

Mouvement conservatif à un degré de liberté

Autour des positions d'équilibre

Exercice 1 : Train à sustentation magnétique



► Stabilité d'une position d'équilibre.

1 En raisonnant sur les unités de base,

$$[\alpha] = \text{J} \times \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} \quad \text{d'où} \quad [\alpha] = \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 L'axe z est orienté vers le bas donc l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit sous la forme $E_{pp} = -mgz$. On en déduit l'énergie potentielle totale

$$E_p(z) = -mgz - \frac{\alpha}{z}.$$

On en déduit le tracé de la figure 5, qui fait apparaître un maximum, c'est-à-dire une position d'équilibre instable.

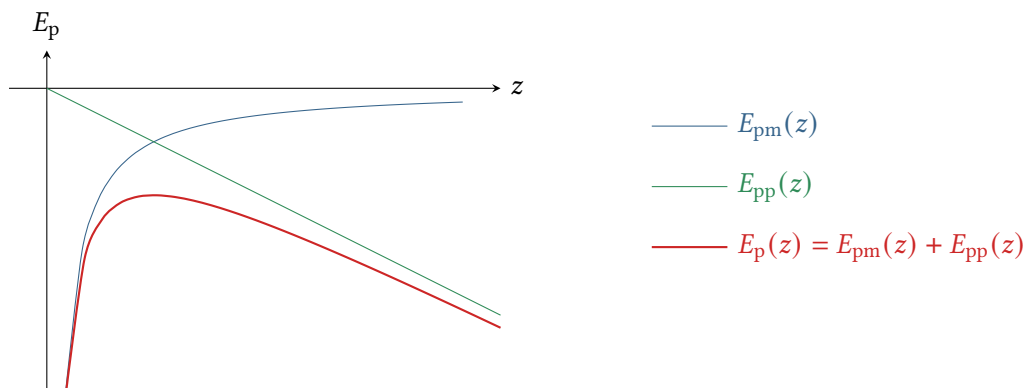


Figure 1 – Profil d'énergie potentielle.

3 La dérivée première s'écrit

$$\frac{dE_p}{dz} = -mg + \frac{\alpha}{z^2}$$

qui s'annule en z_{eq} tel que

$$z_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{\alpha}{mg}} = 1 \text{ cm}.$$

La stabilité est donnée par la dérivée seconde

$$\frac{d^2E_{p,\text{tot}}}{dz^2} = -\frac{2\alpha}{z^3} < 0.$$

L'annulation de la dérivée correspond donc à un maximum, ce qui confirme le caractère instable de la position d'équilibre.

4 Si le système était vraiment tel qu'il est décrit, la moindre perturbation venant écarter la rame de sa position d'équilibre l'en éloignerait indéfiniment. Pour le rendre utilisable, il faut y ajouter un **asservissement** : un capteur mesure l'écart du système par rapport à la position d'équilibre, et adapte l'alimentation de l'électroaimant (donc le champ magnétique!) en conséquence pour l'y ramener.

Exercice 2 : Barrière de potentiel polynômiale



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Petites oscillations au voisinage d'un équilibre stable ;
- Barrière de potentiel.

1 Étudions les variations de l'énergie potentielle,

$$\frac{dE_p}{dx} = m\omega^2 \left(\frac{4x^3}{a^2} - 2x \right) = 2m\omega^2 x \left(\frac{2x^2}{a^2} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} = m\omega^2 \left(\frac{12x^2}{a^2} - 2 \right)$$

L'énergie potentielle est maximale en $x = 0$ (dérivée seconde négative) et minimale en $x = \pm a/\sqrt{2}$ (dérivée seconde positive), ce qui correspond à une position d'équilibre instable et deux positions d'équilibre stables. Le profil d'énergie potentielle est représenté figure 5.

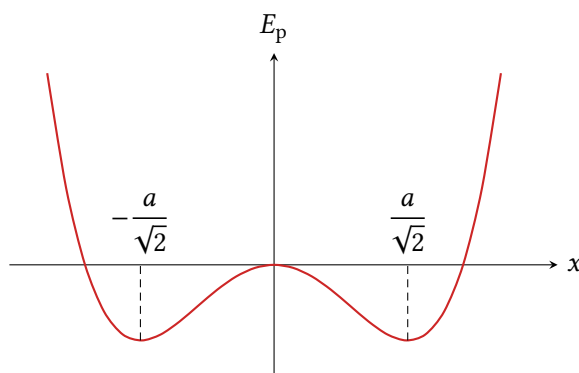


Figure 2 – Profil d'énergie potentielle.

2 Le développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre stable s'écrit

$$E_p(x) = E_p(x=x_s) + \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x=x_s)}_{=0} (x - x_s) + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x=x_s) (x - x_s)^2$$

ce qui devient pour $x_s = \pm a/\sqrt{2}$

$$E_p(x) = -\frac{1}{4}m\omega^2 a^2 + \frac{1}{2} \underbrace{4m\omega^2}_{=k} (x - x_s)^2.$$

On reconnaît l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur $k = 4m\omega^2$ et de longueur à vide x_s , auquel serait liée la masse m . La pulsation des oscillations harmoniques de ce système masse-ressort est alors

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4m\omega^2}{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = 2\omega.}$$

3 La masse doit avoir une énergie mécanique suffisante pour franchir la barrière de potentiel, dont le sommet en $x = 0$ se trouve à une énergie potentielle nulle. Il faut donc avoir

$$E_m > E_p(x=0) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 > 0$$

ce qui donne

$$v_0 > \frac{a\omega}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 3 : Pendule rigide



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Petites oscillations au voisinage d'un équilibre stable.

1 Le système est soumis à l'énergie potentielle de pesanteur.

$$E_{pp} = -mgy = -mgL \cos \theta.$$

2 • Positions d'équilibre :

$$\frac{dE_{pp}}{d\theta} = mgL \sin \theta,$$

qui s'annule en $\theta = 0$ (position d'équilibre « naturelle ») et $\theta = \pi$ (pendule à l'envers).

• Stabilité :

$$\frac{d^2E_{pp}}{d\theta^2} = mgL \cos \theta,$$

qui est positif pour $\theta = 0$ et négatif pour $\theta = \pi$. Ainsi, la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable alors que $\theta = \pi$ est instable.

Ces conclusions **ne peuvent pas se généraliser sans précaution** au pendule simple, car il faudrait y inclure comme condition supplémentaire que le fil doit rester constamment tendu. La position d'équilibre stable ne pose pas de difficulté, en revanche la position d'équilibre instable n'a pas de sens car si on y laisse le pendule simple immobile ... il tombe tout droit sous l'effet de son poids.

3 Exprimons l'énergie potentielle par un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre stable $\theta = 0$. En utilisant le DL à l'ordre 2 de la fonction cosinus,

$$E_{pp}(\theta) = -mgL \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right).$$

Bien sûr, ce résultat peut aussi s'établir avec la formule de Taylor ... mais c'est inutilement compliqué :

$$E_{pp}(\theta) = E_{pp}(\theta=0) + \frac{dE_{pp}}{d\theta}(\theta=0) \theta + \frac{1}{2} \frac{d^2E_{pp}}{d\theta^2}(\theta=0) \theta^2 = -mgL + 0 + \frac{1}{2} mgL \theta^2$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Ce n'est pas l'expression générale des dérivées en θ quelconque qui intervient dans la formule de Taylor, mais leur expression **évaluée en $\theta = 0$** . Ainsi, pas de $\cos \theta$ ni de $\sin \theta$ dans un DL.

Rappelons aussi que l'usage en physique est d'indiquer l'ordre du développement limité par une phrase, mais de ne pas écrire le 0 comme en mathématiques.

Pour identifier la constante de raideur du ressort équivalent, il faut faire apparaître $x = L \sin \theta = L\theta$ dans l'expression de l'énergie potentielle,

$$E_{pp}(x) = -mgL + \frac{1}{2} \frac{mg}{L} x^2$$

ce qui est bien de la forme d'une énergie potentielle élastique à condition de poser

$$k = \frac{mg}{L}.$$

Une énergie potentielle étant définie à une constante additive près, le terme $-mgL$ est sans effet sur l'analogie.

Exercice 4 : Équilibre sur un anneau



► Stabilité d'une position d'équilibre.

- **Énergie potentielle** : Déterminons l'énergie potentielle du point M , somme de l'énergie potentielle élastique du ressort et de l'énergie potentielle de pesanteur. L'énoncé indique que son allongement est égal à la longueur JM . D'après le théorème de Pythagore,

$$JM^2 = (R + R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 = 2R^2(1 + \cos \theta).$$

L'énergie potentielle vaut donc

$$E_p(\theta) = mgR \sin \theta + kR^2(1 + \cos \theta).$$

- **Positions d'équilibre** : Déterminons les positions d'équilibre par étude de la dérivée.

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR \cos \theta - kR^2 \sin \theta$$

qui s'annule en θ_{eq} tel que

$$\tan \theta_{\text{eq}} = \frac{mg}{kR}.$$

La fonction $\tan$ étant π -périodique, il y a donc **deux** positions d'équilibre : une première θ_1 , dont le cosinus et le sinus sont tous les deux positifs, et une seconde $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ pour laquelle ils sont tous les deux négatifs. Ainsi,

$$\theta_1 = \arctan \frac{mg}{kR} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \arctan \frac{mg}{kR} + \pi.$$

Ces deux positions sont symétriques par rapport à O comme indiqué figure 3.

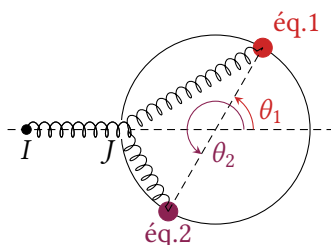


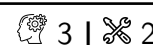
Figure 3 – Deux positions d'équilibre.

- **Stabilité** : Analysons enfin leur stabilité par l'étude de la dérivée seconde,

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -mgR \sin \theta - kR^2 \cos \theta.$$

Pas besoin de se lancer dans des gros calculs à base de $\sin(\arctan(\dots))$ pour conclure ! Compte tenu des signes du sinus et du cosinus discutés précédemment, on en déduit que la dérivée seconde est négative en θ_1 , qui est donc instable, et positive en θ_2 , qui est donc stable.

Exercice 5 : Chandelle



► Barrière de potentiel.

L'énoncé demande une vitesse *minimale*, on fait donc l'hypothèse que tous les frottements sont négligeables pour obtenir une valeur seuil, étant entendu que les frottements imposeraient de dépasser cette vitesse seuil.

Comme le ballon ne reste pas au voisinage de la surface de la Terre, la force exercée par la Terre sur le ballon doit être modélisée par la force gravitationnelle et non pas par le poids, qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle

$$E_{p,g}(r) = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$$

où m désigne la masse du ballon et r la distance au centre de la Terre.

Que le ballon sorte du champ gravitationnel terrestre signifie qu'il peut s'éloigner à une distance infinie de la Terre. Or $E_{p,g}$ est toujours négative et tend vers 0 à l'infini : il faut donc que le ballon ait initialement une énergie mécanique strictement positive. À l'instant initial, le ballon est à la surface de la Terre ($r = R$) avec une vitesse v_0 , soit

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G} \frac{mM}{R}.$$

On en conclut que le ballon peut échapper au champ d'attraction terrestre si

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse porte le nom de vitesse de libération ou seconde vitesse cosmique. Il est remarquable qu'elle ne dépende pas de la masse de l'objet en mouvement. Nous la retrouverons dans le cours sur la gravitation.

Exercice 6 : Pendule attiré par un aimant

oral X MP | 3 | 3



► Problème ouvert.

Il est bien question de position d'équilibre dans cet exercice ... mais contrairement aux apparences, nul besoin de l'énergie pour le résoudre : une approche par le PFD suffit.

Au vu des valeurs annoncées, on se place dans l'hypothèse des petits angles et on suppose que le mouvement des deux aimants est horizontal le long d'un axe ($O'x$) dont l'origine se trouve sur l'axe. On pose

$$x = O'A \quad \text{et} \quad X = O'B.$$

Orientons l'axe (Oz) vers le haut.

On raisonne sur l'aimant A , soumis à son poids, la tension du fil et la force d'interaction avec B . La condition d'équilibre s'écrit

$$-T \sin \theta \vec{e}_x + T \cos \theta \vec{e}_z - mg \vec{e}_z + \frac{K}{(X-x)^n} \vec{e}_x = \vec{0}$$

d'où on déduit en projection sur l'axe horizontal et au premier ordre en θ

$$-mg \frac{x}{L} + \frac{K}{(X-x)^n} = 0.$$

La question est celle de l'existence d'une position d'équilibre « intermédiaire » (c'est-à-dire telle que $0 < x < X$) à X fixé, ou autrement dit de l'existence de solutions à l'équation précédente en fonction de X . En posant $f(x) = x(X-x)^n$, on peut la réécrire sous la forme

$$f(x) = \frac{KL}{mg}.$$

Pour y voir clair, représentons figure 4 la fonction f dans quelques cas intéressants.

On constate que selon les situations il peut y avoir deux, une seule ou aucune position d'équilibre intermédiaire. L'instant auquel l'aimant A se colle brutalement sur l'aimant B est celui auquel X est tel que la position d'équilibre disparaît, c'est-à-dire le cas correspondant à la courbe bleue. Dans cette situation, la position d'équilibre limite s'identifie avec le maximum de la courbe. Raisonner sur la dérivée va beaucoup faciliter les calculs :

$$f'(x) = (X-x)^n - nx(X-x)^{n-1} = (X-x)^{n-1}(X-x-nx).$$

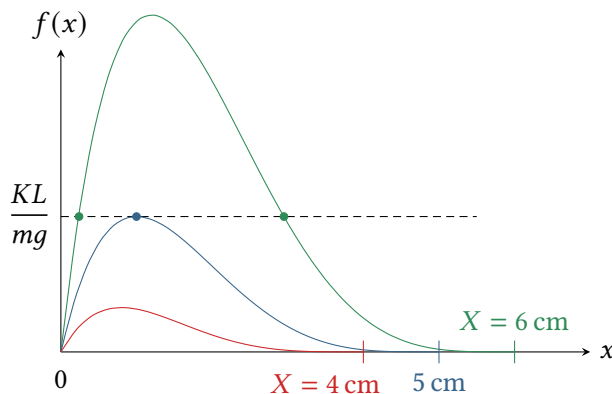


Figure 4 – Allures possibles de la fonction f . La valeur maximale atteinte par f dépend de la valeur de X . La courbe verte fait apparaître deux positions d'équilibre, la courbe bleue une seule et la rouge aucune.

La dérivée s'annule donc en 0 et en $x = X/(1+n)$. En raisonnant sur l'ultime position d'équilibre avant que les deux aimants ne se collent, on trouve

$$d_{\text{lim}} = \frac{d_{\text{lim}} + AB_{\text{lim}}}{1+n} \quad \text{d'où} \quad \boxed{n=4.}$$

Résolution numérique d'une équation différentielle

Exercice 7 : Schéma d'Euler appliqué au pendule simple



► Méthode d'Euler pour une équation différentielle d'ordre 2.

1 L'astuce consiste à traiter la dérivée première $\omega = \dot{\theta}$ comme une fonction inconnue. Le système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\Omega_0^2 \sin \theta \end{cases}$$

Le schéma d'Euler avec un pas de temps Δt appliqué à ce système donne

$$\begin{cases} \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} = \omega_n \\ \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} = -\Omega_0^2 \sin \theta_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t \omega_n \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \Delta t \Omega_0^2 \sin \theta_n \end{cases}$$

2 Un temps caractéristique du mouvement est donné par $1/\Omega_0$, de l'ordre de la période d'oscillation, qui doit être très supérieur au pas de temps. On peut par exemple choisir

$$\Delta t = \frac{1}{500\Omega_0}.$$

3 **4** Voir code en fin de corrigé.

5 Il s'agit l'énergie mécanique : en développant l'expression donnée

$$E = mg \underbrace{\ell(1 - \cos \theta)}_{=z} + \frac{1}{2} m \underbrace{\ell^2 \dot{\theta}^2}_{=v^2}.$$

Il n'y a aucune dissipation prise en compte dans le modèle, E est donc normalement constante au cours du mouvement. Pourtant, on constate que l'énergie E calculée à partir du schéma d'Euler augmente progressivement au cours, ce qui n'a pas de sens physique ... mais explique la divergence : tout se passe comme si on apportait de l'énergie au pendule au cours du temps.

Ce problème est intrinsèque au schéma d'Euler explicite, et ne peut être résolu qu'en passant à un schéma numérique plus élaboré, c'est-à-dire en améliorant le « protocole » permettant de transformer l'équation différentielle en relation de récurrence. Respecter la conservation de l'énergie mécanique est d'ailleurs l'objectif principal de certains schémas numériques, le plus connu étant sans doute le schéma de Verlet.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt

4 g = 9.81
5 L = .2

7 w0 = np.sqrt(g/L)
8 T0 = 2 * np.pi / w0
9 dt = 1/(500*w0)

11 t_max = 100*T0

13 t = np.arange(0,t_max,dt)      # N points entre 0 et t_max par pas dt
14 theta = np.empty_like(t)
15 omega = np.empty_like(t)

17 theta[0] = 45 * np.pi/180
18 omega[0] = 0

20 for n in range(len(t)-1):
21     theta[n+1] = theta[n] + dt * omega[n]
22     omega[n+1] = omega[n] - dt * w0**2 * np.sin(theta[n])

24 plt.figure()
25 plt.plot(t,theta)
26 plt.xlabel(r'$t$ (s)')
27 plt.ylabel(r'$\theta$ (rad)')
28 plt.xlim(np.min(t),np.max(t))

31 E = w0**2 * (1-np.cos(theta)) + .5*omega**2 # numpy calcule terme à
    terme !

33 plt.figure()
34 plt.plot(t,E)
35 plt.xlabel(r'$t$ (s)')
36 plt.ylabel(r'$E/mL^2$ (s^{-2})')
37 plt.xlim(np.min(t),np.max(t))

```

Exercice 8 : Oscillateur de Landau

2 | 3



- Stabilité d'une position d'équilibre ;
- Adimensionnalisation d'une équation différentielle ;
- Résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2.

1 L'anneau est soumis à la force de rappel du ressort, conservative ; à son poids, conservatif également ; et à la force de réaction de la tige, orthogonale à la tige et donc qui ne travaille pas car les frottements sont négligés. Son énergie mécanique est donc constante.

Comme l'anneau se déplace sur une ligne horizontale, son énergie potentielle de pesanteur est constante. Ainsi, la seule contribution à l'énergie potentielle est d'origine élastique,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k (AM - \ell_0)^2.$$

La longueur AM s'exprime à partir du théorème de Pythagore,

$$AM^2 = a^2 + x^2 \quad \text{d'où} \quad E_p(x) = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0 \right)^2.$$

2.a En factorisant dans l'expression de l'énergie potentielle,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}ka^2 \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{\ell_0}{a} \right)^2$$

ce qui conduit naturellement à identifier

$$E_p^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + u^2} - b \right)^2.$$

2.b • **Positions d'équilibre** : La dérivée de l'énergie potentielle adimensionnée s'écrit

$$\frac{dE_p^*}{du} = u \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1 + u^2}} \right).$$

Elle s'annule toujours en $u_0 = 0$, qui correspond à une première position d'équilibre, et si $b > 1$ il y a également annulation en $u_{\pm}$ tels que

$$\sqrt{1 + u_{\pm}^2} = b \quad \text{soit} \quad u_{\pm} = \pm \sqrt{b^2 - 1},$$

ce qui donne dans ce cas deux positions d'équilibre supplémentaires.

Expliquons qualitativement pourquoi certaines courbes font apparaître deux minima et d'autre un seul. Si $a < \ell_0$, alors deux positions de M , symétriques par rapport à O sont telles que $AM = \ell_0$. Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle. Au contraire, si $a > \ell_0$, le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle.

- **Stabilité de la position d'équilibre $u_0 = 0$** : on constate que dE_p^*/du change de signe en $u_0 = 0$.
 ▶ Si $b < 1$, la dérivée passe de négative à positive et u_0 est un minimum de E_p^* (faites un schéma pour vous en convaincre si besoin), la position d'équilibre u_0 est donc stable dans ce cas.
 ▶ Réciproquement, si $b > 1$, alors la dérivée passe de positive à négative, la position u_0 correspond donc à un maximum d'énergie potentielle c'est-à-dire une position d'équilibre instable.
- **Stabilité des positions d'équilibre $u_{\pm}$** : raisonnons pour $u_+ = +\sqrt{b^2 - 1} > 0$, le cas négatif étant analogue par parité de E_p . Par croissance de $u \mapsto \sqrt{1 + u^2}$, on comprend que dE_p^*/du passe de négative à positive en $u = u_+$. Lorsqu'elles existent, les positions $u_{\pm}$ sont donc toujours stables.

2.c Compte tenu de l'étude précédente, et puisque $E_p^* \rightarrow +\infty$ pour $u \rightarrow \pm\infty$, on en déduit l'allure de la figure 5.

3.a Cherchons τ sous la forme

$$\tau = \varepsilon^{\alpha} a^{\beta} m^{\gamma}.$$

Raisonnons avec les dimensions de base du système international. Une énergie ayant pour dimension ML^2T^{-2} (penser à l'énergie cinétique), l'équation aux dimensions associée à l'expression de τ s'écrit

$$T = M^{2\alpha} L^{2\alpha} T^{-2\alpha} \times L^{\beta} \times M^{\gamma}$$

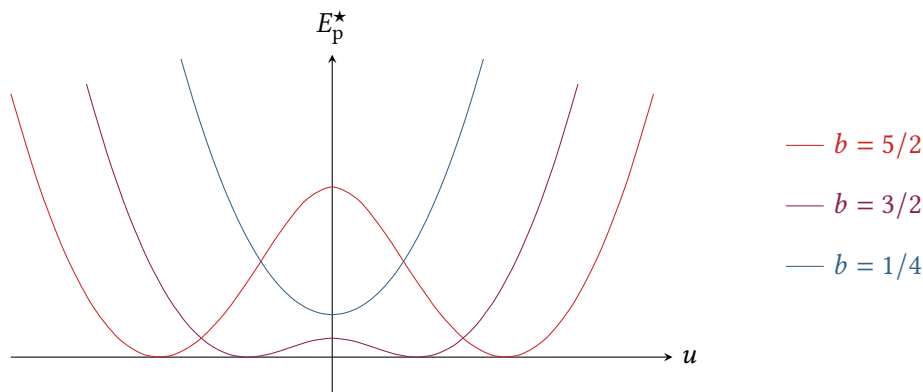


Figure 5 – Profil d'énergie potentielle.

ce qui se résout en $\alpha = -1/2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1/2$ d'où on déduit

$$\tau = a \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}.$$

En reprenant l'expression de ε , on trouve $\tau = \sqrt{m/k}$: c'est l'inverse de la pulsation propre d'oscillation du système masse-ressort pour lequel le mouvement ne serait pas contraint.

3.b Par définition,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{\tau} \frac{du}{dt^*} \quad \text{donc} \quad E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \frac{a^2}{\tau^2} \dot{u}^2$$

En reprenant l'expression de τ ,

$$E_c = \frac{1}{2} m a^2 \frac{\varepsilon}{a^2 m} \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \dot{u}^2 \quad \text{soit} \quad E_c^* = \frac{1}{2} \dot{u}^2$$

L'énergie mécanique adimensionnée vaut donc

$$E_m^* = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+u^2} - b \right)^2.$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique,

$$\frac{dE_m^*}{dt^*} = 0 = \dot{u}\ddot{u} + \dot{u}u \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

et comme $\dot{u}$ ne peut pas être nul à tout instant dès qu'il y a mouvement, on en déduit

$$\ddot{u} + u \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) = 0.$$

3.c L'astuce est classique et permet d'écrire l'équation différentielle du deuxième ordre sous la forme du système

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+u^2}} \right) \end{cases}$$

3.d La fonction f doit s'écrire

```
1 def f(y,t):
2     u, v = y
3     dudt = v
4     dvdt = - u * (1 - b/np.sqrt(1+u**2))
5     return [dudt, dvdt]
```

Attention, même si le temps n'apparaît pas explicitement dans le système différentiel, il doit apparaître comme argument de la fonction d'évolution f .

4 • **Courbe verte** : les oscillations sont symétriques par rapport à la position $x = 0$ et semblent approximativement sinusoïdales. On peut penser que cette courbe correspond à un cas où $b < 1$, c'est-à-dire que seule la position d'équilibre $u_0 = 0$ existe et est stable.

• **Courbe bleue** : les oscillations sont de nouveau symétriques par rapport à la position $x = 0$, mais plus du tout sinusoïdales. La courbe s'aplatit au voisinage de $u = 0$, ce qui veut dire que la vitesse et donc l'énergie cinétique diminuent : il y a une barrière de potentiel à franchir. Ainsi, cette courbe correspond à une situation où $b > 1$ et $E_m^* > E_p^*(u=0)$ puisque la barrière est franchie.

• **Courbe orange** : les oscillations ne sont plus symétriques par rapport à $u = 0$, l'évolution est limitée au voisinage d'une position d'équilibre u_- stable mais décentrée. Ainsi, cette courbe correspond à une situation où $b > 1$ et $E_m^* < E_p^*(u=0)$ puisque la barrière de potentiel n'est jamais franchie.