

# Conversion électromécanique

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice important.

Flasher ou cliquer  
pour accéder  
au corrigé



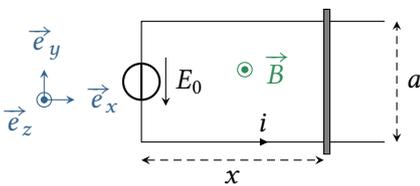
## Se préparer

### Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

**I3.1** - Considérons un système de rails de Laplace où la tige mobile est tractée par une force  $\vec{F}_0$ . Déterminer le sens du courant dans le circuit par application de la loi de Lenz.

**I3.2** - Considérons un système de rails de Laplace alimentés par un générateur de fém  $E_0$ . Établir les équations électrique et mécanique.



**I3.3** - Considérons le système de rails de Laplace alimentés par un générateur schématisé ci-contre. Les équations mécanique et électrique s'écrivent

$$m \frac{dv_x}{dt} = iaB \quad \text{et} \quad E_0 - aBv_x = ri.$$

Procéder au bilan de puissance et l'interpréter.

**I3.4** - On modélise un alternateur par une spire rectangulaire, de normale  $\vec{n}$ , plongée dans un champ magnétique constant  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ , voir figure 1. Sous l'effet d'un couple extérieur  $\Gamma_0\vec{e}_z$ , cette spire tourne à vitesse angulaire  $\Omega_0$  supposée constante autour de l'axe ( $Oz$ ). Cette spire possède une résistance interne  $r$  et alimente une résistance électrique extérieure  $R$ , qui modélise un récepteur. Établir les équations électrique et mécanique.

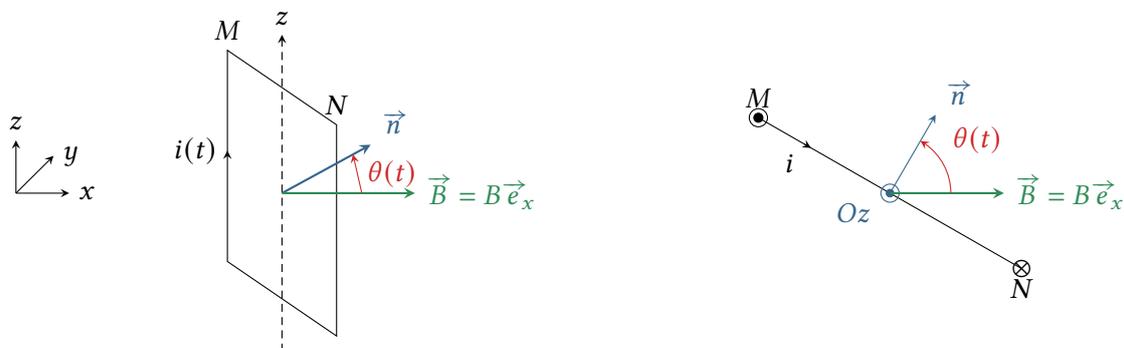


Figure 1 – Schéma d'alternateur modèle.

**Cahier d'Entraînement**



🔴🔴🔴 **Attention !** Le contenu du cahier « 1<sup>re</sup> année » ne me semble pas pertinent pour ce chapitre, au contraire du cahier « 2<sup>e</sup> année PSI » qui propose de nombreux entraînements de révisions. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

→ pour ce chapitre : 5.1 à 5.4 et 5.9 à 5.18 (cahier 2<sup>e</sup> année PSI).

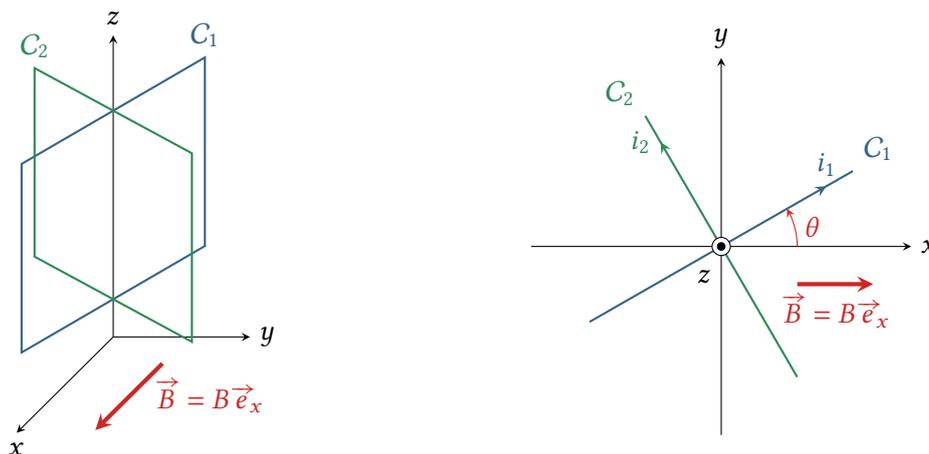
**Analyse de corrigé**

**Exercice 1 : Freinage inductif en rotation**



- Loi de Lenz ;
- Découplage des équations électrique et mécanique ;
- Moment cinétique ;
- Bilan de puissance.

On considère un système formé de deux cadres carrés de côté  $a$ , rigidement liés l'un à l'autre à angle droit, voir figure 2, pouvant tourner sans frottement autour de l'axe ( $Oz$ ) avec un moment d'inertie  $J$ . Les deux cadres sont conducteurs, de même résistance  $R$ , mais sont isolés électriquement. Le système est en rotation à la vitesse angulaire  $\omega_0$  et un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_x$  est appliqué à partir de l'instant  $t = 0$ .



**Figure 2 – Cadres en rotation.** Gauche : vue en perspective. Droite : vue de dessus précisant l'orientation des courants dans les cadres.

- 1 - Prévoir qualitativement l'effet du champ magnétique sur les cadres.
- 2 - Établir les équations électriques correspondant à chacun des deux cadres.
- 3 - Déterminer le moment magnétique de chaque cadre, et en déduire l'équation mécanique.
- 4 - En déduire la vitesse angulaire  $\omega(t)$  et vérifier la cohérence avec la première question.
- 5 - Procéder à un bilan de puissance : que devient l'énergie mécanique perdue par les cadres ?

**Correction** — 1 - Les cadres conducteurs sont en mouvement dans un champ magnétique, il y a donc induction. D'après la loi de Lenz, les cadres vont donc **ralentir**.

**Question d'analyse 1** - Expliciter pourquoi la loi de Lenz impose qu'il y a un ralentissement.

2 - Il y a deux circuits indépendants, donc deux équations électriques. Compte tenu de l'orientation des courants, les vecteurs normaux aux cadres sont respectivement

$$\vec{n}_1 = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y.$$

**Question d'analyse 2** - Justifier ces expressions, en particulier les signes.

On en déduit les flux au travers des cadres,

$$\Phi_1 = \iint B \vec{e}_x \cdot dS \vec{n}_1 = -a^2 B \sin \theta \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \iint B \vec{e}_x \cdot dS \vec{n}_2 = -a^2 B \cos \theta,$$

et les fém induites dans chaque cadre par la loi de Faraday

$$e_{ind,1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = +a^2 B \dot{\theta} \cos \theta \quad \text{et} \quad e_{ind,2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -a^2 B \dot{\theta} \sin \theta.$$

Les cadres étant purement résistifs, les équations électriques sont simplement

$$a^2 B \omega \cos \theta = Ri_1 \quad \text{et} \quad -a^2 B \omega \sin \theta = Ri_2.$$

**Question d'analyse 3** - Dessiner le/les schéma(s) électrique(s) équivalent(s).

3 - Les cadres subissent les couples magnétiques

$$\vec{M}_1 = \vec{\mu}_1 \wedge \vec{B} = -i_1 a^2 B \cos \theta \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{M}_2 = \vec{\mu}_2 \wedge \vec{B} = i_2 a^2 B \sin \theta \vec{e}_z.$$

**Question d'analyse 4** - Rappeler la définition des moments magnétiques et justifier par un calcul l'expression finale des moments  $\vec{M}_1$  et  $\vec{M}_2$ , en particulier les signes.

**Question d'analyse 5** - Procéder à un test de vraisemblance (c'est-à-dire identifier un argument physique qualitatif) pour justifier ces signes.

On en déduit l'équation mécanique par application du TMC en projection sur l'axe (Oz),

$$J \frac{d\omega}{dt} = -i_1 a^2 B \cos \theta + i_2 a^2 B \sin \theta.$$

**Question d'analyse 6** - J'ai « oublié » de parler de deux actions mécaniques (certes de moment nul) : lesquelles ?

4 - En remplaçant les expressions des courants à partir des équations électriques,

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{a^4 B^2}{R} \omega \cos^2 \theta - \frac{a^4 B^2}{R} \omega \sin^2 \theta \quad \text{soit} \quad J \frac{d\omega}{dt} + \frac{a^4 B^2}{R} \omega = 0.$$

La vitesse étant initialement égale à  $\omega_0$ , on en déduit

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{JR}{a^4 B^2}.$$

On constate que  $\omega$  diminue au cours du temps, conformément à l'analyse qualitative de la première question.

**Question d'analyse 7** - Pourquoi n'y a-t-il pas de solution particulière dans l'expression de  $\omega(t)$  ?

5 - Les trois équations convenablement multipliées pour faire apparaître des puissances s'écrivent

$$a^2 B \omega \cos \theta i_1 = Ri_1^2 \quad -a^2 B \omega \sin \theta i_2 = Ri_2^2 \quad J \omega \frac{d\omega}{dt} = -i_1 a^2 B \omega \cos \theta + i_2 a^2 B \omega \sin \theta$$

En insérant les deux équations électriques dans l'équation mécanique,

$$J \omega \frac{d\omega}{dt} = -Ri_1^2 - Ri_2^2 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 \right) = -Ri_1^2 - Ri_2^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{dE_c}{dt} = -Ri_1^2 - Ri_2^2$$

Ainsi, l'énergie cinétique initiale des deux cadres est dissipée par effet Joule, ce qui permet de les ralentir.

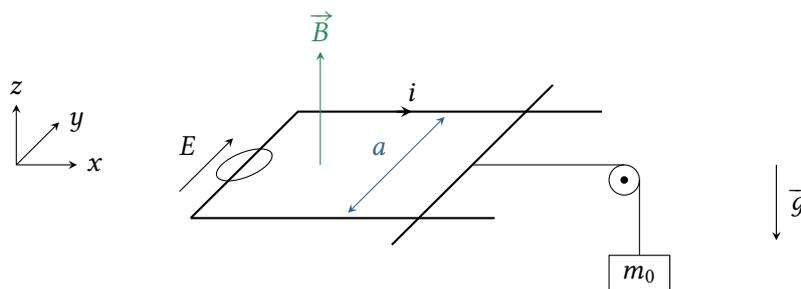
**Question d'analyse 8** - Comment se traduit dans ce système la conservation de la puissance à la conversion électromécanique ?

# Systèmes en translation

## Exercice 2 : Treuil électromécanique 🧠 2 | ✂️ 2 | ⚙️

- ▶ Découplage des équations électrique et mécanique ;
- ▶ Bilan de puissance.

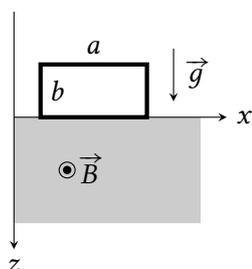
On modélise un treuil par un moteur linéaire, analogue à un dispositif de rails de Laplace séparés d'une distance  $a$  plongés dans un champ magnétique  $\vec{B}$  et alimentés par un générateur de tension continue  $E$ . La tige mobile est reliée à la masse  $m_0$  à soulever par l'intermédiaire d'un câble inextensible et d'une poulie dont on néglige les frottements d'axe. On note  $R$  la résistance électrique du circuit, supposée indépendante de la position de la tige mobile. Ce circuit est orienté dans le sens indiqué sur la figure.



- 1 - Quel doit être le signe du courant  $i$  imposé par le générateur pour que le système puisse fonctionner en treuil, c'est-à-dire puisse soulever la masse ? Déterminer la valeur minimale de  $E$  permettant d'atteindre ce fonctionnement.
- 2 - Établir l'expression de la norme de la force de tension du câble en fonction de l'accélération de la masse  $m_0$ .
- 3 - Établir les équations électrique et mécanique du système.
- 4 - En déduire l'expression de la vitesse  $v_z(t)$  de la masse  $m_0$  en supposant qu'elle est initialement immobile. Déterminer la valeur limite de la vitesse de levage, notée  $V_0$ .
- 5 - Établir et interpréter le bilan de puissance du système en régime permanent.

## Exercice 3 : Freinage inductif en translation 🧠 2 | ✂️ 1 | ⚙️

- ▶ Découplage des équations électrique et mécanique.



La plupart des manèges des parcs d'attraction utilisent des dispositifs de freinage inductif en plus du freinage par friction. On modélise dans cet exercice une attraction proposant aux passagers d'une cabine d'ascenseur de tomber en chute quasi-libre pendant quelques secondes avant d'être brutalement freinés. La première étape du freinage est magnétique.

Dans le chassis de la cabine d'ascenseur est placée un bobinage conducteur modélisé par une unique spire rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ , de masse  $m$  et de résistance  $R$ . Sa position est repérée par la cote  $z$  du bas de la spire. Dans le demi-espace  $z > 0$  règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et permanent. À l'instant  $t = 0$ , la cabine se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre où  $z = 0$ , sa vitesse valant alors  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$ . Pour simplifier, les frottements de l'air seront négligés dans tout l'exercice.

- 1 - Montrer que le mouvement ultérieur de la cabine reste une translation verticale selon l'axe  $(Oz)$ .
- 2 - Établir une équation différentielle portant sur la vitesse  $v$  de la cabine.
- 3 - Résoudre cette équation. Que se passe-t-il lorsque  $z = b$  ?
- 4 - Justifier qu'un freinage magnétique ne peut pas suffire à arrêter la cabine d'ascenseur.

**Exercice 4 : Haut-parleur**

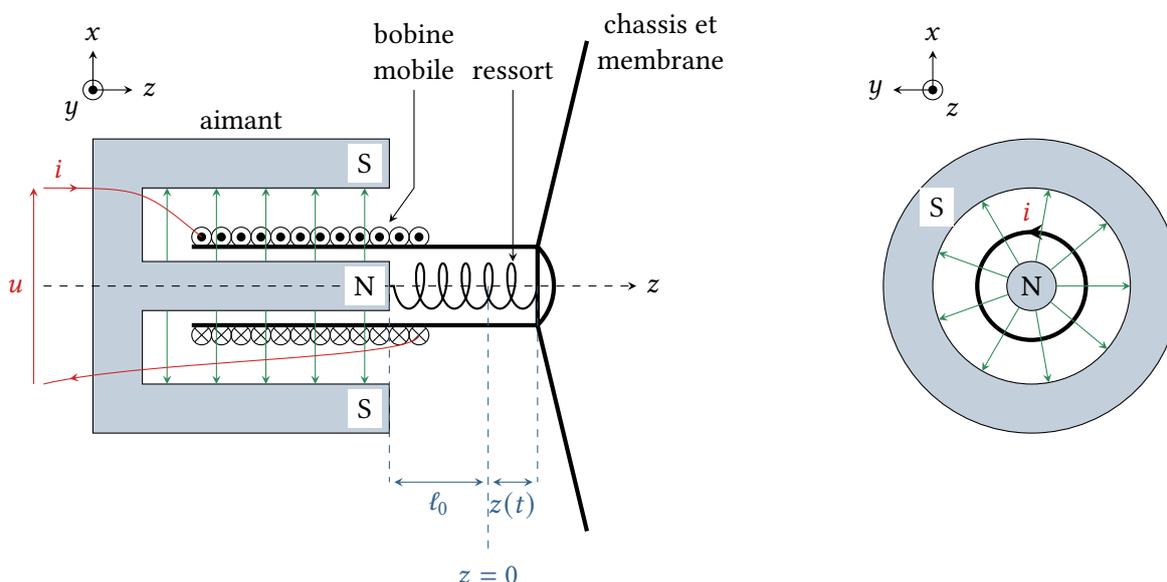


- $\triangleright$  Conservation de la puissance ;
- $\triangleright$  Approche fréquentielle.

Un haut-parleur est composé d'un aimant permanent fixe, dont la géométrie permet de produire un champ magnétique radial de norme constante,  $\vec{B} = B \vec{e}_r$ , représenté par les flèches vertes en traits fins sur la figure 3.

Une membrane est reliée mécaniquement à cet aimant par une suspension appelée le « spider », modélisée par un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de raideur  $k$ . Un châssis mobile cylindrique portant un bobinage de résistance  $R$  et de longueur totale  $\ell_{bob}$  ( $\ell_{bob}$  tient compte à la fois du rayon du bobinage et du nombre de spires bobinées) peut se déplacer dans l'entrefer de l'aimant. L'ensemble formé par la bobine, le châssis et la membrane est appelé « équipement mobile » du haut-parleur.

Un générateur extérieur impose une tension de commande  $u$ , et donc un courant  $i$  circule dans la bobine. La membrane est alors mise en mouvement sous l'effet des forces de Laplace, et crée une onde de pression : le son.



**Figure 3 – Schéma de principe d'un haut-parleur électrodynamique.** Vue en coupe et vue de face d'un haut-parleur simplifié.

1 - Montrer que la force de Laplace subie par un tronçon de spire bobinée de longueur infinitésimale  $d\ell$  s'écrit

$$d\vec{F}_L = -i B d\ell \vec{e}_z.$$

En déduire la force de Laplace totale en fonction de  $\ell_{bob}$ .

2 - Établir l'équation mécanique du système. On prendra en compte une force de frottements linéaire  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$  : que modélise-t-elle ?

3 - Exprimer la fém induite en utilisant la conservation de la puissance lors de la conversion électro-mécanique.

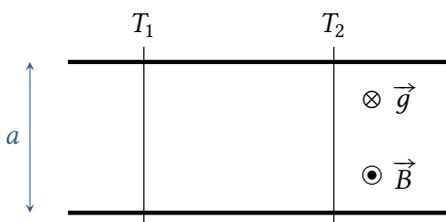
4 - En déduire l'équation électrique du système.

5 - Exprimer l'impédance d'entrée du haut-parleur  $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ . Montrer qu'elle s'interprète comme la mise en série d'une impédance électrique et d'une impédance mécanique à définir.

**Exercice 5 : Rails de Laplace couplés**

3 | ✂ 2

- Rails de Laplace ;
- Bilan énergétique.



On considère deux barreaux  $T_1$  et  $T_2$  de résistance  $R$  et de masse  $m$  posés sur un rail et plongés dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

1 - Établir les équations couplées vérifiées par les vitesses  $v_1$  et  $v_2$ . On fera apparaître  $\tau = mR/(aB)^2$ .

2 - Donner les expressions de  $v_1(t)$  et de  $v_2(t)$  en supposant que l'on donne au barreau  $T_1$  une vitesse initiale  $v_0$ .

3 - Même question en supposant  $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$ .

4 - Vérifier que la conversion d'énergie est parfaite.

**Systèmes en rotation**

**Exercice 6 : Roue de Barlow**

2 | ✂ 1 | ⚙

- Découplage des équations électrique et mécanique ;
- Conservation de la puissance ;
- Moment cinétique.

La roue de Barlow, voir figure 4, constitue l'une des toutes premières démonstrations de moteur électrique, mise en œuvre par Peter Barlow en 1822. Une roue métallique plonge à l'une de ses extrémités dans un bain de mercure. Une pile impose une tension  $U \simeq 10 \text{ V}$  entre le centre de la roue et le bain de mercure. Un aimant en fer à cheval est placé autour du bain de mercure. La roue permet de lever une masse posée sur le plateau visible à droite de la figure.

Des dentures sont présentes sur la roue pour que le contact avec le bain de mercure soit quasi-pontuel : pour simplifier, on la modélise par un disque homogène de rayon  $a = 10 \text{ cm}$  et de moment d'inertie  $J$ , et on suppose que le courant circule uniquement le long de la ligne  $CO$ . La résistance électrique de l'ensemble vaut  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . Le champ magnétique  $B \simeq 10 \text{ mT}$  est supposé uniforme le long de  $CO$ . Le fil soulevant la masse exerce sur la roue un moment résistant  $\Gamma_m < 0$ , égal à  $-bmg$  en régime permanent.

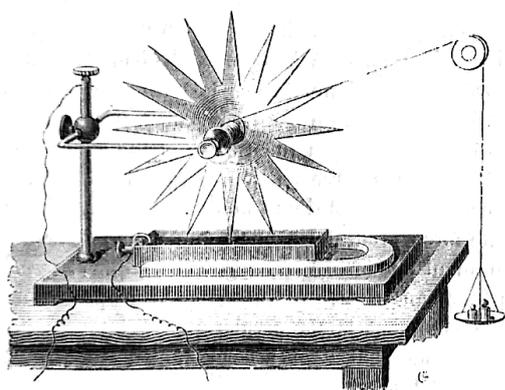


Fig. 57. — Roue de Barlow.

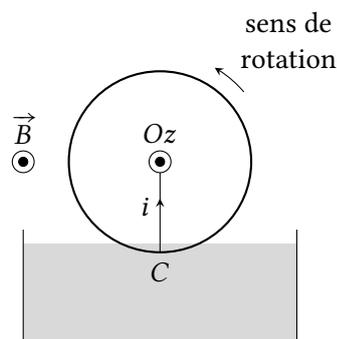


Figure 4 – Roue de Barlow.

1 - Exprimer la force de Laplace subie par le disque puis son moment. En déduire l'équation mécanique décrivant son mouvement.

2 - Exprimer la puissance des actions de Laplace et en déduire la force électromotrice induite dans le circuit par le mouvement du disque. Déterminer l'intensité du courant en fonction de  $R, B, U_0$  et de la vitesse de rotation  $\omega$ .

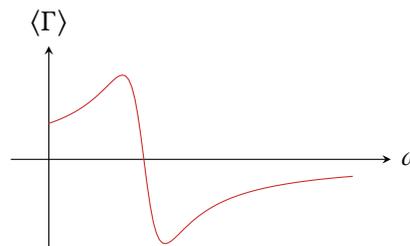
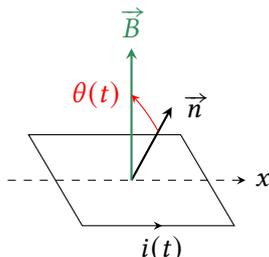
3 - Quelle vitesse  $\omega_\infty$  atteint le disque en régime permanent ?

**Exercice 7 : Moteur asynchrone**



- ▶ Équations électrique et mécanique ;
- ▶ Moment cinétique ;
- ▶ Approche fréquentielle.

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance  $R$ , d'inductance  $L$  et de surface  $S$  tournant à vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe  $(Ox)$ . La normale  $\vec{n}$  à la spire est contenue dans le plan  $(Oyz)$ . Cette spire est plongée dans un champ  $\vec{B}$  généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan  $(Oyz)$ , de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante  $\omega'$  autour de  $(Ox)$ . Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.

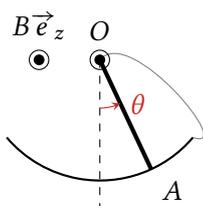


- 1 - Expliquer qualitativement (sans équation !) pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses  $\omega$  et  $\omega'$  peuvent-elles être identiques ?
- 2 - Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial  $\vec{n}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires et de même sens selon  $\vec{e}_z$ . Exprimer l'angle  $\theta$  en fonction de  $\Omega = \omega' - \omega$ . Que représente physiquement la vitesse de glissement  $\Omega$  ?
- 3 - Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor en fonction de  $\Omega$ .
- 4 - On se place en régime permanent. Déterminer la pulsation du courant dans la bobine et résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment à l'aide de la représentation complexe. Écrire la solution comme une somme de sinus et cosinus.
- 5 - En considérant le moment magnétique  $\vec{m}$  de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen  $\langle \Gamma \rangle$  s'exerçant sur la bobine.
- 6 - L'allure de la courbe représentant  $\langle \Gamma \rangle$  en fonction de  $\omega$  est donnée ci-dessus. Le moteur peut-il démarrer seul ?
- 7 - Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant  $\Gamma_r$  connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotation  $\omega$ , sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à  $\Gamma_r$ , justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique. Lequel et pourquoi ?

**Exercice 8 : Pendule pesant conducteur avec induction**



- ▶ Moment cinétique ;
- ▶ Bilan de puissance.



On considère une tige rigide  $OA$  homogène, de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ , libre de tourner autour d'un axe horizontal  $(Oz)$  passant par une de ses extrémités. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut  $m\ell^2/3$ . La tige est en contact en  $A$  avec un rail métallique, ce qui forme un circuit électrique de résistance  $R$  indépendante de l'angle  $\theta$ . L'ensemble est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . Tous les frottements sont négligés.

- 1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  avec la verticale.
- 2 - La tige est lâchée sans vitesse d'un petit angle  $\theta_0$ . Établir une condition sur  $B$  pour qu'elle revienne à l'équilibre sans oscillation.
- 3 - Déterminer l'énergie totale  $W_J$  dissipée par effet Joule. Dépend-elle de la présence d'oscillations ?