Mouvements circulaires

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M3.1 - Schématiser la base de Frénet et donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération. Les démontrer, en commençant par établir l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniquement en fonction du rayon R de la trajectoire et de la composante v_θ du vecteur vitesse.

M3.2 - Établir l'équation du mouvement du pendule simple. La résoudre dans l'hypothèse des petites oscillations avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot\theta(0) = \Omega_0$.

Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

$\rightsquigarrow$ pour ce chapitre : 11.6

Exercice 1 : Musculation vectorielle — 1 | 1 |

- *Projections ;*
- *Dérivation de vecteurs.*

On considère une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z)$. On lui superpose la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\vec e_r, \vec e_\theta, \vec e_z)$ et on note θ l'angle orienté de $\vec e_x$ vers $\vec e_r$.

1 - Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l'angle θ.

2 - Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.

3 - En raisonnant sur des projections, exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique.

4 - En dérivant $||\vec e_r||^2 = \vec e_r \cdot \vec e_r$, montrer que le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\vec e_r}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire à $\vec e_r$.

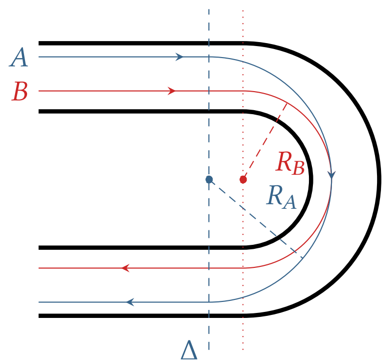
5 - Montrer par un calcul explicite de dérivée que $\dfrac{\mathrm{d}\vec e_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\vec e_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec e_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec e_r$.

Cinématique

Exercice 2 : Duel de F1

1 | 1 |

▹ *Vitesse et accélération sur une trajectoire circulaire.*



Lors des essais chronométrés d'un Grand Prix, Oscar Piastri et Max Verstappen arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

- Piastri suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;
- Verstappen choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

1 - Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Peut-on conclure ?

2 - Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses en sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieure à $0{,}8g$: au delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. Les calculer numériquement.

3 - Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

Exercice 3 : Parking hélicoïdal

1 | 2 |

▹ *Dérivation de vecteurs.*

L'architecture de nombreux parkings souterrains est telle que la rampe montante reste à distance constante de l'axe du parking. On suppose la rampe d'inclinaison constante, et on raisonne sur une voiture se déplaçant dans le parking à vitesse constante v_0. On travaille en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) ascendant. La rampe est de rayon R et on note H la hauteur séparant deux étages. La hauteur z à laquelle se trouve la voiture est reliée à l'angle θ parcouru depuis son entrée dans le parking par $z(\theta) = \alpha\theta$.

1 - Quelles sont les valeurs extrêmes prises par l'angle θ ? Déterminer α.

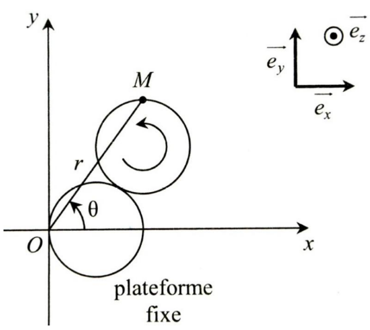
2 - Exprimer le vecteur vitesse de la voiture en fonction de $\dot{z}$, R et H. En déduire la durée Δt nécessaire pour qu'elle gravisse un étage.

3 - Déterminer le vecteur accélération de la voiture et analyser physiquement l'expression.

Exercice 4 : Manège

1 | 2

▹ *Dérivation de vecteurs.*



Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (Ox) ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.

Un enfant a pris place sur le manège, en un point M de la circonférence de la plateforme mobile. Il décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire $r = 2R(1 + \cos\theta)$. La vitesse angulaire Ω est maintenue constante : on a $\theta = \Omega t$ à partir de l'instant initial $t = 0$.

1 - Placer sur un schéma les quatre points de la trajectoire correspondant aux angles $\theta = 0$ (point A), $\theta = \pi/2$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = 3\pi/2$ (point D). En déduire l'allure de la trajectoire complète : cette courbe s'appelle une cardioïde. Représenter la base polaire au point D.

2 - Exprimer le vecteur vitesse dans la base polaire. Dessiner ce vecteur au point D. Calculer sa norme à un instant quelconque.

3 - En quel point l'enfant pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ? En quel point l'enfant risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?

4 - Exprimer le vecteur accélération dans la base polaire. Dessiner ce vecteur au point D. Calculer sa norme.

5 - Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point la sensation ressentie est-elle la plus forte ?

Dynamique

Exercice 5 : Le Rotor

1 | 1 |

- *Trajectoire circulaire ;*
- *Force de réaction d'un support.*

Le Rotor est une attraction présente dans de nombreuses fêtes foraines, dont la foire Saint-Romain de Rouen, qui se présente sous forme d'un cylindre de six mètres de diamètre et de cinq mètres de hauteur, tournant autour d'un axe vertical. Les passagers, placés à l'intérieur du cylindre, se trouvent ainsi plaqués contre les parois du manège avec une force égale à quatre fois leur poids. Une fois que le manège a atteint sa vitesse de croisière, le plancher commence à descendre : la plateforme servant de sol est séparée des parois et abaissée d'une distance de deux mètres. Les passagers se retrouvent donc collés aux murs, les pieds au dessus du vide, sans aucune mesure de sécurité.

Les lois de Coulomb du frottement solide impliquent qu'un passager reste plaqué à la paroi du cylindre tant que les normes des composantes normale R_N et tangentielle R_T de la force $\vec{R}$ de réaction de la paroi sur le passager sont telles que $R_T < \mu R_N$, où $\mu \simeq 0{,}4$ est le coefficient de frottement entre le tissu des vêtements et la paroi.

L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on ne s'intéresse qu'à la phase où le manège tourne à vitesse constante et la plateforme abaissée.

1 - Lister les forces subies par un passager et les représenter sur le schéma.

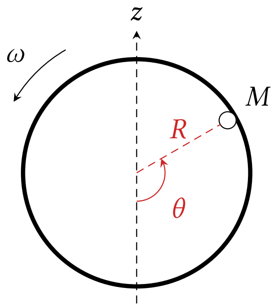
2 - Déterminer la vitesse de rotation minimale du manège pour que les passagers ne glissent pas le long de la paroi verticale.

3 - Déterminer la vitesse de rotation du manège lorsqu'il tourne à pleine vitesse … et vérifier qu'elle est suffisante.

4 - L'attraction est accessible à partir de huit ans. Est-ce parce que les enfants plus jeunes sont trop légers ?

Exercice 6 : Une chaussette dans un sèche-linge 1 | 1 |

- *Trajectoire circulaire ;*
- *Décollage d'un support.*



Le mouvement du linge dans un sèche-linge s'effectue par alternance successive de deux phases distinctes : d'abord, le linge est entraîné en rotation uniforme par le tambour, puis à une certaine position il se décolle du tambour et retombe. On cherche à déterminer le lieu de décollage d'une chaussette, assimilable à un point matériel M de masse m. Le tambour est un cylindre de rayon $R = 25\,\mathrm{cm}$ tournant à la vitesse angulaire $\omega = 50$ tours par minute.

1 - Exprimer l'accélération de la chaussette au cours de la première phase, lorsqu'elle est entraînée par le tambour.

2 - Déterminer la force de réaction $\vec{F}$ exercée par le tambour sur la chaussette.

3 - La chaussette décolle lorsque la composante normale de $\vec{F}$ s'annule. En déduire l'angle critique $\theta^\star$ correspondant et le calculer numériquement. Cet angle est-il le même pour la bille que mon fils a oublié de retirer de sa poche ?

Exercice 7 : Mouvement circulaire avec ressort 2 | 1 |

- *Trajectoire circulaire ;*
- *Force exercée par un ressort.*

Une masse m est placée sur un plan horizontal où elle glisse sans frottement. Elle est reliée par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 à un point O. À l'instant initial, $OM = L$ et la masse est lancée avec une vitesse $\vec{v}_0$. On cherche comment choisir $\vec{v}_0$ et L pour que le mouvement soit circulaire.

1 - Montrer que si le mouvement est circulaire alors il est également uniforme.

2 - En déduire une condition sur L et la valeur à donner à v_0 en fonction de L pour que le mouvement soit circulaire.

Exercice 8 : Anneau sur une tige en rotation 2 | 2 |

- *Trajectoire non-circulaire ;*
- *Force de réaction d'un support ;*
- *Force exercée par un ressort.*

Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan horizontal (Oxy).

À l'instant $t = 0$, l'anneau est abandonné sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O. On suppose qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t{=}0) = 0$.

1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

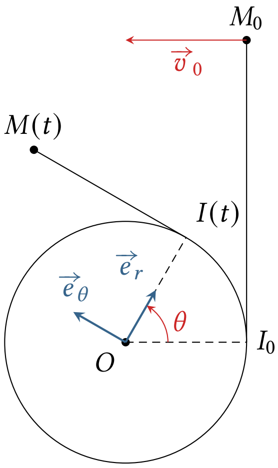
2 - Résoudre cette équation et tracer l'allure de $r(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ et la représenter.

3 - On suppose désormais que l'anneau est retenu par un ressort de raideur k fixé en O. Montrer que deux types de mouvement sont possibles selon la valeur de k.

4 - À quelle(s) condition(s) le mouvement de l'anneau dans le référentiel terrestre est-il périodique ?

Exercice 9 : Enrouler le fil, dérouler le fil ... 3 | 2

▹ *Trajectoire non-circulaire.*



Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pensanteur est négligé. Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine.

On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.

1 - Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base.

2 - Montrer que la vitesse de M est constante. La déterminer.

3 - En déduire une relation entre θ et t, puis déterminer la durée τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.

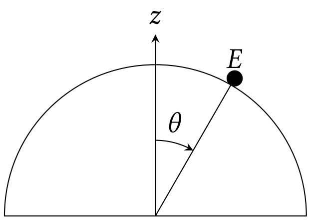
4 - Établir la loi horaire

$$\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right) .$$

5 - Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.

Exercice 10 : Glissade sur un igloo 3 | 3

▹ *Décollage d'un support.*



Un enfant esquimau de masse m glisse sans frottement sur le toit d'un igloo de rayon R d'où il s'élance sans vitesse initiale.

1 - Établir l'équation du mouvement permettant de déterminer $\theta(t)$.

2 - En déduire que $\dfrac{\dot{\theta}^2}{2} + \dfrac{g}{R}\cos\theta = \dfrac{g}{R}$.

3 - L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Indication pour la question 2 : multiplier par $\dot{\theta}$.