

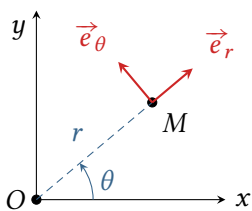
Mouvements circulaires

I - D'autres repérages des trajectoires planes

- **Vecteur déplacement élémentaire** : $d\vec{M} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t)$ avec dt infinitésimal.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \iff d\vec{OM} = \vec{v} dt.$$

En coordonnées cartésiennes : $d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$.

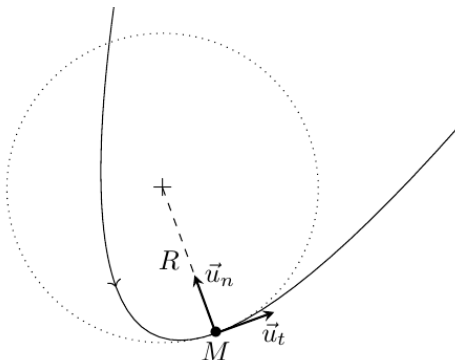


- **Base polaire** : base locale, qui dépend du point M , et donc du temps si M est en mouvement

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

- **Cinématique dans la base polaire** :

- ▷ déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$
- ▷ vecteur position : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ (et rien du tout selon $\vec{e}_\theta$!)
- ▷ vecteurs vitesse et accélération : à retrouver au cas par cas en dérivant le vecteur position
- ▷ $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire (notation ω ou Ω).



- **Base de Frénet** : base locale.

- ▷ $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire, dirigé dans le sens du mouvement ;
- ▷ $\vec{u}_n$ normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la courbure.

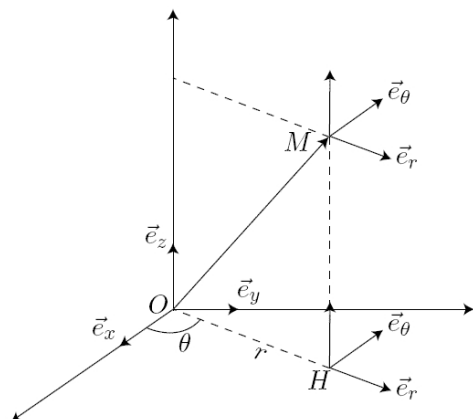
- **Cinématique dans la base de Frénet** :

$$\vec{v} = v \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n.$$

avec $v = \|\vec{v}\|$ et R rayon de courbure de la trajectoire.

→ l'accélération est toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire, potentiellement non-nulle même si le mouvement est uniforme.

II - Généralisation tridimensionnelle

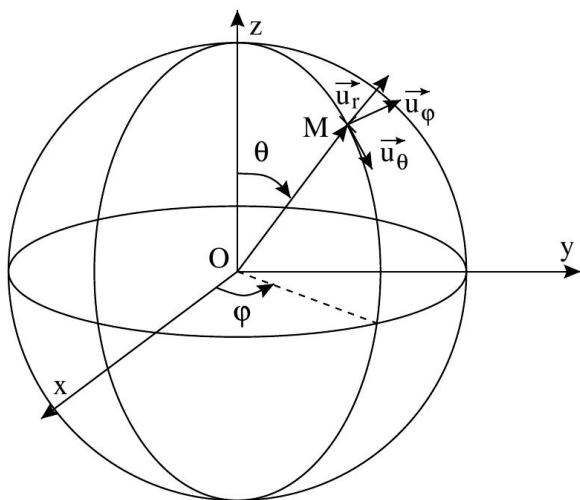


- **Coordonnées cylindriques** : $r = OH \neq OM$, avec H projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy) .

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

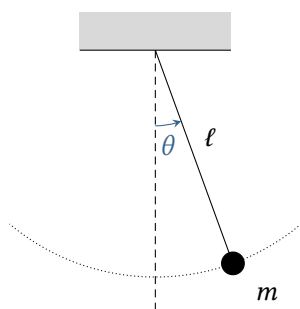
- **Cinématique en coordonnées cylindriques** :

- ▷ déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$;
- ▷ vecteur position : $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ (et rien du tout selon $\vec{e}_\theta$!)
- ▷ vecteurs vitesse et accélération : à retrouver au cas par cas en dérivant le vecteur position ;
- ▷ $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire (notation ω ou Ω).



- **Coordonnées sphériques :**
 - ▷ Rayon $r = OM \geq 0$;
 - ▷ Colatitude θ : restreint au domaine $[0, \pi]$... et non pas $[0, 2\pi]$;
 - ▷ Azimuth $\varphi \in [0, 2\pi[$
- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$.

III - Exemple du pendule simple



- **Équation du mouvement :**

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

- **Limite des petites oscillations :** $\sin \theta \simeq \theta$
 $\leadsto$ comportement d'oscillateur harmonique.

Isochronisme des petites oscillations = période indépendante de l'amplitude.