers d'une spire de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\varphi_{2 \rightarrow 1} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \pi R_1^2$$

Flux total :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \varphi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} i_2 \pi R_1^2$$

Conclusion :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R_1^2$$

##### • Second point de vue

Champ créé par le solénoïde  $\mathcal{S}_1$  :

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \vec{e}_z & \text{pour } r < R_1 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_1 \end{cases}$$

Flux au travers d'une spire de  $\mathcal{S}_2$  : attention car le champ est nul sur une partie de la spire, c'est donc bien le rayon  $R_1$  qui intervient

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \pi R_1^2$$

Flux total :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} i_1 \pi R_1^2$$

Conclusion :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R_1^2$$

On retrouve la même expression, comme prévu par le théorème de Neumann.

#### Application 5 : Solénoïdes en influence totale

1 Il faut que les solénoïdes soient de même rayon  $R = R_1 = R_2$ .

2 On a alors

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R^2 = \sqrt{\mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} \pi R^2} \times \sqrt{\mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi R^2} = \sqrt{L_1 L_2}$$

## Application 6 : Modèle de transformateur

1 Lois de comportement en complexe :

$$\underline{U}_1 = jL_1\omega \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = jL_2\omega \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1$$

2 En sortie ouverte  $\underline{I}_2 = 0$  donc on a directement

$$m = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Un transformateur peut amplifier ou atténuer une tension, selon le nombre de spires des enroulements.

3 Par définition,  $\underline{Z}_e = \underline{U}_1/\underline{I}_1$ . L'idée est donc d'exprimer  $\underline{I}_2$  en fonction de  $\underline{I}_1$  et/ou  $\underline{U}_1$  puis d'utiliser la loi de comportement de la bobine ①. Par la loi des mailles dans le circuit secondaire,

$$\underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2 = 0$$

et en reprenant la loi de comportement en complexe pour la bobine ②,

$$-\underline{Z}\underline{I}_2 = jL_2\omega \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 \quad \text{soit} \quad \underline{I}_2 = -\frac{jM\omega}{\underline{Z} + jL_2\omega}$$

d'où

$$\underline{U}_1 = \underbrace{\left[ jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{\underline{Z} + jL_2\omega} \right]}_{=\underline{Z}_e} \underline{I}_1.$$