Circuit fixe dans un champ variable

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

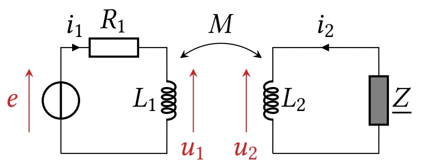
Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Se préparer

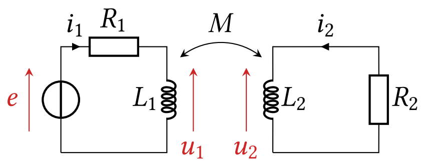
Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

I2.1 - Calculer l'inductance propre d'un solénoïde de grande longueur (rayon R, N spires sur une longueur ℓ), puis l'inductance mutuelle de deux solénoïdes de même longueur imbriqués l'un dans l'autre (rayons R_1 et R_2, N_1 et N_2 spires).



I2.2 - Un transformateur alimenté par une source de tension sinusoïdale e débite dans une charge d'impédance complexe $\underline{Z}$. Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur, c'est-à-dire son impédance équivalente vue du primaire.



I2.3 - Procéder au bilan de puissance du montage ci-contre. L'interpréter : montrer qu'il permet un transfert d'énergie sans contact, et identifier l'énergie magnétique.

Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

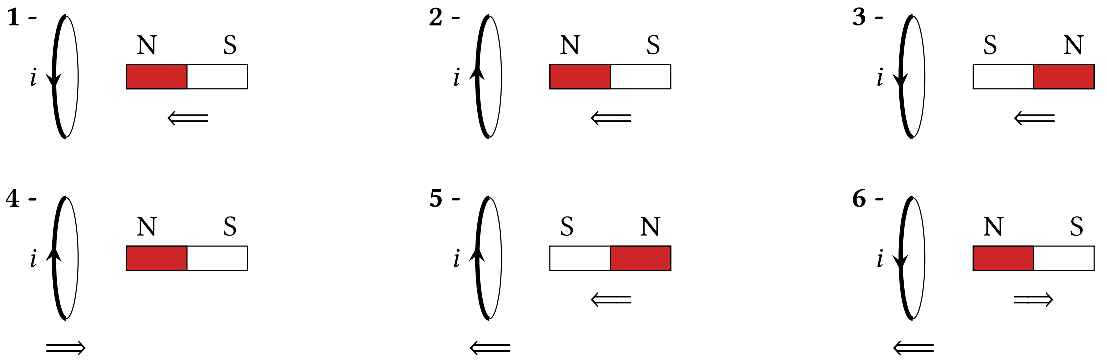
⇝ pour ce chapitre : 17.1, 17.6 et 17.7.

Lois de Faraday et de Lenz

Exercice 1 : Signe du courant induit 2 | 0

▹ *Loi de Lenz.*

Dans chacun des circuits ci-dessous, la spire circulaire et/ou l'aimant droit sont déplacés dans le sens indiqué par la double flèche. Indiquer le signe du courant i apparaissant dans la spire pendant le déplacement.



Exercice 2 : Génératrice synchrone d'éolienne 1 | 1 |

▹ *Loi de Faraday.*

Dans une éolienne, la génératrice électrique est une machine synchrone, constituée de bobinages fixes soumis à un champ magnétique tournant. On adopte un modèle très simplifié, en considérant que le bobinage équivaut à N spires jointives de rayon a, plongées dans un champ magnétique créé par un aimant permanent en rotation à la vitesse ω, voir figure 1, de la forme

$$\vec{B}(t) = B_0(\cos\omega t\ \vec{e}_x + \sin\omega t\ \vec{e}_y)\,.$$

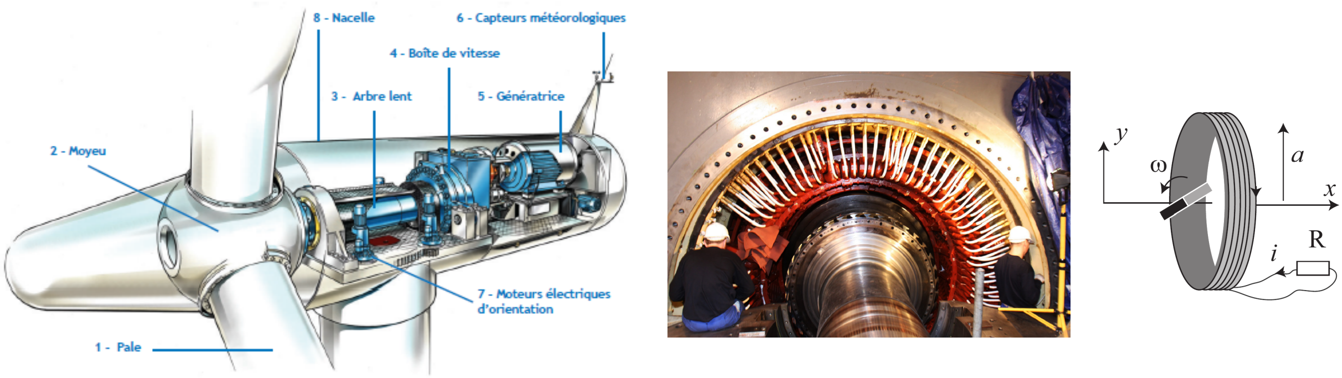


Figure 1 – **Éolienne.** La rotation des pales de l'éolienne permet de mettre en rotation le rotor (partie tournante) d'une génératrice située à l'intérieure de la nacelle. Des aimants permanents fixés sur le rotor créent alors un champ tournant, et par induction une tension dans les bobinages du stator (partie fixe) de la génératrice. La transmission par une boîte de vitesse permet d'augmenter la vitesse de rotation du rotorpar rapport à celle des pales.

1 - Montrer que le flux magnétique au travers de la bobine s'écrit $\Phi = \Phi_0 \cos\omega t$, avec Φ_0 une constante à exprimer.

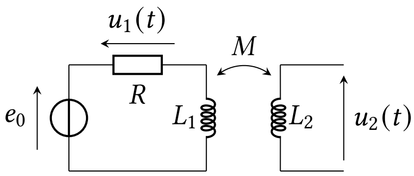
2 - On modélise le réseau électrique alimenté par l'éolienne par une simple résistance R, et on néglige l'inductance propre de la bobine. Exprimer le courant $i(t)$.

3 - Calculer la puissance moyenne dissipée dans la résistance. On rappelle $\left\langle \sin^2(\omega t)\right\rangle = 1/2$.

Couplage inductif

Exercice 3 : Mesure d'une inductance mutuelle — 1 | 1

- *Couplage inductif ;*
- *Régime sinusoïdal forcé.*



Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100\,\Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

1 - Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1.

2 - Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3{,}00\,\mathrm{V}$ et $U_2 = 0{,}50\,\mathrm{V}$.

3 - On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

Exercice 4 : Réponse à un échelon de circuits couplés — oral banque PT | 1 | 2 |

- *Couplage inductif ;*
- *Transitoire du premier ordre.*

Considérons le montage de la figure 2 dans lequel les deux bobines L_1 et L_2 sont couplées par induction mutuelle. Les deux bobines ont même résistance interne $r_1 = r_2 = 15\,\Omega$.

1 - Donner les relations entre les tensions u_1 et u_2 et les courants i_1 et i_2.

Le circuit secondaire est en circuit ouvert. On ajoute en série au circuit primaire un générateur de tension de résistance interne $r_g = 50\,\Omega$, qui impose une tension créneau de valeur minimale nulle, et une résistance additionnelle $R_0 = 100\,\Omega$. La figure 3 représente la tension u aux bornes de R_0 mesurée à l'oscilloscope.

2 - Interpréter le terme « en circuit ouvert » et en déduire l'équation différentielle sur i_1.

3 - En expliquant la méthode, déterminer L_1.

4 - On donne $M = 0{,}1\,\mathrm{H}$. Représenter $u_2(t)$.

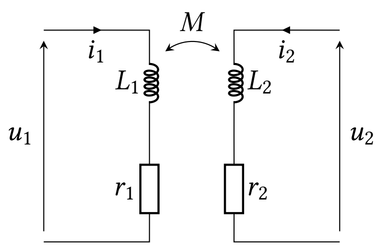


Figure 2 – Bobines couplées.

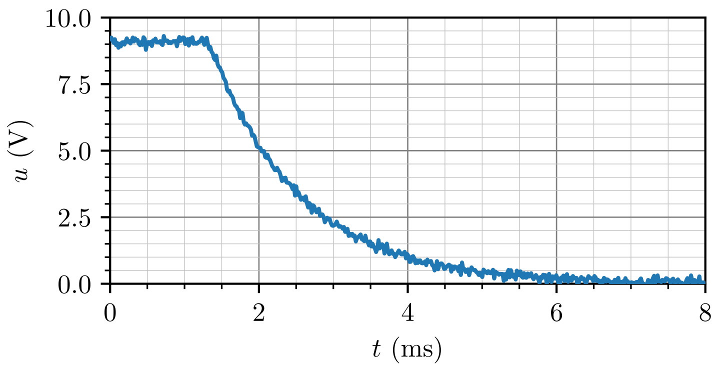
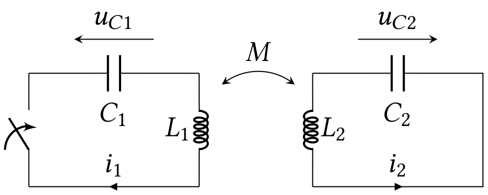


Figure 3 – Tensions aux bornes de la résistance R_0.

Exercice 5 : Circuits LC couplés par mutuelle 2 | 2

- *Couplage inductif ;*
- *Oscillateur harmonique.*



Dans le circuit ci-contre, seul le condensateur C_1 est chargé sous la tension U_0 à la date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur. On suppose $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$, et on pose

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

1 - Établir deux équations différentielles couplées sur les tensions u_{C1} et u_{C2} aux bornes des condensateurs.

2 - En déduire deux équations sur les fonctions somme $\Sigma(t) = u_{C1} + u_{C2}$ et différence $\Delta(t) = u_{C1} - u_{C2}$.

3 - Exprimer la tension u_{C1} sous forme d'un produit de cosinus.

4 - On suppose le couplage inductif faible ($M \ll L$). Déterminer le coefficient $\beta \ll 1$ tel que $\omega_{1,2} \simeq \omega_0(1 \pm \beta)$.

5 - Réécrire l'expression de u_{C1} en fonction de β et ω_0, et tracer son allure.

Exercice 6 : Dynamo 2 | 2 |

- *Moment magnétique ;*
- *Calcul d'inductance mutuelle ;*
- *Régime sinusoïdal forcé.*

Cet exercice s'intéresse au fonctionnement d'une dynamo, comme on en retrouve pour l'éclairage des vélos ou certaines lampes de poche.

On modélise ce système de la façon suivante, schématisée figure 4 :

- une bobine plate de N spires de rayon a, d'inductance totale L et résistance r, est fixe dans le plan (xOz) ;
- un aimant permanent de moment magnétique $\vec{\mu}$ tourne dans le plan (xOy) à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega =$ cte, entraîné dans son mouvement par la roue de vélo ou la manivelle de la lampe ;
- la bobine est branchée en série avec une ampoule assimilée à une résistance R.

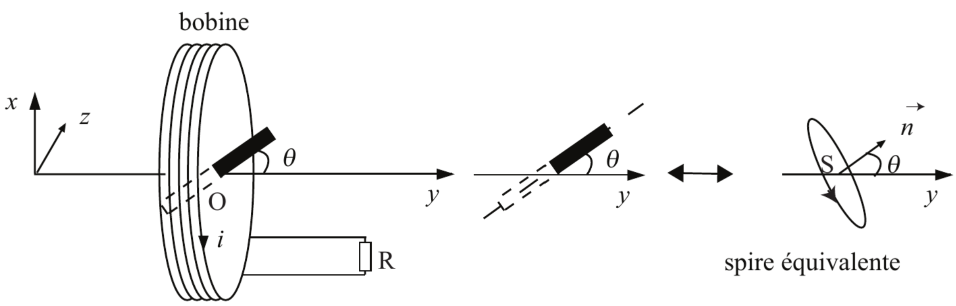


Figure 4 – Modélisation d'une dynamo.

On rappelle qu'un aimant de moment magnétique $\vec{\mu}$ est équivalent à une spire de surface S parcourue par un courant j tel que $\vec{\mu} = jS\vec{n}$, avec $\vec{n}$ le vecteur normal à la spire. Dans ce qui suit, on considérera la spire équivalente de petite taille par rapport à la bobine. On donne également l'expression du champ magnétique créé au centre O d'une spire circulaire de rayon a, de normale $\vec{e}_y$, parcourue par un courant i,

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2a} \vec{e}_y \, .$$

1 - Exprimer le flux du champ créé par la bobine au travers de la spire équivalente à l'aimant, puis le coefficient d'inductance mutuelle entre la bobine et l'aimant.

2 - Déduire de ce qui précède le flux magnétique créé par l'aimant au travers de la bobine, en fonction de μ notamment.

3 - Déterminer la tension aux bornes de la bobine.

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

5 - On s'intéresse au régime établi, et on cherche le courant sous la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$. Déterminer I_0 et ψ.

Exercice 7 : Pince ampèremétrique

2 | 2 |

- *Couplage inductif ;*
- *Calcul d'inductance mutuelle.*

La mesure de l'intensité d'un courant électrique peut nécessiter des méthodes très éloignées de celle utilisée dans un multimètre d'usage courant. Cet exercice étudie une mesure par une **pince ampèremétrique**, particulièrement adaptée à la mesure de courants d'intensité élevée : les courants d'intérêt ont des intensités de l'ordre du kA. L'ouverture de la pince ampèremétrique permet d'insérer dans sa boucle le fil parcouru par le courant dont l'intensité est à mesurer. Lorsque la pince est fermée, ses deux mâchoires constituent une bobine torique, voir figure 2 ci-dessous. Le phénomène d'induction magnétique permet d'obtenir aux bornes de cette bobine une tension directement liée à l'intensité à mesurer.

Le courant dont l'intensité variable i_1 est à mesurer parcourt un fil rectiligne (1), confondu avec l'axe Oz, dont les bornes A_1 et A_2 sont supposées infiniment éloignées l'une de l'autre. On peut montrer que le champ créé en un point M à distance r du fil, voir figure 1, vaut

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0\, i_1}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$

On modélise la pince ampèremétrique par un tore d'axe Oz, de rayon moyen r_0, de section carrée de côté $a \ll r_0$ et sur lequel sont bobinées régulièrement $N \gg 1$ spires régulièrement réparties, voir figures 2 et 3. Les deux extrémités du bobinage sont reliées à un oscilloscope.

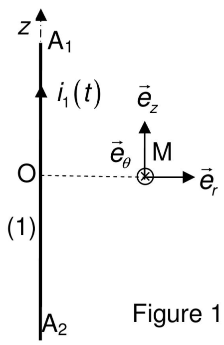


Figure 1

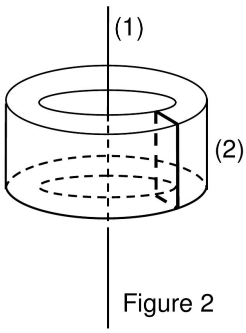


Figure 2

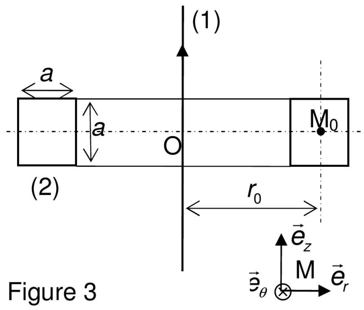


Figure 3

1 - On fait l'approximation que le champ magnétique est uniforme sur la surface d'une spire du tore et égal à sa valeur en M_0. Calculer le flux Φ_{12} de $\vec{B}_1$ au travers du bobinage (2). En déduire l'expression du coefficient d'induction mutuelle M entre les circuits (1) et (2).

2 - Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_\mathrm{m} \cos \omega t$. Déterminer (à un signe global près) l'expression de la fonction de transfert complexe de la pince définie par $\underline{H} = \underline{U}_2/\underline{I}_1$. Une pince ampèremétrique permet-elle de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ?

On suppose maintenant les bornes A_1 et A_2 du fil (1) reliées entre elles pour former un circuit fermé. Ce circuit est supposé plan, contenu dans le plan méridien du tore. En outre, la bobine (2) est également supposée fermée sur elle-même et parcourue par un courant d'intensité $i_2(t)$ dont l'orientation est précisée figure 5. Le champ créé par la bobine (2) en tout point de l'espace M repéré par ses coordonnées cartésiennes d'axe Oz, voir figure 1, vaut

$$\vec{B}_2(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\, N\, i_2}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta & \text{si } M \text{ est à l'intérieur de la bobine} \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la suite, on suppose comme en 1 que le champ $\vec{B}_2$ est uniforme sur la surface d'une spire du bobinage (2) et égal à sa valeur en M_0.

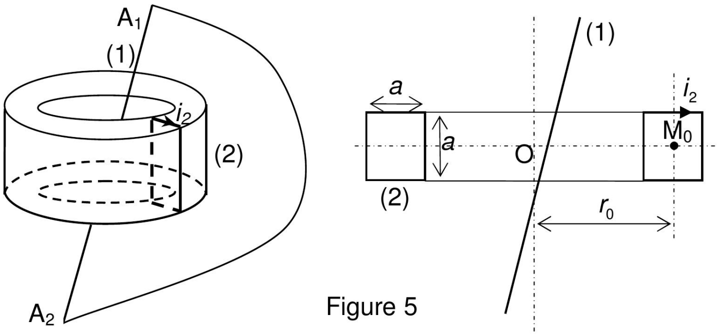


Figure 5

3 - Calculer le flux Φ_{21} du champ $\vec{B}_2$ créé par la bobine (2) à travers le circuit (1) ainsi réalisé. En déduire l'expression du coefficient d'induction mutuelle M défini à partir de Φ_{21} et commenter.

4 - La figure 5 suggère une situation où la pince n'est pas centrée sur le fil (1), lui-même n'étant pas confondu avec l'axe de la pince. Déduire de la question précédente que le résultat de la mesure n'est pas modifié. Commenter en termes d'utilisation pratique de la pince.

5 - Dans un contexte industriel, citer un avantage de la mesure de courant au moyen de cette pince par rapport à l'utilisation d'un ampèremètre.

Exercice 8 : Plaque de cuisson à induction — 3 | 2

- *Couplage inductif ;*
- *Bilan de puissance ;*
- *Approche temporelle et fréquentielle.*

Le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson peut être réalisé par effet Joule via des courants induits directement dans le fond de la casserole par un champ magnétique variable. De tels courants existant dans le volume d'un métal sont appelés **courants de Foucault**.

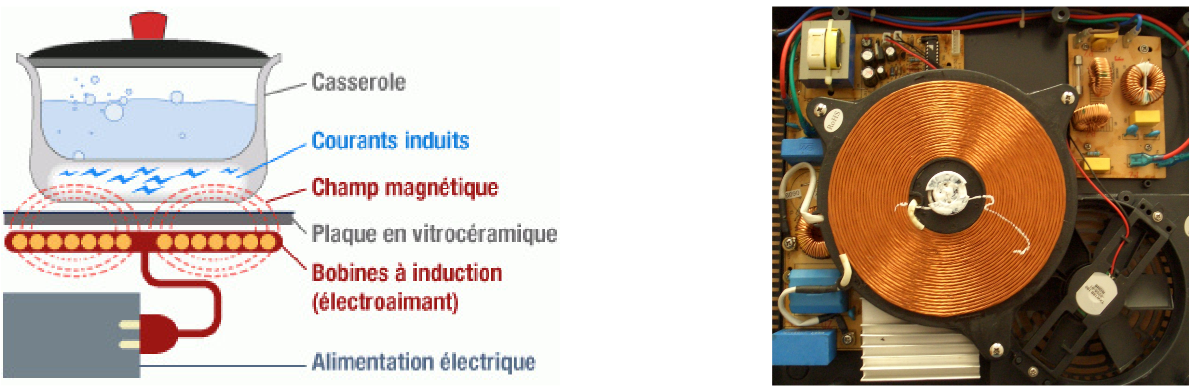


Figure 6 – Plaque de cuisson à induction.

Logé dans une table support en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal, appelé inducteur, génère un champ magnétique, voir figure 6. L'inducteur a un rayon de 5 cm et compte vingt spires de cuivre de résistance électrique totale $R_1 = 18\,\mathrm{m\Omega}$ et d'auto-inductance $L_1 = 30\,\mathrm{\mu H}$. Il est alimenté par une tension harmonique v_1 de fréquence $f = 25\,\mathrm{kHz}$. Le fond de la casserole est modélisé par une spire circulaire unique, fermée sur elle-même, appelée induit. L'induit a une résistance $R_2 = 8{,}3\,\mathrm{m\Omega}$ et une auto-inductance $L_2 = 0{,}24\,\mathrm{\mu H}$. Le transfert d'énergie s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit, d'inductance mutuelle $M = 2\,\mathrm{\mu H}$.

1 - Établir les équations électriques relatives aux deux circuits. En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{I}_2/\underline{I}_1$ et l'impédance d'entrée $\underline{Z}_\mathrm{e} = \underline{V}_1/\underline{I}_1$ du système. Écrire l'impédance d'entrée sous la forme $\underline{Z}_\mathrm{e} = R_\mathrm{e} + \mathrm{j}X_\mathrm{e}$.

On souhaite vérifier que ce modèle permet bien d'expliquer le *chauffage* par induction, c'est-à-dire montrer qu'il y a dissipation d'énergie par effet Joule dans le fond de la casserole.

2 - Montrer que la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{g}$ fournie par le générateur se décompose sous la forme

$$\mathcal{P}_\mathrm{g} = R_1 {i_1}^2 + R_2 {i_2}^2 + \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Exprimer E_m et l'interpréter physiquement.

3 - Écrivons le courant d'alimentation sous la forme $i_1(t) = I_1\cos(\omega t)$. Exprimer $v_1(t)$ comme une somme de deux fonctions trigonométriques.

4 - Compte tenu des fréquences et des temps de chauffe mis en jeu, on s'intéresse aux valeurs moyennes. Montrer que

$$\langle\cos(\omega t)\rangle = \langle\sin(\omega t)\rangle = 0 \qquad \left\langle\cos^2(\omega t)\right\rangle = \left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle = 0 \qquad \langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle = 0$$

5 - En déduire les valeurs moyennes des quatre termes intervenant dans le bilan de puissance. On montrera en particulier *sans long calcul* que

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}\right\rangle = 0$$

6 - Définir le rendement η de la plaque et l'exprimer en fonction de R_1 et R_e. Pourquoi la tension du secteur est-elle transformée en une tension de fréquence plus élevée ?

7 - Identifier deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2. Compte tenu des ordres de grandeur mis en jeu, simplifier les expressions de $\underline{H}$ et $\underline{Z}_\mathrm{e}$. En déduire comment varient les amplitudes des courants dans l'inducteur et dans l'induit lorsque l'on soulève la casserole.