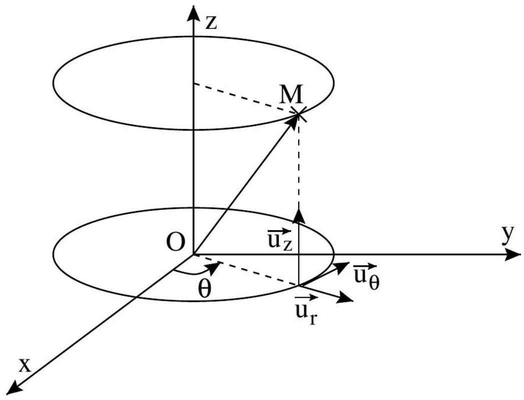
Mouvements circulaires

Exercice 1 : Musculation vectorielle

1 | 1 |

- *Projections ;*
- *Dérivation de vecteurs.*

1



2 Les projections donnent

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

> *Pensez toujours à contrôler les projections en vérifiant les cas limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.*

3 On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z$$

4 Comme $|\vec{e}_r|^2 = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{e}_r|^2 = 2\,\vec{e}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

mais par ailleurs $|\vec{e}_r|^2 = 1$ donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{e}_r|^2 = 0$. On en déduit

$$\vec{e}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

ce qui signifie bien que $\vec{e}_r$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ sont perpendiculaires.

5 D'après les expressions obtenues précédemment, et comme les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont fixes,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\sin\theta\,\vec{e}_x + \dot\theta\,\cos\theta\,\vec{e}_y = \dot\theta\,\vec{e}_\theta$$

et de même

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\cos\theta\,\vec{e}_x - \dot\theta\,\sin\theta\,\vec{e}_y = -\dot\theta\,\vec{e}_r$$

Cinématique

Exercice 2 : Duel de F1 1 | 1 |

▷ *Vitesse et accélération sur une trajectoire circulaire.*

1 La voiture A de Piastri entame son virage dès qu'il passe par l'axe Δ et parcourt un demi-cercle, de longueur

$$D_A = \frac{2\pi R_A}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}\,.}$$

En revanche, la voiture B de Verstappen continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_A - R_B) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}\,.}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2 Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{0{,}8\,g\,R_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_B = \sqrt{0{,}8\,g\,R_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

3 Calculons pour conclure le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage,

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

ce qui donne numériquement

$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Piastri va plus vite que Verstappen pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus extérieure des deux** ... ne vérifiez pas en rentrant chez vous ;)

Exercice 3 : Parking hélicoïdal 1 | 2 |

▷ *Dérivation de vecteurs.*

1 La définition de θ prise ici (angle parcouru depuis l'entrée dans le parking) ne coïncide pas exactement avec celle des coordonnées cylindriques : pour un parking de N étages, $0 \leq \theta \leq 2N\pi$. Puisqu'au bout d'un tour la voiture a gravi un étage,

$$z(\theta + 2\pi) = z(\theta) + H \qquad \text{soit} \qquad \alpha\theta + 2\pi\alpha = \alpha\theta + H \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \frac{H}{2\pi}\,.$$

2 Par définition,

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

En dérivant,

$$\vec{v} = R\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\,\vec{e}_z = R\dot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{v} = R\frac{2\pi\dot{z}}{H}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z\,.}$$

La voiture se déplaçant à vitesse constante,

$$v_0 = ||\vec{v}|| = \sqrt{\frac{4\pi^2R^2}{H^2}\dot{z}^2 + \dot{z}^2} \qquad \text{soit} \qquad v_0 = \dot{z}\sqrt{\frac{4\pi^2R^2}{H^2} + 1}\,.$$

On en déduit que $\dot{z} = \text{cte}$, ce qui permet de le relier facilement à Δt par $\dot{z} = H/\Delta t$, d'où

$$\boxed{\Delta t = \frac{H}{v_0}\sqrt{\frac{4\pi^2R^2}{H^2} + 1}\,.}$$

3 Puisque $\dot{z} = \text{cte}$, dériver le vecteur vitesse donne

$$\vec{a} = R\frac{2\pi\dot{z}}{H}\dot{\vec{e}_\theta} = -R\frac{2\pi\dot{z}}{H}\dot{\theta}\,\vec{e}_r \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{a} = -R\left(\frac{2\pi\dot{z}}{H}\right)^2\vec{e}_r}$$

On constate que $\vec{a}$ est porté par $-\vec{e}_r$, c'est-à-dire dirigé comme il se doit vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire. Il est non nul car seule la norme du vecteur vitesse est constante, mais sa direction change. Enfin, $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$, cohérent avec un mouvement uniforme.

Exercice 4 : Manège — 1 | 2

▷ *Dérivation de vecteurs.*

1 Voir figure 1. La base polaire a pour origine O, si bien qu'au point D les vecteurs coïncident (au signe près) avec ceux de la base cartésienne … et la vitesse n'est pas portée par un des vecteurs de base (ne pas confondre avec la base de Frénet).

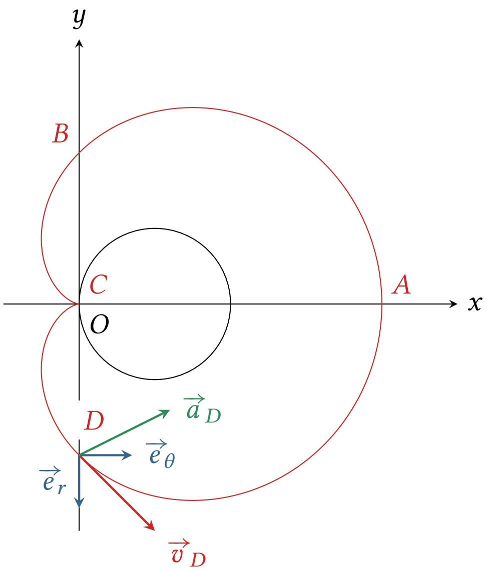


Figure 1 – Schéma complet de la trajectoire.

2 L'énoncé indique

$$\overrightarrow{OM} = r(\theta)\,\vec{e}_r = 2R(1+\cos\theta)\,\vec{e}_r$$

donc par dérivation

$$\vec{v} = -2R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_r + 2R(1+\cos\theta)\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{v} = -2R\Omega\sin(\theta)\,\vec{e}_r + 2R(1+\cos(\theta))\Omega\,\vec{e}_\theta\,.}$$

Sa norme s'écrit

$$\begin{aligned} v^2 &= 4R^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t) + 4R^2(1+\cos(\Omega t))^2\Omega^2 \\ &= 4R^2\Omega^2 \left[\sin^2(\Omega t) + 1 + 2\cos(\Omega t) + \cos^2(\Omega t)\right] \\ &= 8R^2\Omega^2(1+\cos(\Omega t)) \\ &= 8R^2\Omega^2 \times 2\cos^2\frac{\Omega t}{2} \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\boxed{v = 4R\Omega\left|\cos\frac{\Omega t}{2}\right| = 4R\Omega\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,.}$$

3 La vitesse s'annule quand $\theta = \pi$ ce qui correspond au point C. La vitesse est maximale lorsque $\theta/2 = 0$ ou π, soit $\theta = 0$ ou 2π, c'est-à-dire au point A. La vitesse est alors porté par $\overrightarrow{e}_\theta$ uniquement, qui coïncide ici avec $\overrightarrow{e}_y$.

4 Dérivons le vecteur vitesse, sachant que $\ddot\theta = 0$ car $\Omega = \text{cte}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= -2R\dot\theta^2\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r - 2R\dot\theta^2\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta - 2R\dot\theta^2\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta - 2R(1+\cos\theta)\dot\theta^2\,\overrightarrow{e}_r \\ &= \left[-2R\dot\theta^2\cos\theta - 2R\dot\theta^2(1+\cos\theta)\right]\overrightarrow{e}_r + \left[-2R\dot\theta^2\sin\theta - 2R\dot\theta^2\sin\theta\right]\overrightarrow{e}_\theta \\ &\boxed{\overrightarrow{a} = -2R\Omega^2(1+2\cos\theta)\,\overrightarrow{e}_r - 4R\Omega^2\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\,.} \end{aligned}$$

Sa norme s'écrit

$$\begin{aligned} a^2 &= 4R^2\Omega^4(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta) + 16R^2\Omega^4\sin^2\theta \\ &= 4R^2\Omega^4 + 16R^2\Omega^4\cos\theta + 16R^2\Omega^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\ &= 20R^2\Omega^4 + 16R^2\Omega^4\cos\theta \\ &\boxed{a = 2R\Omega^2\sqrt{5+4\cos\theta}} \end{aligned}$$

5 La norme est maximale en $\theta = 0$, c'est-à-dire au point C.

Dynamique

Exercice 5 : Le Rotor 1 | 1 |

- *Trajectoire circulaire ;*
- *Force de réaction d'un support.*

Attention, les passagers sont fixes *par rapport au manège*, mais sont en mouvement de rotation dans le référentiel terrestre. Leur accélération et donc la somme des forces qu'ils subissent n'est donc pas nulle !

1 Notons (Oz) l'axe vertical ascendant, et travaillons en coordonnées cylindriques. Un passager subit
- son poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{e}_z$;
- la force de réaction du manège, dont la direction est a priori inconnue

$$\overrightarrow{R} = \underbrace{R_r\,\overrightarrow{e}_r + R_\theta\,\overrightarrow{e}_\theta}_{=\overrightarrow{R}_T} + \underbrace{R_z\,\overrightarrow{e}_z}_{=\overrightarrow{R}_N}$$

Contrairement aux apparences, il n'y a *aucune* force dirigée selon $+\overrightarrow{e}_r$ qui viendrait maintenir les passagers « immobiles », ou plus exactement cette force (qui serait la célèbre force centrifuge) est un effet lié au fait que le référentiel tournant, lié au passager, est non-galiléen.

> *Le mouvement étant circulaire uniforme, on sait que l'accélération sera portée par $-\vec{e}_r$, et on peut donc comprendre que $R_\theta = 0$ ... mais on peut aussi attendre la question suivante pour le montrer !*

2 Le passager tourne à vitesse angulaire $\dot\theta = \omega$ constante, et suit une trajectoire circulaire de rayon $r = $ cte. Ainsi,

$$\vec{v} = r\omega\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r\,.$$

Le PFD projeté sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ donne

$$\begin{cases} -mr\omega^2 = R_r \\ 0 = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

Pour qu'il n'y ait pas de glissement, il faut avoir $R_T < \mu R_N$, c'est-à-dire

$$|R_z| < \mu\sqrt{R_r^2 + R_\theta^2} \qquad \text{donc} \qquad mg < \mu\, mr\omega^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\omega > \sqrt{\frac{g}{\mu\, r}} = 2{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}\,.$$

3 Rien ne dépend de la masse, la limite d'âge n'est donc pas un problème de masse des enfants.

Exercice 6 : Une chaussette dans un sèche-linge

1 | 1 |

- *Trajectoire circulaire ;*
- *Décollage d'un support.*

1 Le mouvement de la chaussette se fait à rayon constant $r = R$ et à vitesse angulaire $\dot\theta = \omega$ constante également. Ainsi,

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r \qquad \vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e}_r\,.$$

2 La chaussette est soumise à la force $\vec{F}$ exercée par le tambour et à son poids, voir figure 2,

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

D'après le PFD,

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{F} = m(-R\omega^2 - g\cos\theta)\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta}$$

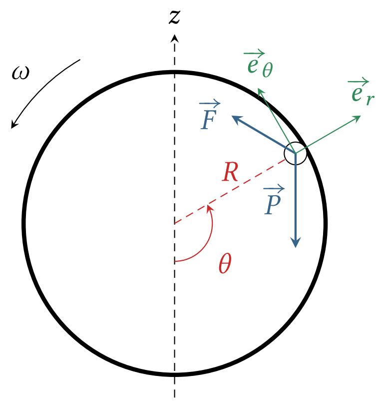


Figure 2 – Une chaussette dans un tambour de sèche-linge.

> *On remarque cette force de réaction n'est pas une force normale, ce qui indique qu'il y a frottement entre la chaussette et le tambour. Rien de surprenant là dedans !*

3 La composante normale, c'est-à-dire perpendiculaire au tambour, est celle sur $\vec{e}_r$. La chaussette décolle pour

$$\cos\theta^\star = -\frac{R\omega^2}{g} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta^\star = \arccos\left(-\frac{R\omega^2}{g}\right)\,.}$$

Numériquement,

$$\omega = 50\,\frac{\text{tours}}{\text{minute}} = 50\,\frac{2\pi\text{rad}}{60\text{ s}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta^\star = 134{,}3°\,.}$$

L'angle $\theta^\star$ est indépendant de la masse, il est donc le même pour tous les vêtements ... et même pour les billes.

> *On peut noter que si le tambour tourne trop vite ($R\omega^2 > g$) alors la composante normale de la force de réaction ne s'annule jamais, autrement dit le linge fait des tours complets sans jamais se décoller. C'est le cas dans un tambour de machine à laver tournant à pleine vitesse lors d'un essorage.*

Exercice 7 : Mouvement circulaire avec ressort 2 | 1 |

- ▹ *Trajectoire circulaire ;*
- ▹ *Force exercée par un ressort.*

Supposons pour l'ensemble de l'exercice que le mouvement est circulaire, en vue d'établir les conditions pour que ce soit bel et bien le cas (raisonnement de type analyse-synthèse, même s'il est beaucoup moins formalisé qu'en maths).

- ▹ **Système :** masse m ;
- ▹ **Référentiel galiléen :** terrestre ;
- ▹ **Repérage :** si le mouvement est circulaire il est forcément de rayon L (la masse est déjà sur la trajectoire à l'instant initial), donc

$$\overrightarrow{OM} = L\,\vec{e}_r \qquad \text{donc} \qquad \vec{v} = L\dot\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = L\ddot\theta\,\vec{e}_\theta - L\dot\theta^2\,\vec{e}_r$$

- ▹ **Bilan des forces :**
  - → poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$;
  - → réaction du support, normale car les frottements sont négligés : $\vec{R}_N = R_N\,\vec{e}_z$;
  - → force de rappel du ressort :

$$\vec{F} = -k(L-\ell_0)\,\vec{e}_r\,.$$

- ▹ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} -mL\dot\theta^2 = -k(L-\ell_0) \\ mL\ddot\theta = 0 \\ 0 = -mg + R_N \end{cases}$$

1 La projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ montre que $\ddot\theta = 0$ donc $\dot\theta = \text{cte}$, ce qui implique d'après l'expression de $\vec{v}$ que $||\vec{v}|| = \text{cte}$. Le mouvement est donc **uniforme**.

2 Posons $L\dot\theta = +v_0$ (ce qui revient à choisir le signe de $\dot\theta$ et donc le sens de parcours de la trajectoire), et ainsi $\dot\theta = v_0/L$. En réinjectant dans le PFD,

$$-m\frac{{v_0}^2}{L} = -k(L-\ell_0) \qquad \text{soit} \qquad {v_0}^2 = \frac{kL(L-\ell_0)}{m}$$

Comme ${v_0}^2$ doit être positif, alors **un mouvement circulaire n'est possible que si $L > \ell_0$**. Sachant que $\vec{v}$ doit être orthoradial, et en incluant les deux sens possibles de parcours du cercle, on en déduit la vitesse à donner initialement :

$$\boxed{\vec{v}_0 = \pm\sqrt{\frac{kL(L-\ell_0)}{m}}\,\vec{e}_\theta\,.}$$

> *La condition sur L peut peut se comprendre intuitivement en pensant « force centrifuge » (concept plus subtil et compliqué qu'il n'en a l'air, au programme de MP, mais que nous n'utilisons ici que qualitativement) : la force centrifuge tend à éloigner le point matériel du centre de la trajectoire. Pour qu'un mouvement circulaire soit possible, il faut que le ressort ait lui pour effet de ramener M vers le centre, ce qui n'est possible que si le ressort est étendu, donc $L > \ell_0$. Si le ressort est initialement comprimé, il éloigne M de O, et le mouvement ne peut pas être circulaire.*

Exercice 8 : Anneau sur une tige en rotation

2 | 2 |

- *Trajectoire non-circulaire ;*
- *Force de réaction d'un support ;*
- *Force exercée par un ressort.*

1 Le mouvement est à vitesse angulaire constante, donc

$$\vec{r} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\omega\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\vec{e}_r + 2\omega\,\dot{r}\,\vec{e}_\theta\,.$$

L'anneau est soumis à

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- la réaction de la tige $\vec{R} = R_\theta\,\vec{u}_\theta + R_z\,\vec{u}_z$ car aucun frottement.

D'après le PFD appliqué à l'anneau projeté sur $\vec{e}_r$,

$$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0\,.}$$

2 Le polynôme caractéristique admet comme racines $\pm\omega$, d'où

$$r(t) = A\,\mathrm{e}^{+\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

À l'instant initial,

$$\begin{cases} r(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} r_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + B \\ \dot{r}(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} \omega A - B\omega \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad A = B = \frac{r_0}{2}\,.$$

Ainsi,

$$r(t) = r_0\cosh(\omega t) \qquad \text{et} \qquad r(\theta) = r_0\cosh\theta\,.$$

La trajectoire est une spirale exponentielle.

3 Il faut ajouter au PFD la force de rappel du ressort, soit

$$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = -k(r - \ell_0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{r} + ({\omega_0}^2 - \omega^2)r = {\omega_0}^2\ell_0} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Si ${\omega_0}^2 - \omega^2 > 0$ l'équation est celle d'un oscillateur harmonique, et l'anneau oscille le long de la tige. Sinon il garde une trajectoire en spirale exponentielle divergente, la divergence étant simplement ralentie.

4 Le mouvement de l'anneau est périodique s'il repasse par son point de départ, autrement dit s'il fait un nombre entier d'oscillations en un nombre entier de tours. Il faut donc qu'il existe deux entiers N et N' tels que

$$N\frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \omega^2}} = N'\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{soit} \qquad {\omega_0}^2 = \left(1 + \frac{N^2}{N'^2}\right)\omega^2\,.$$

Exercice 9 : Enrouler le fil, dérouler le fil ... — 3 | 2

▹ *Trajectoire non-circulaire.*

1 La longueur de fil enroulée lorsque I se trouve à l'angle θ vaut $R\theta$. Ainsi,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\,\vec{e}_r + (L - R\theta)\,\vec{e}_\theta\,.$$

En dérivant terme à terme,

$$\vec{v} = R\,\dot{\vec{e}}_r + (-R\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + (L - R\theta)\,\dot{\vec{e}}_r = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + (-R\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + (L - R\theta)(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)$$

d'où

$$\boxed{\vec{v} = (R\theta - L)\dot{\theta}\,\vec{e}_r\,.}$$

Et de même,

$$\vec{a} = (R\dot{\theta})\dot{\theta}\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\ddot{\theta}\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_r$$

soit finalement

$$\boxed{\vec{a} = \left[R\dot{\theta}^2 + (R\theta - L)\ddot{\theta}\right]\,\vec{e}_r + (R\theta - L)\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\theta\,.}$$

2 M n'est soumis qu'à la tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_\theta$, dirigée de M vers I. D'après le PFD,

$$\begin{cases} mR\dot{\theta}^2 + m(R\theta - L)\ddot{\theta} = 0 \\ m(R\theta - L)\dot{\theta}^2 = -T \end{cases}$$

Sur la projection radiale on reconnaît, à la masse près, la dérivée de v_r, composante radiale de la vitesse (ce qui est évident compte tenu de la façon dont on a établi l'expression de l'accélération). Ainsi, par « intégration »,

$$(R\theta - L)\,\dot{\theta} = \text{cte}$$

En se plaçant à l'instant initial où $\vec{v} = -v_0\,\vec{e}_r$ pour déterminer la constante, on en déduit qu'à tout instant

$$\boxed{(R\theta - L)\,\dot{\theta} = -v_0\,.}$$

3 La relation précédente s'écrit

$$R\theta\dot{\theta} - L\dot{\theta} + v_0 = 0$$

soit en intégrant

$$\frac{1}{2}R\theta^2 - L\theta + v_0 t = \text{cte}\,.$$

Or à l'instant $t = 0$, $\theta = 0$, donc la constante est nulle. On en déduit la relation

$$\boxed{\frac{1}{2}R\theta^2 - L\theta + v_0 t = 0\,.}$$

Lorsque tout le fil est enroulé autour de la bobine, $t = \tau$ et $\theta = L/R$ d'où

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{R} - \frac{L^2}{R} + v_0\tau = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tau = \frac{L^2}{2Rv_0}\,.}$$

4 Cherchons la valeur de θ à t donné. La question précédente nous donne une équation polynômiale, de discriminant

$$\Delta = L^2 - 4 \times \frac{1}{2}R \times v_0 = L^2 - 2Rv_0 t = L^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) > 0$$

car on a nécessairement $t < \tau$. On a donc deux solutions mathématiques pour θ, la solution physique étant nécessairement positive,

$$\theta(t) = \frac{L + \sqrt{L^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}}{R} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)\,.}$$

$\boxed{5}$ La tension du fil est donnée par l'autre composante du PFD,

$$T = m(L - R\theta)\dot\theta^2 = \frac{m{v_0}^2}{L - R\theta}$$

d'où en remplaçant

$$T = \frac{m{v_0}^2}{L\sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}}$$

qui est toujours positif, ce qui indique que **le fil est toujours tendu**.

Exercice 10 : Glissade sur un igloo

3 | 3

▷ *Décollage d'un support.*

- ▷ **Système :** enfant esquimau ;
- ▷ **Référentiel galiléen :** terrestre ;
- ▷ **Repérage :** polaire, voir figure 3, et comme l'igloo est sphérique alors $r = R = \text{cte}$ donc

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r \qquad \text{donc} \qquad \vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta - R\dot\theta^2\,\vec{e}_r$$

- ▷ **Bilan des forces :**
  - → poids $\vec{P} = -m\,g\,\cos\theta\,\vec{e}_r + m\,g\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta$;
  - → réaction de l'igloo, uniquement normale car pas de frottement : $\vec{N} = N\,\vec{e}_r$.

> *Vérifiez systématiquement les projections en étudiant les cas limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.*

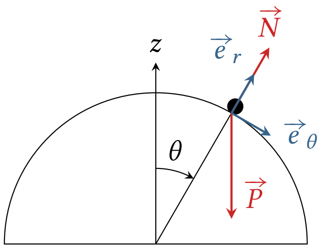


Figure 3 – Glissade d'un enfant esquimau.

$\boxed{1}$ ▷ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} -mR\dot\theta^2 = N - mg\cos\theta \\ mR\ddot\theta = mg\sin\theta \end{cases}$$

L'équation du mouvement est celle projetée sur $\vec{e}_\theta$,

$$\ddot\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0\,.$$

L'équation projetée sur $\vec{e}_r$ contient en effet une force inconnue N, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement … par contre elle permet de déterminer cette force.

2 En multipliant l'équation du mouvement par $\dot\theta$,

$$\ddot\theta\dot\theta - \frac{g}{R}\dot\theta\sin\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta\right) = 0\,.$$

La fonction dans la dérivée est donc une constante C, dont la valeur est fixée par les conditions initiales. Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse ($\dot\theta(0) = 0$), on a donc $C = g/R$ et ainsi

$$\boxed{\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = \frac{g}{R}\,.}$$

> *La fonction constante établie ici est appelée une* intégrale première du mouvement. *Physiquement, il s'agit de l'énergie mécanique de l'esquimau. Nous verrons d'ailleurs dans le prochain chapitre qu'il est bien plus efficace pour l'établir d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique plutôt que le PFD.*
>
> *La méthode pour passer d'une équation sur $\ddot\theta$ à une équation portant sur $\dot\theta^2$ est en fait assez classique. C'est la même méthode qui permet d'établir le théorème de l'énergie cinétique ou mécanique (c'est ce que l'on a fait ici sans le savoir !), et on retrouve des méthodes voisines pour démontrer les expressions des énergies potentielles mais aussi celles de l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine.*

3 L'enfant décolle de l'igloo si et seulement si la force N de réaction de l'igloo s'annule (le voir par la contraposée : tant qu'il y a contact, il y a forcément une force ... donc s'il n'y a plus de contact c'est qu'il n'y a plus de force). Commençons donc par la déterminer. En combinant le PFD en projection sur $\vec{e}_r$ et la question précédente, qui donne

$$\dot\theta^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

on en déduit

$$N = -2gm\,(1-\cos\theta) + mg\cos\theta \qquad \text{soit} \qquad N = mg(3\cos\theta - 2)$$

La force N s'anulle donc pour un angle de décollage θ_d tel que

$$3\cos\theta_\mathrm{d} - 2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta_\mathrm{d} = \arccos\frac{2}{3} = 48°\,.}$$

> *Une façon évidente de se rendre compte « qu'il se passe quelque chose » pour $\theta = \theta_d$ est de remarquer qu'au delà la norme de N deviendrait* négative *... ce qui n'a bien sûr aucun sens.*