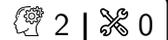


Circuit fixe dans un champ variable

Lois de Faraday et de Lenz

Exercice 1 : Signe du courant induit



 \triangleright Loi de Lenz.

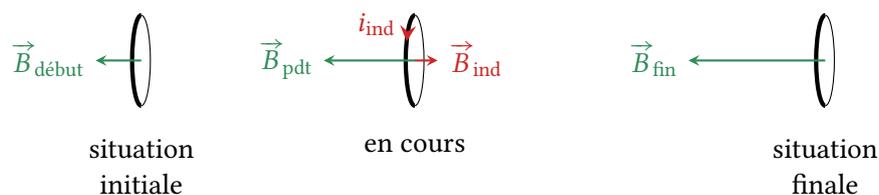
Rappelons que pour un aimant droit, le champ sort par le Nord : les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud.

La première étape consiste à déterminer le sens de variation du champ magnétique vu par la spire au cours du déplacement. On déduit alors de la loi de Lenz le sens du champ magnétique induit \vec{B}_{ind} , qui tend à atténuer les variations de \vec{B} . On détermine ensuite par la règle de la main droite le sens réel du courant dans la spire. Enfin, par comparaison entre le sens réel du courant et le sens $i > 0$ indiqué sur la figure on en déduit le signe de i .

*Attention à ne pas faire de confusion : ce sont les **variations** de champ **pendant le déplacement** qui comptent, pas le sens de ce champ. Le champ induit peut indifféremment renforcer ou atténuer le champ extérieur, tout dépend des variations.*

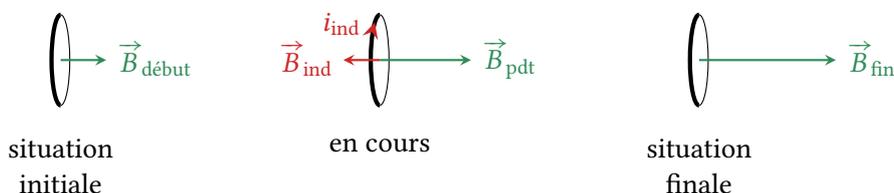
*Attention également, le champ et le courant induits n'existent dans la spire que **pendant** le déplacement relatif de l'aimant et de la spire.*

1 Le sens réel du courant indiqué sur le schéma central est celui de la flèche indiquant le sens positif, donc $i_{\text{ind}} > 0$.

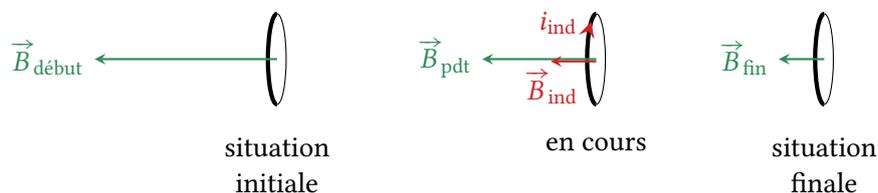


2 La physique est identique à la situation précédente, seule change la convention sur le sens positif du courant : on déduit immédiatement $i < 0$.

3 Le sens réel du courant est opposé au sens positif, donc $i_{\text{ind}} < 0$.



- 4 Les variations de champ vues par la spire sont les mêmes qu'à la question 1, le sens réel du courant induit est donc le même ... mais comme le sens choisi positif du courant est opposé, alors $i_{\text{ind}} < 0$.
- 5 Comme la spire et l'aimant se déplacent de la même façon, le flux magnétique au travers de la spire ne varie pas pendant l'expérience. Il n'y a donc aucun courant induit : $i_{\text{ind}} = 0$.
- 6 Le déplacement de la spire renforce l'effet du déplacement de l'aimant. Cette fois, le champ vu par la spire diminue au cours du mouvement, le champ induit a donc tendance à le renforcer. On a donc $i_{\text{ind}} < 0$.



Exercice 2 : Génératrice synchrone d'éolienne



► Loi de Faraday.

- 1 Compte tenu de l'orientation, la bobine est de normale $+\vec{e}_x$. Au travers d'une spire et puisque le champ est uniforme,

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot dS \vec{e}_x = B_0 \cos \omega t \iint dS = \pi a^2 B_0 \cos \omega t$$

et puisque le flux est le même au travers de toutes les spires

$$\Phi = \underbrace{N \pi a^2 B_0}_{=\Phi_0} \cos \omega t.$$

Dans une génératrice synchrone réelle, les expressions ne sont évidemment pas aussi simples, mais le calcul permet bien d'aboutir à une expression du flux de la forme $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$.

- 2 Négliger l'inductance propre de la bobine revient à négliger son flux propre devant le flux extérieur Φ . D'après la loi de Faraday,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} (\Phi + \Phi_p) = \omega \Phi_0 \sin \omega t.$$

Le circuit électrique équivalent n'est constitué que du générateur induit et de la résistance R , la loi des mailles donne immédiatement

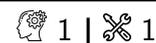
$$e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{donc} \quad i = \frac{\omega \Phi_0}{R} \sin \omega t.$$

- 3 La puissance moyenne dissipée vaut

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = R \langle i^2 \rangle = \frac{\omega^2 \Phi_0^2}{R} \langle \sin^2(\omega t) \rangle \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{\omega^2 \Phi_0^2}{2R}.$$

Couplage inductif

Exercice 3 : Mesure d'une inductance mutuelle



- Couplage inductif;
- Régime sinusoïdal forcé.

1 La bobine 2 n'est reliée qu'à un oscilloscope, donc $i_2 = 0$. En prenant en compte l'induction mutuelle, la loi de comportement devient

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt},$$

puis d'après la loi d'Ohm on a simplement

$$u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}.$$

2 On a

$$u_1(t) = U_1 \cos(2\pi ft) \quad \text{d'où} \quad u_2 = -2\pi f \frac{M}{R} \sin(\omega t) = 2\pi f \frac{M}{R} \cos\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où

$$M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH}.$$

On peut aussi travailler en représentation complexe,

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{R |\underline{U}_2|}{2\pi f |\underline{U}_1|}.$$

3 ▸ Lorsque la bobine 2 est tournée de 180° , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que **M change de signe mais $|M|$ est inchangée.**

▸ Lorsque la bobine est tournée de 90° , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est nettement diminué à courant i_1 fixé, ce qui veut dire que **M est plus faible.**

▸ Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est plus élevé à courant i_1 fixé, donc **M est plus grande.**

Exercice 4 : Réponse à un échelon de circuits couplés

oral banque PT | 1 | 2 |



- Couplage inductif;
- Transitoire du premier ordre.

1 En tenant compte du couplage inductif dans la loi de comportement de la bobine,

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1 \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 \end{cases}$$

2 Le schéma complet est représenté figure 1, en utilisant la représentation de Thévenin du générateur, dont la fém e passe alternativement de 0 à E , en restant constante par morceaux.

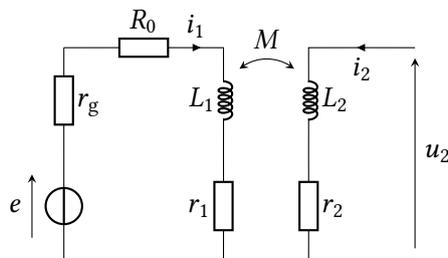


Figure 1 – Schéma du montage complet.

Le circuit secondaire est ouvert implique qu'il n'y a pas de courant : $i_2 = 0$. La loi des mailles appliquée au circuit primaire pour $t > 0$ donne alors

$$e = (r_g + R_0 + r_1)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r_g + R_0 + r_1}{L_1} i_1 = \frac{e}{L_1}.$$

On constate sur la figure donnée que la tension u_0 tend vers 0, qui est la solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus : on en déduit que la portion de créneau étudiée est ici descendante, donc $e = 0$. Pour la partie de courbe sur laquelle la tension varie, l'équation différentielle est donc

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r_g + R_0 + r_1}{L_1} i_1 = 0.$$

3 À un facteur R_0 près, la courbe donnée est l'image du courant i_1 dans le circuit primaire. L'équation différentielle fait apparaître un temps caractéristique $\tau = L_1 / (r_g + R_0 + r_1)$, et la tension u est donc de la forme

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Au bout d'une durée τ après l'échelon, 63 % de la variation de courant a déjà eu lieu, donc

$$u(t=\tau) = 0,37 U_0 \simeq 3,4 \text{ V}.$$

Tenant compte du fait que l'échelon n'est pas imposé à $t = 0$ mais au bout de 1,3 ms, on lit graphiquement

$$\tau \simeq 2,5 - 1,3 = 1,2 \text{ ms}$$

d'où on déduit

$$L_1 = (r_g + R_0 + r_1)\tau = 200 \text{ mH}.$$

4 Le circuit secondaire étant ouvert, l'équation la loi des mailles écrite à la première question se simplifie en

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt}.$$

Pour $t < 0$, i_1 est nul donc u_2 aussi, et pour $t > 0$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} = \frac{M}{R_0} \frac{du}{dt} = -\frac{M}{\tau R_0} U_0 e^{-t/\tau} = -\frac{M}{L_1} \frac{r_g + R_0 + r_1}{R_0} U_0 e^{-t/\tau}$$

Numériquement,

$$\frac{M}{L_1} = 0,5 \quad \text{et} \quad \frac{r_g + R_0 + r_1}{R_0} = 1,65.$$

Sachant que $U_0 = 9 \text{ V}$, on en déduit

$$u_2(t=0^+) = -7,4 \text{ V},$$

ce qui permet de construire le tracé.

Notons que la tension u_2 est discontinue à $t = 0$... ce qui n'est ni grave ni particulièrement surprenant. Seule les tensions aux bornes des condensateurs et les courants dans les bobines doivent être toujours continus.

Exercice 5 : Circuits LC couplés par mutuelle



- Couplage inductif;
- Oscillateur harmonique.

- 1 La tension aux bornes de L_1 orientée en convention récepteur s'écrit

$$u_{L1} = L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2}$$

La loi des mailles dans le circuit 1 s'écrit alors

$$u_{L1} + u_{C1} = 0 \quad \text{d'où} \quad LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + u_{C1} = 0.$$

La même démarche dans le circuit 2 en permutant les indices conduit à

$$LC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + u_{C2} = 0.$$

- 2 En sommant ces deux équations on obtient

$$(L + M)C \frac{d^2 \Sigma}{dt^2} + \Sigma = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 \Sigma}{dt^2} + \omega_1^2 \Sigma = 0.$$

En prenant la différence,

$$(L - M)C \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \Delta = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \omega_2^2 \Delta = 0.$$

- 3 Il faut bien sûr passer par la résolution des deux équations précédentes.

- **Forme des solutions** : ce sont des équations d'oscillateurs harmoniques dont les solutions s'écrivent

$$\Sigma(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad \Delta(t) = A' \cos(\omega_2 t) + B' \sin(\omega_2 t)$$

où les constantes A, A', B et B' dépendent des conditions initiales.

- **Conditions initiales** : continuité des tensions aux bornes des condensateurs et des courants dans les bobines, d'où

$$\begin{cases} u_{C1}(0^+) = U_0 \\ u_{C2}(0^+) = 0 \\ \frac{du_{C1}}{dt}(0^+) = \frac{i_1(0^+)}{C} = 0 \\ \frac{du_{C2}}{dt}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \Sigma(0^+) = U_0 \\ \Delta(0^+) = U_0 \\ \frac{d\Sigma}{dt}(0^+) = 0 \\ \frac{d\Delta}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$$

- **Détermination des constantes** : par identification,

$$A = A' = U_0 \quad \text{et} \quad B = B' = 0$$

- **Conclusion** : en réexprimant u_{C1} en fonction de Σ et Δ , on obtient

$$u_{C1}(t) = \frac{1}{2}(\Sigma + \Delta) = \frac{U_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

soit en factorisant les cosinus

$$u_{C1}(t) = U_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right).$$

4 Un développement limité des définitions de ω_1 et ω_2 donne directement

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{(1 \pm M/L)^{1/2}} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{M}{2L}\right) \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{M}{2L}.$$

5 On en déduit

$$u_{C1}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\beta \omega_0 t).$$

Comme $\beta \ll 1$, la période du second cosinus est largement supérieure à celle du premier. On peut donc interpréter u_{C1} comme un signal quasi-harmonique de pulsation ω_0 dont l'amplitude $U_0 \cos(\beta \omega_0 t)$ varie lentement à la pulsation $\beta \omega_0$. Cela conduit à l'allure de la figure 2.

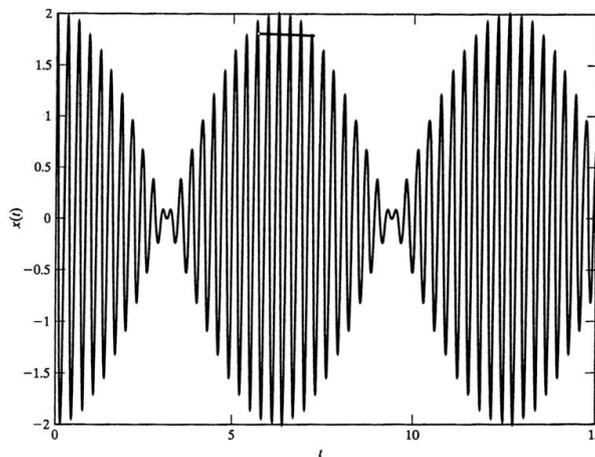


Figure 2 – Battements.

Exercice 6 : Dynamo



- Moment magnétique ;
- Calcul d'inductance mutuelle ;
- Régime sinusoïdal forcé.

Posons $\theta = \omega t$, ce qui revient à choisir l'origine des temps à l'instant où l'aimant est aligné avec l'axe de la bobine.

1 En supposant la spire équivalente de petite taille, on peut supposer le champ uniforme. En tenant compte de toutes les spires, il s'écrit

$$\vec{B}_{\text{bob}} = N \frac{\mu_0 i}{2a} \vec{e}_y$$

d'où

$$\Phi_{\text{bob} \rightarrow \text{sp}} = \iint \vec{B}_{\text{bob}} \cdot d\vec{S} \vec{n} \quad \text{soit} \quad \Phi_{\text{bob} \rightarrow \text{sp}} = N \frac{\mu_0 i}{2a} S \cos \theta.$$

On en déduit

$$M = N \frac{\mu_0}{2a} S \cos \theta.$$

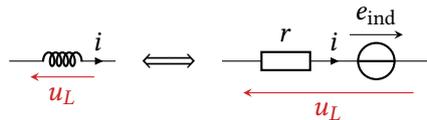
- 2 Le flux créé par l'aimant au travers de la bobine est décrit par le même coefficient M . En raisonnant sur la spire équivalente,

$$\Phi_{\text{aim} \rightarrow \text{bob}} = Mj = N \frac{\mu_0}{2a} jS \cos \theta.$$

En identifiant le moment magnétique $\mu = jS$,

$$\Phi_{\text{aim} \rightarrow \text{bob}} = N \frac{\mu_0}{2a} \mu \cos \theta.$$

- 3 La bobine est équivalente à la mise en série du générateur induit e_{ind} et de la résistance r .



Le flux total au travers de la bobine est la somme

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_{\text{aim} \rightarrow \text{bob}} = Li + N \frac{\mu_0}{2a} \mu \cos \theta.$$

La force électromotrice induite vaut donc

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} + N \frac{\mu_0}{2a} \mu \omega \sin \omega t.$$

Par additivité des tensions, en orientant la bobine en convention récepteur,

$$u_L = ri - e_{\text{ind}} = ri + L \frac{di}{dt} - N \frac{\mu_0}{2a} \mu \omega \sin \omega t.$$

- 4 Le circuit équivalent se compose uniquement de la bobine et de la résistance R . D'après la loi des mailles,

$$u_L + Ri = 0 \quad \text{donc} \quad ri + L \frac{di}{dt} - N \frac{\mu_0}{2a} \mu \omega \sin \omega t + Ri = 0$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{di}{dt} + \frac{r+R}{L} i = \frac{\mu_0 N \mu \omega}{2aL} \sin \omega t.$$

- 5 Pour passer l'équation en complexe, il est utile de revenir « un cran en arrière » et de la réécrire sous la forme

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{r+R}{L}}_{=1/\tau} i = - \underbrace{\frac{\mu_0 N \mu}{2aL}}_{=A} \frac{d}{dt} (\cos \omega t)$$

Ainsi,

$$j\omega \underline{I} e^{j\omega t} + \frac{1}{\tau} \underline{I} e^{j\omega t} = -j\omega A e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad (j\omega\tau + 1) \underline{I} = -j\omega\tau A$$

et il vient

$$\underline{I} = -\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau} A.$$

On en déduit

$$I_0 = |\underline{I}| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} A \quad \text{et} \quad \psi = \arg \underline{I} = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau).$$

Exercice 7 : Pince ampèremétrique



- ▷ Couplage inductif;
- ▷ Calcul d'inductance mutuelle.

1 D'après l'hypothèse de l'énoncé, en tout point de la spire,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta.$$

L'orientation du bobinage (2) n'est pas clairement précisée sur l'énoncé : choisissons-là telle que \vec{e}_θ soit le vecteur normal à une spire, ce qui d'une part est le plus astucieux et d'autre part en accord avec la figure 5. Ainsi, au travers d'une seule spire

$$\varphi_{12} = \iint \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_0} a^2$$

d'où au total

$$\Phi_{12} = \frac{N \mu_0 i_1 a^2}{2\pi r_0}.$$

Par définition, $\Phi_{12} = M i_1$ donc par identification

$$M = \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0}.$$

2 D'après la loi de Faraday, il apparaît aux bornes du bobinage (2) une f.é.m. induite

$$u_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{soit} \quad u_2 = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Le « signe global près » dont parle l'énoncé vient du fait que l'orientation de u_2 n'est pas clairement définie, si bien que mettre un signe \oplus serait défendable également.

En transposant dans le domaine complexe ($\cos \omega t \mapsto e^{j\omega t}$) la relation précédente, on obtient

$$\underline{U}_2 = -j\omega M \underline{I}_1 \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = -j\omega M$$

À basse fréquence, $\underline{H} \rightarrow 0$: il n'est donc pas possible de mesurer l'intensité d'un courant en basse fréquence avec une pince ampèremétrique, et encore moins d'un courant continu. De plus, on peut noter que l'étalonnage de la pince ampèremétrique doit prendre en compte la fréquence du courant.

3 Comme le champ \vec{B}_2 n'est non-nul qu'à l'intérieur de la bobine (2), c'est sa surface a^2 qu'il faut prendre en compte pour le calcul du flux car le circuit (1) entoure la bobine. Ainsi, le flux créé par le circuit (2) au travers du circuit (1) vaut

$$\Phi_{21} = N \iint B_2(r_0) \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r_0} a^2$$

et par identification avec la définition $\Phi_{21} = M i_2$ on trouve

$$M = \frac{\mu_0 N a^2}{2\pi r_0}$$

C'est donc exactement la même expression que celle trouvée à partir de Φ_{12} : ce n'est pas une coïncidence mais un résultat général, le théorème de Neumann.

4 D'après la question précédente, même si la forme du circuit (1) change, le flux Φ_{21} n'est pas modifié : le seul point important est que le circuit (1) entoure la bobine (2). En corollaire, l'expression de M est inchangée elle aussi et ne dépend pas du positionnement précis des deux circuits. Par conséquent, la relation entre $\Phi_{12} = M i_1$ n'est pas

modifiée, et donc le calcul de la partie précédente reste valable. En résumé, la pince donne une mesure indépendante de la position du fil à l'intérieur (puisque M reste le même, \underline{H} ne varie pas non plus), ce qui est très avantageux pour une utilisation pratique.

5 Une pince ampèremétrique permet de mesurer un courant dans un fil sans avoir à couper ce courant pour ouvrir le circuit et y placer un ampèremètre. On peut donc contrôler les courants électriques dans une installation en fonctionnement. En contre-partie, mesurer le courant dans un câble contenant plusieurs fils n'est pas possible car les contributions de chaque fil s'ajoutent, ce qui engendre en général des compensations non souhaitables qui rendent la mesure inexploitable.

Exercice 8 : Plaque de cuisson à induction



- Couplage inductif;
- Bilan de puissance;
- Approche temporelle et fréquentielle.

1 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 3. Par application de la loi des mailles, et en tenant compte de l'induction mutuelle, on obtient

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

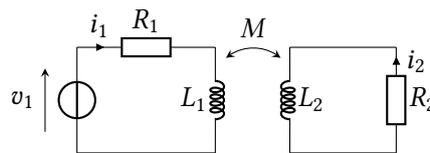


Figure 3 – Schéma équivalents à une plaque à induction.

L'équation de fonctionnement de l'induit (circuit 2) s'écrit en complexes

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1, \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = -\frac{jM\omega}{R_2 + j\omega L_2}$$

D'après l'équation de fonctionnement de l'inducteur,

$$\underline{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + jM\omega \underline{H} \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + j\omega L_2}.$$

En multipliant par la quantité conjuguée,

$$\underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2 (R_2 - j\omega L_2)}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}$$

d'où

$$\underline{Z}_e = \underbrace{R_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} R_2}_{=R_e} + j\omega \underbrace{\left(L_1 - \frac{(M\omega)^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} L_2 \right)}_{=X_e}$$

2 En multipliant les équations électriques par les courants i_1 et i_2 dans les circuits,

$$\begin{cases} v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

et en sommant

$$\underbrace{v_1 i_1}_{=\mathcal{P}_g} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{=E_m}$$

E_m est l'énergie magnétique stockée par les deux bobinages couplés.

3 Par définition,

$$\underline{V}_1 = R_e \underline{I}_1 + j X_e \underline{I}_1 = R_e \underline{I}_1 + j \omega \frac{X_e}{\omega} \underline{I}_1$$

Une multiplication par $j\omega$ équivaut à une dérivation temporelle, d'où

$$v_1 = R_e i_1 + \frac{X_e}{\omega} \frac{di_1}{dt} = R_e I_1 \cos(\omega t) - \frac{X_e}{\omega} \omega I_1 \sin(\omega t)$$

et ainsi

$$\boxed{v_1(t) = R_e I_1 \cos(\omega t) - X_e I_1 \sin(\omega t) .}$$

4 Par définition,

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^T \quad \text{d'où} \quad \boxed{\langle \cos(\omega t) \rangle = 0}$$

car $\sin(\omega T) = \sin(2\pi) = 0 = \sin(0)$. On montre de même que

$$\boxed{\langle \sin(\omega t) \rangle = 0 .}$$

De plus,

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \quad \text{d'où} \quad \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle \cos(2\omega t) \rangle) = \frac{1}{2} .$$

Enfin,

$$\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0 .}$$

5 On a alors de manière immédiate

$$\boxed{\langle R_1 i_1^2 \rangle = \frac{1}{2} R_1 I_1^2 \quad \text{et} \quad \langle R_2 i_2^2 \rangle = \frac{1}{2} R_2 I_2^2}$$

et par ailleurs

$$\langle \mathcal{P}_g \rangle = R_e I_1^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle - X_e I_1^2 \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle \quad \text{d'où} \quad \boxed{\langle \mathcal{P}_g \rangle = \frac{1}{2} R_e I_1^2}$$

L'énergie magnétique ne fait intervenir que des termes quadratiques en i_1 et i_2 , qui sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω , dont le produit peut s'écrire comme la somme d'un terme de pulsation $\omega - \omega = 0$ et d'un autre de pulsation 2ω . Ainsi, il existe deux constantes A et A' telles que

$$E_m = A + A' \cos(2\omega t + \varphi) \quad \text{d'où} \quad \frac{dE_m}{dt} = -2\omega A' \sin(2\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \boxed{\left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = 0 .}$$

6 L'énergie intéressante est celle dissipée dans la résistance R_2 , on pose donc

$$\eta = \frac{\langle R_2 i_2^2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_g \rangle}$$

Or le bilan de puissance se réécrit

$$\frac{1}{2}R_e I_1^2 = \frac{1}{2}R_1 I_1^2 + \langle R_2 i_2^2 \rangle + 0 \quad \text{soit} \quad 1 = \frac{R_1}{R_e} + \eta$$

et ainsi

$$\eta = 1 - \frac{R_1}{R_e}.$$

L'expression de R_e montre qu'il s'agit d'une fonction croissante de la fréquence : choisir une haute fréquence de travail permet d'augmenter le rendement de la plaque.

7 Posons $\omega_1 = R_1/L_1$ et $\omega_2 = R_2/L_2$. On peut alors réécrire

$$\underline{H} = -\frac{jM\omega}{R_2 \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_e = R_1 \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) + \frac{(M\omega)^2}{R_2 \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}.$$

Numériquement,

$$\omega = 2\pi f = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \omega_1 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \omega_2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On peut donc considérer une limite très haute fréquence, et simplifier

$$\underline{H} = -\frac{M}{L_2} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_e = jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)$$

Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue) et donc **l'impédance d'entrée augmente**.

Physiquement, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue combien même le courant dans l'inducteur serait imposé, ce qui indique que M diminue.

Si l'impédance d'entrée augmente alors que la tension d'alimentation v_1 ne change pas, alors la définition de \underline{Z}_e montre que l'amplitude I_1 du courant dans l'inducteur diminue. De plus, $|\underline{H}|$ diminue également, donc le rapport I_2/I_1 diminue aussi, si bien que I_2 diminue encore plus que I_1 .