

Conversion électromécanique

Plan du cours

I	Induction dans les circuits en mouvement	1
I.A	Loi de Faraday et exceptions	1
I.B	Loi de Lenz.	2
I.C	Méthode d'étude d'un système avec couplage électromécanique	4
II	Exemples de systèmes en translation	4
II.A	Conversion électrique → mécanique : rails de Laplace moteurs	4
II.B	Conversion mécanique → électrique : rails de Laplace générateurs	9
III	Exemples de systèmes en rotation	9
III.A	Conversion mécanique → électrique : modèle simplifié d'alternateur.	9
III.B	Conversion électrique → mécanique : moteur à courant continu à entrefer plan.	10

(R) Résultat à connaître par cœur.

(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.

(D) Démonstration à savoir refaire.

(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Mettre en mouvement un circuit électrique dans un champ magnétique suffit pour y voir apparaître un courant électrique, et réciproquement imposer un courant dans un circuit soumis à un champ permet de mettre en mouvement les parties mobiles du circuit. On observe ainsi de nouvelles manifestations du phénomène d'induction, qui permettent de transformer une puissance électrique en une puissance mécanique, et réciproquement. On dit qu'il y a **couplage** ou **conversion électromécaniques**. Les applications sont multiples : tous les moteurs électriques (de la brosse à dents au TGV !) reposent sur ces principes, de même que la production d'électricité dans toutes les centrales thermodynamiques.

Dans tout ce cours, on se limite conformément au programme au cas d'un champ magnétique stationnaire et uniforme à l'échelle du circuit. Il sera possible de s'en écarter un peu dans des exercices ... ou en deuxième année.

I - Induction dans les circuits en mouvement

I.A - Loi de Faraday et exceptions

• Cas classique : la loi de Faraday s'applique

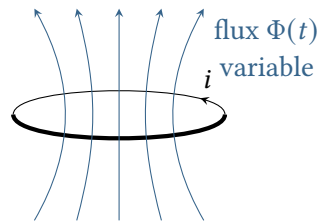
Dans de nombreuses situations pratiques, le mouvement du circuit (ou d'une partie du circuit) fait varier le flux magnétique au travers de celui-ci : la loi de Faraday reste alors valable.

R

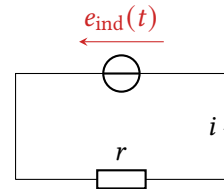
Les variations de flux magnétique au travers d'un circuit fermé se modélisent électriquement par l'ajout d'un générateur induit dans le circuit, dont la **force électromotrice (fém) induite** e_{ind} est reliée au flux magnétique Φ au travers du circuit par

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite par rapport au sens conventionnel du courant, et la fém induite e_{ind} est orientée en convention générateur par rapport à i .



vision magnétique



vision électrique

Q

Le générateur induit est un modèle équivalent (« tout se passe comme si »), dont on peut voir et mesurer les conséquences (mise en mouvement d'une partie mobile, courant induit, etc.) mais dont la fém n'est pas toujours directement mesurable.

Q

⚡⚡⚡ **Attention !** Le respect des conventions d'orientation est crucial pour la bonne mise en équation d'un problème d'induction. Ainsi, la première étape dans tout exercice consiste à flécher le sens conventionnel du courant ... tout en se rappelant qu'il ne s'agit que d'un sens conventionnel, l'intensité pouvant être algébrique.

• Mais il y a des exceptions !

Dans certaines géométries, le mouvement du circuit ne fait pas varier le flux au travers de celui-ci. Pourtant, il y apparaît bien une fém induite, mais celle-ci n'est pas donnée par la loi de Faraday. Pour la déterminer, on utilise alors la conservation de la puissance,

R

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_{\text{ind}}i = 0,$$

que nous évoquerons par la suite. Au niveau MPSI, ces exceptions vous seront toujours signalées.

► **Pour approfondir :** Ces exceptions s'expliquent par le fait que la loi de Faraday n'est pas la « vraie » équation fondamentale. Il s'agit en l'occurrence de l'équation de Maxwell-Faraday, l'une des quatre équations de Maxwell, qui sont à l'électromagnétisme ce que le principe fondamental de la dynamique est à la mécanique. La loi de Faraday se démontre à partir de l'équation de Maxwell-Faraday (vous le ferez l'an prochain), mais la démonstration nécessite une hypothèse de circuit fixe dans le référentiel d'étude, d'où l'existence d'exceptions pour les circuits en mouvement. ■

I.B - Loi de Lenz

Dans ce chapitre, la cause est toujours le mouvement du circuit : les phénomènes d'induction tendent à ralentir ce mouvement.

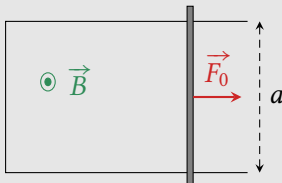
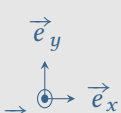
Q



Par leurs conséquences, les phénomènes d'induction tendent à atténuer leurs causes. Les actions de Laplace dues aux courants induits sont donc toujours des actions de freinage.

M

Application 1 : Rails de Laplace tracté



Les rails de Laplace sont un dispositif de démonstration dans lequel une tige mobile peut glisser sur deux rails parallèles. On impose un champ magnétique stationnaire orthogonal au plan des rails.

Les rails sont en court-circuit, et on tire sur la tige mobile avec une force $\vec{F}_0$ comme schématisé ci-contre. Identifier le sens du courant dans le système.

- ① Cause des phénomènes d'induction : mouvement de la tige mobile selon $+\vec{e}_x$, qui agrandit le circuit et modifie le flux au travers de celui-ci.
- ② Apparition d'un courant induit dans le système, qui forme un circuit fermé.
- ③ La tige mobile subit donc une force de Laplace à cause de ce courant induit, et d'après la loi de Lenz, elle est forcément dirigée selon $-\vec{e}_x$.
- En raisonnant sur la direction du produit vectoriel, on en déduit que $i\vec{d}\vec{\ell}$ est orienté selon $-\vec{e}_y$ dans la tige, donc le sens réel du courant est le sens horaire du schéma.

Espace 1

Application 2 : Chute d'un aimant dans un tube de cuivre



Lorsque l'on fait chuter un aimant dans un tube de cuivre, sa chute est considérablement ralentie par rapport à une chute libre, ou dans un tube en PVC. Pourtant le cuivre n'est pas magnétique (l'aimant n'est donc pas attiré par le tube), et le tube suffisamment large pour qu'il n'y ait pas de frottement. Vu du dessus, l'aimant semble « flotter » à l'intérieur du tube.

Proposer une interprétation du phénomène.

Faire un schéma. Raisonnons sur une petite tranche de tube, assimilable à une spire.

- ① La chute de l'aimant modifie le flux magnétique au travers de la spire, il y a donc apparition d'un phénomène d'induction.
- ② Apparition d'un courant induit dans la spire.
- ③ Ce courant génère un champ magnétique induit, qui va être ressenti par l'aimant, et faire subir à celui-ci une force analogue à la force de Laplace (cf. modèle de spire équivalente à un moment magnétique : $\vec{\mu} = iS\vec{n}$). D'après la loi de Lenz, cette force ressentie par l'aimant ne peut être qu'une force de freinage.

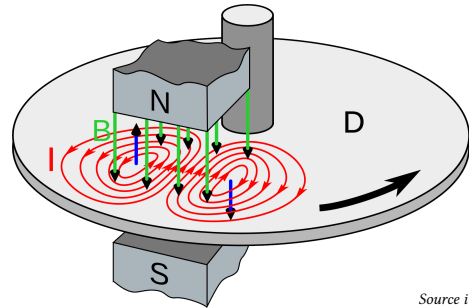
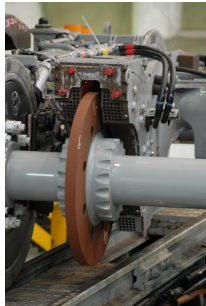
Espace 2

Généralisation : les courants électriques qui apparaissent par induction au sein d'un conducteur massif sont appelés **courants de Foucault**. Les forces de Laplace dues aux courants de Foucault sont toujours des forces de freinage.



Remarque culturelle : Des systèmes de freinage à courants de Foucault sont utilisés notamment sur les véhicules poids lourds ou les autocars, où on les désigne sous le nom de « ralentisseurs » (ou par leur nom commercial « freins Telma »). Ces freins sont constitués d'électroaimants fixes (stator) induisant des courants de Foucault dans des disques conducteurs (rotor) entraînés par les roues. La photo ci-dessous

représente le frein du train à grande vitesse japonais Shinkansen. Au lieu d'être dissipée par frottement, la puissance est dissipée par effet Joule dans le métal où apparaissent les courants. Cependant, le freinage étant produit par le mouvement des disques, il devient de moins en moins efficace au fur et à mesure que la vitesse diminue, et ne peuvent pas permettre l'arrêt complet. Des freins conventionnels à friction restent donc indispensables.



Source images : Wikipédia

I.C - Méthode d'étude d'un système avec couplage électromécanique

(M)

Le système couplant deux domaines différents, l'approche est nécessairement double et implique aussi bien la mécanique que l'électricité. Le comportement du système est ainsi régi par deux équations différentielles couplées,

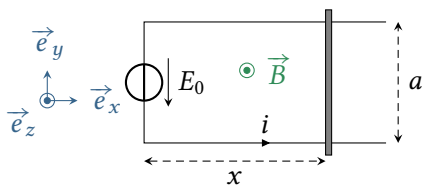
- une **équation mécanique**, obtenue en appliquant le théorème de la résultante cinétique (translation) ou du moment cinétique (rotation) aux parties en mouvement du système;
- une **équation électrique**, obtenue en appliquant la loi des mailles au circuit électrique équivalent.

Du côté mécanique, le couplage apparaît dans l'action de Laplace qui implique le courant, et du côté électrique il transparaît dans la fém induite, puisque les variations de flux magnétique dépendent de la vitesse (éventuellement vitesse angulaire) des parties mobiles.

💣💣💣 **Attention !** L'expression de la force électromotrice induite et de la force de Laplace dépendent de convention sur le sens du courant : la première étape de tout exercice d'induction est d'orienter le courant !

II - Exemples de systèmes en translation

II.A - Conversion électrique → mécanique : rails de Laplace moteurs



Considérons un système de rails de Laplace séparés d'une distance a et soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_z$. L'ensemble possède une résistance électrique r . Ce système est utilisé en fonctionnement moteur : un générateur impose une tension E_0 , ce qui met en mouvement la tige initialement immobile. Il réalise donc une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique.

Remarque culturelle : Ce système peut modéliser un moteur linéaire, utilisé par exemple dans certains trains (Transrapid au Japon, SkyTrain au Canada, etc.), dans des actionneurs électromagnétiques, des pompes, etc.

• D'abord, on oriente le courant

(M)

Et ça se fait sur le schéma ! Ici, on choisit « naturellement » le sens qui oriente le générateur en convention. Si le sens réel du courant coïncide avec le sens choisi, alors i sera positif, sinon i sera négatif ... et comme tout est algébrique ça ne change rien à la physique.

• Équation mécanique

Système : tige mobile.

Référentiel : lié aux rails, supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques :

- force de Laplace : $\vec{dl}$ orienté dans le sens de i , donc ici selon $+\vec{e}_y$

$$\vec{F}_L = \int_{\text{tige}} i \vec{dl} \wedge \vec{B} = i \int_{\text{tige}} dl \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = iB \int_{\text{tige}} dl \vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_L = iaB \vec{e}_x}.$$

(M)

Espace 3

- le mouvement est horizontal, donc le poids $\vec{P}$ est compensé par la force de réaction $\vec{N}$;
 ► les frottements sont négligés.

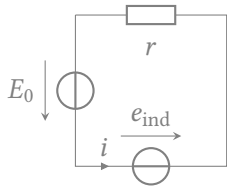
Théorème de la résultante cinétique, qui donne l'équation mécanique du système :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{N} \quad \text{soit} \quad \boxed{m \frac{dv_x}{dt} = iaB}.$$

Espace 4

- **Équation électrique**

Schéma électrique équivalent :



Attention à l'orientation du générateur induit, obligatoirement orienté en convention générateur pour que sa fém soit donnée par la loi de Faraday.

(M)

Calcul de la fém induite : compte tenu de l'orientation conventionnelle de i , le vecteur normal au circuit est $+\vec{e}_z$ par règle de la main droite. $\Phi = \iint \vec{B} \cdot dS \vec{e}_z = +Bax$. d'où $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -aBv_x$.

Espace 5

Loi des mailles, qui donne l'équation électrique du système :

$$E_0 + e_{\text{ind}} = ri \quad \text{soit} \quad \boxed{E_0 - aBv_x = ri}.$$

Espace 6

- **Découplage des équations**

Les deux équations impliquent à la fois la vitesse v_x et le courant i , qui sont deux grandeurs inconnues. Pour la résolution, il faut *découpler* les équations, c'est-à-dire séparer v_x et i .

(M)

Expression de la vitesse :

- *Équation différentielle vérifiée par la vitesse :*

À partir de l'équation électrique, on obtient

$$i = \frac{E_0}{r} - \frac{aB}{r} v_x$$

et en reprenant l'équation mécanique on en déduit

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{E_0 aB}{r} - \frac{(aB)^2}{r} v_x \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dv_x}{dt} + \underbrace{\frac{(aB)^2}{mr}}_{=1/\tau} v_x = \frac{E_0 aB}{mr}}.$$

Espace 7

► *Condition initiale* : supposons $v_x(t=0) = 0$.

► *Résolution* :

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$v_x(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E_0}{aB}$$

et avec la condition initiale

$$v_x(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A + \frac{E_0}{aB} \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{E_0}{aB}.$$

On en déduit finalement

$$v_x(t) = \frac{E_0}{aB} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Espace 8

Expression du courant :

► *Méthode directe* : puisque la vitesse est déjà connue, il suffirait de reprendre l'une des équations couplées pour en déduire le courant !

► *Équation différentielle vérifiée par l'intensité* :

D'après l'équation électrique,

$$v_x = \frac{E_0}{aB} - \frac{r}{aB} i$$

donc en injectant dans l'équation mécanique

$$-m \frac{r}{aB} \frac{di}{dt} = iaB \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{(aB)^2}{mr}}_{=1/\tau} i = 0.$$

Espace 9



Le temps caractéristique τ est intrinsèque au système, et indépendant de la grandeur couplée considérée.



► *Condition initiale* : La condition initiale est plus difficile à obtenir : il est clair que la vitesse est initialement nulle, mais le courant dépend du générateur, ce qui est moins immédiat à analyser.

→ le plus simple est souvent d'utiliser l'une des deux équations, électrique ou mécanique, avec la condition initiale « évidente » pour en déduire l'autre.



D'après l'équation électrique appliquée à l'instant initial où la tige est immobile, $i(0^+) = \frac{E_0}{r} - \frac{aB}{r} v_x(0^+) = \frac{E_0}{r}$

Espace 10

► *Résolution* : l'équation étant homogène, on a directement

$$i(t) = \frac{E_0}{r} e^{-t/\tau}.$$

Espace 11

Interprétation : lorsque $t \gg \tau$, le courant tend à s'annuler : cela signifie-t-il qu'il n'y a plus d'induction ... alors que le flux au travers du circuit continue d'augmenter ?

Non ! En reprenant l'équation électrique, on constate qu'il y a deux contributions au courant, une contribution liée au générateur extérieur en plus du courant induit. En régime permanent, les deux se compensent exactement. Cf. discussion à propos du freinage inductif qui ne peut pas complètement arrêter le système.

Espace 12

• Conservation de la puissance lors de la conversion électro-mécanique

Puissance mécanique algébrique fournie par la force de Laplace :

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iaBv_x$$

Espace 13

Puissance électrique algébrique fournie par le générateur induit :

$$\mathcal{P}_{\text{ind}} = e_{\text{ind}} i = -iaBv_x.$$

Espace 14

Dans le cas étudié, $i > 0$ et $v_x > 0$ donc $\mathcal{P}_L > 0$ et $\mathcal{P}_{\text{ind}} < 0$: la puissance électrique prélevée est donc restituée sous forme de puissance mécanique, on réalise bien une conversion électrique $\rightarrow$ mécanique.

De plus, on constate que ces deux puissances sont exactement opposées : la conversion électromécanique de puissance est parfaite. Ce résultat, constaté sur un exemple, est en fait très général.

(R)

Conservation de la puissance lors de la conversion électro-mécanique :

La puissance mécanique $\mathcal{P}_L$ fournie par les actions de Laplace et la puissance électrique fournie par le générateur induit sont toujours exactement opposées,

$$\mathcal{P}_L + e_{\text{ind}} i = 0.$$

Cette relation traduit le fait que la conversion électro-mécanique est parfaite.

Elle est toujours valable, et permet de calculer efficacement la fém induite dans des situations où la loi de Faraday ne s'applique pas.

⚠⚠⚠ **Attention !** Le fait que la conversion électromécanique soit parfaite ne signifie pas qu'il n'y a pas de dissipation dans les systèmes réalisant cette conversion, mais que ces pertes sont ou bien purement mécaniques, ou bien purement électriques, mais pas dans la conversion entre les deux.

• Bilan de puissance global

Méthode :

► transformer les équations électrique et mécanique en des équations portant sur des puissances

éq méca = forces donc $\times$ vitesse et éq élec = tensions donc $\times$ courant

Espace 15

► les combiner par élimination du terme de couplage électromécanique.

Application au rail de Laplace moteur :

Multiplions l'équation mécanique par v_x et l'équation électrique par i ,

$$m \frac{dv_x}{dt} v_x = iaBv_x \quad \text{et} \quad E_0 i - iaBv_x = ri^2.$$

Sommons ces deux équations de sorte à faire disparaître le terme traduisant la conversion électro-mécanique de puissance $iaBv_x$,

$$E_0 i = m \frac{dv_x}{dt} v_x + ri^2 \quad \text{soit} \quad E_0 i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) + ri^2.$$

Espace 16

Cette équation signifie que la puissance $E_0 i$ fournie par le générateur permet pour partie d'augmenter l'énergie cinétique de la tige mobile (conversion électrique $\rightarrow$ mécanique), et est pour partie dissipée par effet Joule dans les rails.

II.B - Conversion mécanique → électrique : rails de Laplace générateurs

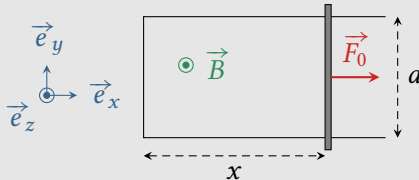


Deux dispositifs semblables reposant sur les mêmes principes peuvent fonctionner ou bien en générateur (conversion mécanique → électrique), ou bien en moteur (conversion électrique → mécanique).

La conversion électromécanique est dite **réversible**.

Remarque : Cette notion de réversibilité de la conversion électromécanique n'a aucun lien avec la réversibilité au sens thermodynamique !

Application 3 : Rails de Laplace générateurs



Considérons les mêmes rails de Laplace que précédemment. Le système est maintenant utilisé en fonctionnement générateur : les rails sont en court-circuit, et un opérateur extérieur tracte la tige, initialement immobile, avec une force constante $\vec{F}_0$.

- 1 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$.
- 2 - Vérifier la cohérence de son signe avec la loi de Lenz, analysée dans l'application 1.

III - Exemples de systèmes en rotation

Dans toute machine tournante, on distingue d'une part la partie fixe appelée **stator** ou **bâti** et d'autres part les pièces en rotation formant le **rotor**.

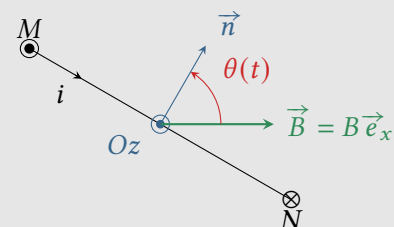
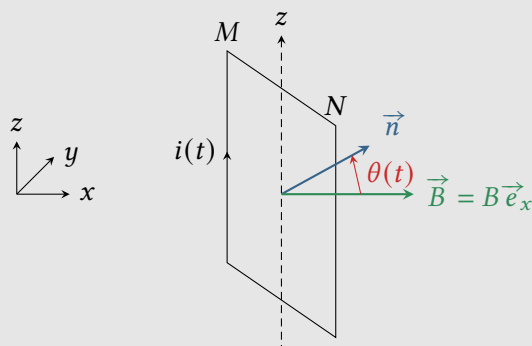
III.A - Conversion mécanique → électrique : modèle simplifié d'alternateur

Un **alternateur**, également appelé **générateur synchrone** est un dispositif utilisé dans toutes les centrales électriques, mais aussi par exemple pour la production d'électricité dans une voiture ou l'éclairage à dynamo d'un vélo. Il permet une conversion d'énergie mécanique de rotation en énergie électrique. On en étudie ici un modèle simple, pour ne pas dire simpliste.

Application 4 : Modèle simplifié d'alternateur



Considérons une spire rectangulaire tournant autour d'un axe (Oz), de moment d'inertie J par rapport à cet axe, plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Cette spire possède une résistance interne r et alimente une résistance électrique extérieure R , qui modélise un récepteur. Sa vitesse de rotation reste constante ($\dot{\theta} = \Omega_0$), imposée par un dispositif mécanique extérieur non représenté.

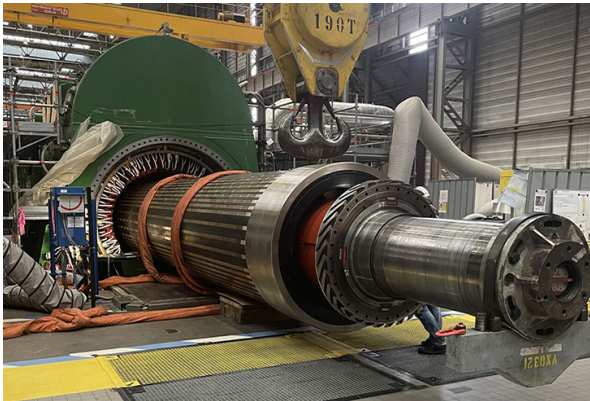


- 1 - Justifier l'apparition d'un courant dans la spire, bien qu'elle ne soit alimentée par aucun générateur externe.
- 2 - Établir les équations électrique et mécanique. Les simplifier dans l'hypothèse de rotation uniforme.
- 3 - Procéder au bilan de puissance et l'interpréter. Vérifier que l'on retrouve la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique.

Remarque : Le moteur ayant un fonctionnement réciproque à celui de l'alternateur étudié ici est un moteur synchrone, dont le principe a été présenté dans les grandes lignes dans le cours sur les actions mécaniques d'un champ tournant.

Remarque culturelle : Il n'y a guère que dans des applications marginales que les alternateurs réels fonctionnent sur ce principe : dynamo de vélo ou micro-générateurs à aimants permanents.

Dans la majorité des alternateurs industriels (centrales électriques, éoliennes, etc.), le rotor porte des aimants permanents ou des électroaimants alors que les bobinages dans lesquels est induite la tension sont au stator (structure fixe). Le champ magnétique est donc tournant dans le référentiel du stator. Que le circuit de puissance soit fixe présente plusieurs avantages techniques, principalement en termes de robustesse mécanique et de refroidissement des circuits électriques.



Source image : <https://www.jeumontelectric.com>

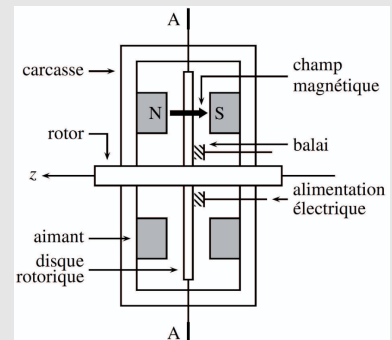
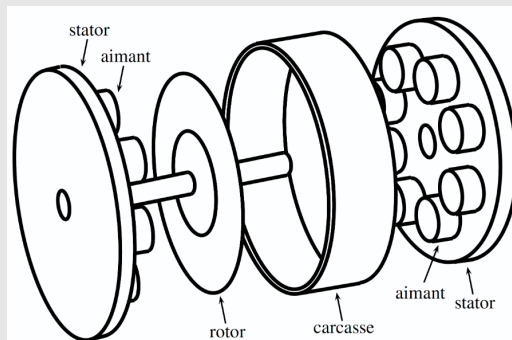
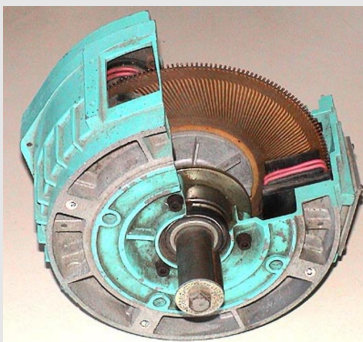
La photo ci-contre montre l'alternateur d'une centrale nucléaire, avec le rotor sorti pour une opération de maintenance. La puissance produite par une centrale est telle qu'il serait impossible de créer un champ suffisamment intense avec des aimants permanents. Le rotor est donc constitué de cadres métalliques rectangulaires, nettement visibles sur la photo, parcourus par un courant constant. La rotation de ces cadre permet de générer le champ tournant qui induit la tension dans les bobinages du stator, que l'on devine également sur la photo. Une description et une modélisation plus précises seront étudiées en PSI.

III.B - Conversion électrique → mécanique : moteur à courant continu à entrefer plan

M

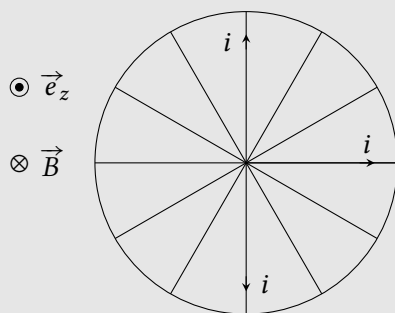
Application 5 : Moteur à courant continu à entrefer plan

On s'intéresse à un moteur à courant continu à entrefer plan, technologie que l'on peut retrouver par exemple dans la motorisation des fauteuils roulants, des pompes médicales, l'articulation de robots, ou encore le positionnement de précision de machines outils. Ses atouts sont un faible encombrement et un contrôle précis et simple de la vitesse de rotation, mais sa puissance demeure relativement limitée.



Source images : Physique Tout-en-un PCSI, programme 2013, édition Dunod

Le stator est constitué d'une carcasse et de deux supports fixes circulaires sur lesquels sont montés des aimants produisant un champ magnétique stationnaire, parallèle à l'axe de rotation. De nombreux circuits électriques radiaux séparés d'isolant sont imprimés sur le rotor. Des contacts métalliques frottants appelés balais assurent le passage du courant entre les circuits électriques mobiles du rotor et l'alimentation. L'entrefer désigne l'espace situé entre les aimants : il s'agit ici du plan du rotor, noté AA sur le schéma de droite, d'où la dénomination de MCC à entrefer plan.



On modélise le rotor par N rayons de longueur a , parcourus le même courant i , de résistance totale constante R , alimentés par un générateur de fém E_0 . Il tourne à la vitesse angulaire ω , son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est noté J . La charge qu'il entraîne exerce un moment résistant $M_z = -\lambda\omega$.

1 - Représenter la force de Laplace subie par un rayon en supposant $i > 0$, et en déduire le sens de rotation.

2 - Établir l'équation mécanique.

3 - Justifier que la loi de Faraday ne s'applique pas dans cette géométrie. Établir l'équation électrique en exploitant la conservation de la puissance.

4 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de rotation ω . Comment contrôler la vitesse de rotation en régime permanent ?

Remarque culturelle : Une machine à courant continu peut aussi fonctionner comme génératrice, et pas seulement comme moteur. On les retrouve par exemple dans certaines éoliennes ou centrales hydrauliques de moyenne puissance, ou bien dans des systèmes de freinage régénératif où la machine récupère l'énergie cinétique lors du freinage pour la convertir en énergie électrique et (re)charger une batterie. Cependant, ces applications utilisent d'autres géométries que celle à entrefer plan.

Correction des applications de cours

Application 3 : Rails de Laplace générateurs

- D'abord, on oriente le courant**

À faire sur le schéma, en prenant le même sens que pour l'étude des rails de Laplace moteur pour ne pas refaire tous les calculs : sens donné par RMD par rapport à $\vec{e}_z$.

- Équation mécanique**

La force $\vec{F}_0$ s'ajoute au bilan, la force de Laplace garde la même expression puisque le sens du courant est le même :

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_0 + iaB.$$

- Équation électrique**

Le sens du courant est le même, donc la fém induite garde la même expression :

$$e_{\text{ind}} = -aBv_x$$

Le schéma électrique équivalent contient simplement le générateur induit e_{ind} et la résistance r du système, la loi des mailles donne donc

$$e_{\text{ind}} = ri \quad \text{soit} \quad -aBv_x = ri.$$

- Découplage pour l'intensité**

À partir de l'équation électrique, on obtient

$$v_x = -\frac{r}{aB}i,$$

et en reprenant l'équation mécanique on en déduit

$$-\frac{mr}{aB} \frac{di}{dt} = F_0 + iaB$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{(aB)^2}{mr}}_{=1/\tau} i = -\frac{aBF_0}{mr}$$



Le temps caractéristique τ est intrinsèque au système, indépendamment de l'utilisation en générateur ou en récepteur qui en est faite.

- Résolution**

$$i(t) = A e^{-t/\tau} - \frac{F_0}{aB}$$

avec la condition initiale

$$i(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} -\frac{aB}{r}v_x(0) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A - \frac{F_0}{aB} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F_0}{aB}.$$

On en déduit finalement

$$i(t) = -\frac{F_0}{aB} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

- Analyse du signe et comparaison à la loi de Lenz**

On trouve i négatif à tout instant, comme prévu par la loi de Lenz.

Application 4 : Modèle simplifié d'alternateur

1 Circuit en mouvement dans un champ magnétique $\Longleftrightarrow$ induction.

2 **Équation mécanique** : La spire est en rotation, on utilise donc le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe (Oz). Les actions mécaniques qu'elle subit sont les suivantes :

- le poids s'applique au centre de masse de la spire, qui est sur l'axe de rotation, donc $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = 0$;
- la liaison pivot est parfaite donc $\mathcal{M}_z(\text{liaison}) = 0$;
- le couple de Laplace vaut

$$\vec{\mathcal{M}}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = iS\vec{n} \wedge \vec{B} = iSB \sin(-\theta) \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \mathcal{M}_{z,L} = -iSB \sin \theta$$

- la mise en mouvement à vitesse constante ne se fait pas seule mais vient d'un couple extérieur $\Gamma_0(t) \vec{e}_z$, inconnu mais qui dépend a priori du temps.

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la spire dans le référentiel terrestre,

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_0 - iSB \sin(\theta)$$

et comme $\dot{\theta} = \Omega_0 = \text{cte}$ alors l'équation mécanique s'écrit

$$\Gamma_0 - iSB \sin(\Omega_0 t) = 0.$$

Équation électrique : Le flux magnétique au travers du circuit vaut

$$\Phi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint (B \vec{e}_x) \cdot (dS \vec{n}) = BS \vec{e}_x \cdot \vec{n} = BS \cos \theta,$$

d'où on déduit la fém induite

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = +BS\dot{\theta} \sin \theta = +BS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t).$$

Le circuit électrique équivalent est simplement constitué du générateur induit de fém e_{ind} , monté en série avec la résistance interne r de la spire et la résistance extérieure R . La loi des mailles donne alors directement

$$e_{\text{ind}} = ri + Ri \quad \text{soit} \quad BS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) = (r + R)i.$$

3 Le bilan de puissance mécanique s'obtient en multipliant le TMC par la vitesse angulaire ω_0

$$0 = \Gamma_0 \Omega_0 - iSB \sin(\Omega_0 t) \Omega_0,$$

alors que le bilan de puissance électrique donne

$$iBS\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) = (r + R)i^2$$

En éliminant le terme de couplage électromécanique de ces deux équations, on obtient le bilan de puissance globale,

$$\underbrace{\Gamma_0 \omega_0}_{\text{puiss méca}} = \underbrace{Ri^2}_{\text{puiss élec}} + \underbrace{ri^2}_{\text{puiss élec}}$$

fournie au rotor fournie au récepteur dissipée

La puissance mécanique apportée au rotor se retrouve dissipée par effet Joule dans le récepteur que l'on souhaite alimenter. Contrairement aux deux exemples précédents, il n'y a pas de terme de variation d'énergie cinétique ici car la spire est supposée en rotation à vitesse constante, son énergie cinétique ne varie donc pas.

Par ailleurs, on constate bien la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique. En effet,

$$\begin{cases} \mathcal{P}_L = \mathcal{M}_{z,L} \Omega_0 = -iSB\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) \\ e_{\text{ind}} i = iSB\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_L + e_{\text{ind}} i = 0.$$

On a donc une façon alternative de calculer la fém induite, sans passer par le calcul du flux magnétique au travers de la spire !

Application 5 : Moteur à courant continu à entrefer plan

1 La règle des doigts de la main droite donne la direction du produit vectoriel selon $+\vec{e}_\theta$, donc rotation en sens direct autour de l'axe Oz.

2 Force de Laplace subie par un rayon :

$$\vec{F}_L = \int i \, d\ell \, \vec{e}_r \wedge (-B \vec{e}_z) = iaB \vec{e}_\theta$$

Cette force s'applique au milieu du rayon, le bras de levier vaut donc $a/2$, et son moment

$$M_L = \frac{a}{2} \times iaB = \frac{ia^2B}{2}.$$

Remarque : Le moment est d'autant plus grand que le milieu du rayon est éloigné de l'axe, c'est pourquoi on voit sur la photo que les rayons ne sont gravés que sur la partie extérieure de la roue et ne vont pas jusqu'au centre.

D'après le TMC appliqué au rotor, tenant compte des N rayons,

$$J \frac{d\omega}{dt} = N \frac{ia^2B}{2} - \lambda\omega.$$

3 Le champ est uniforme et la surface du circuit ne varie pas, signe que la loi de Faraday ne peut s'appliquer.

Remarque : En même temps, l'énoncé ne dit pas clairement comment le câblage permet que les circuits soient bel et bien fermés... Le câblage est en fait astucieux, et repose sur des techniques de commutation du sens du champ et du courant : cf. problème 25.4 de l'ouvrage « Toute la physique de sup en applications », Renaud Carpentier, éditions Ellipses.

D'après la conservation de la puissance,

$$N \frac{ia^2B}{2} \omega + e_{\text{ind}} i = 0 \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}} = -N \frac{a^2B}{2} \omega.$$

Le circuit électrique équivalent compte le générateur E_0 , le générateur induit e_{ind} et la résistance R , d'où

$$E_0 + e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{soit} \quad E_0 - N \frac{a^2B}{2} \omega = Ri$$

4 On isole dans l'équation électrique

$$i = \frac{E_0}{R} - \frac{Na^2B}{2R} \omega$$

et en insérant dans l'équation mécanique

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{Na^2B}{2} \left(\frac{E_0}{R} - \frac{Na^2B}{2R} \omega \right) - \lambda\omega \quad \text{soit} \quad J \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{N^2a^4B^2}{4R} + \lambda \right) \omega = \frac{Na^2B}{2R} E_0$$

La vitesse de rotation en régime permanent correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, dont on voit qu'elle est facilement contrôlable via la tension E_0 imposée par le générateur.