Instruments d'optique

L'œil

Exercice 2 : Pouvoir séparateur de l'œil 1 | 1

▹ *Modèle de l'œil.*

1 On a

$$\theta_{\text{min}} = 3 \cdot 10^{-4} \times \frac{180}{\pi} = 1{,}7 \cdot 10^{-2\circ} = 1'$$

2 La distance limite D_{lim} est celle pour laquelle l'écart angulaire entre les deux traits séparés de $a = 2\,\text{mm}$ vaut θ_{min}. La figure ci-dessous permet de voir que

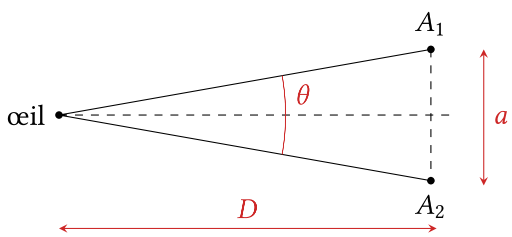
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2D}$$

d'où dans l'approximation des petits angles

$$\theta = \frac{a}{D}$$

et enfin

$$\boxed{D_{\text{lim}} = \frac{a}{\theta_{\text{min}}} = 6{,}7\,\text{m}\,.}$$



3 Il s'agit simplement d'inverser le raisonnement précédent en connaissant cette fois $D_{\text{lim}} = 250\,\text{m}$ et cherchant a_{min}, ce qui donne

$$\boxed{a_{\text{min}} = D_{\text{lim}}\,\theta_{\text{min}} = 7{,}5\,\text{cm}\,.}$$

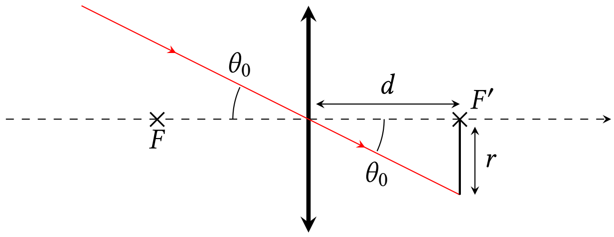
La lettre entière a une hauteur normalisée de 30 cm.

4 On renverse à nouveau la relation, pour avoir

$$\theta'_{\text{min}} = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{3}} = 5 \cdot 10^{-5}\,\text{rad}\,.$$

5 Deux points objet ne seront distingués par l'œil que si leur image se forme sur deux récepteurs de la rétine. Considérons ces deux points issus d'un même objet situé à l'infini optique, pour lequel la focale du cristallin est égale à la distance $d = 20\,\text{mm}$ entre le cristallin et la rétine. On les suppose de plus séparés angulairement de θ_{min}. Dans ce cas, la taille de l'image correspond à la taille caractéristique r d'un récepteur de la rétine, soit

$$\boxed{r = d\,\theta_{\text{min}} \simeq 6\,\mu\text{m}\,.}$$



Instruments à plusieurs lentilles

Exercice 3 : Microscope optique

écrit banque PT 2017 | 1 | 2

- *Instrument d'optique ;*
- *Relations de conjugaison ;*
- *Construction de rayons.*

1 Les rayons doivent être **proches de l'axe optique** et **peu inclinés** par rapport à l'axe optique.

2

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2O2}$$

soit

$$\overline{F_1'F_2} = \overline{O_1O_2} - \overline{O_1F_1'} - \overline{F_2O2}$$

d'où

$$\boxed{\Delta = D_0 - f_1' - f_2' = 100\,\text{mm}\,.}$$

3 Si l'image intermédiaire se forme dans le plan focal objet de l'oculaire, alors l'image finale se forme à l'infini. Cela permet à un œil de l'**observer sans accomoder**, donc sans fatigue visuelle.

4 L'image intermédiaire est sur F_2, donc $\overline{O_1A'} = \overline{O_1F_2} = f_1' + \Delta$ et $\overline{O_1A} = -d$. D'après la relation de conjugaison

$$\frac{1}{f_1' + \Delta} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1'} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_1' + \Delta} = \frac{\Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)}$$

et finalement

$$\boxed{d = \frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta} = 5{,}25\,\text{mm}\,.}$$

5 D'après la relation de grandissement,

$$\gamma_1 = \frac{f_1' + \Delta}{-d} = -\frac{(f_1' + \Delta) \times \Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'} = -20\,.}$$

6 Voir figure 1. L'image finale est notée A_sB_s.

7 Notons $h = AB$ la hauteur de l'objet. En raisonnant sur la figure 2 dans l'approximation des petits angles, on constate que

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{h}{D}\,.$$

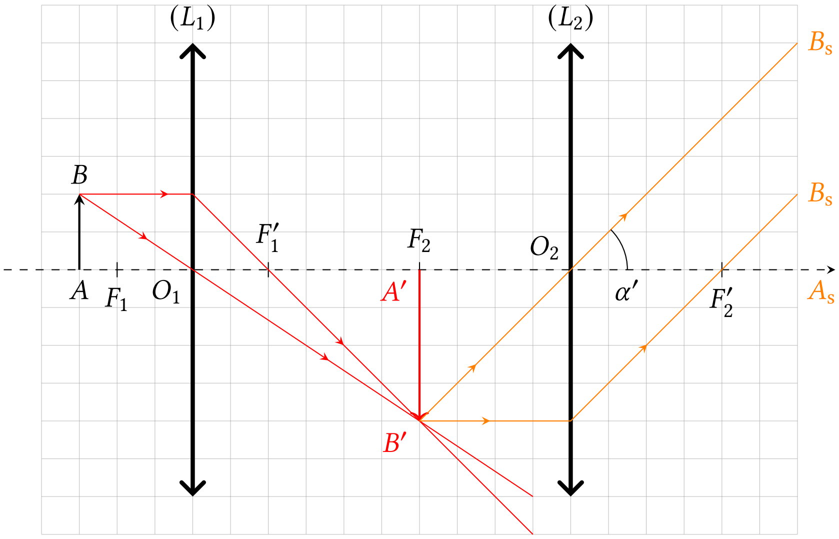


Figure 1 – Schéma du microscope.

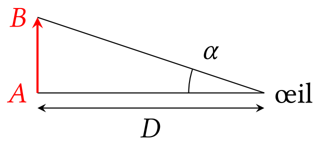


Figure 2 – Définition de l'angle α.

En raisonnant cette fois sur la figure 1, on constate que

$$\alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{\left|\overline{A'B'}\right|}{f'_2} = \frac{\left|\gamma_1\,\overline{AB}\right|}{f'_2} = \frac{|\gamma_1|\,h}{f'_2}\,.$$

En combinant ces deux expressions,

$$G = \frac{|\gamma_1|\,h}{f'_2} \times \frac{D}{h} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{G = -\frac{\gamma_1\,D}{f'_2} = 333\,.}$$

Exercice 4 : Tripleur de focale de Barlow — oral banque PT | 2 | 2

- *Association de lentilles ;*
- *Lentille divergente.*

$\boxed{1}$ La distance minimale entre la Terre et Jupiter est $D_{\min} = R_J - R_T = 6{,}3\cdot 10^8\,\text{km}$. En utilisant directement l'approximation des petits angles, on déduit de la figure 3

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{D_J}{D_{\min}} = 2{,}2\cdot 10^{-4}\,\text{rad} = 1{,}3\cdot 10^{-2\circ}\,.}$$

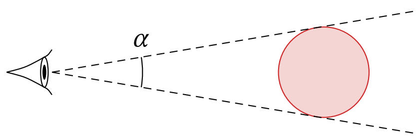


Figure 3 – Diamètre apparent de Jupiter.

$\boxed{2}$ Jupiter étant située à l'infini, son image par L_1 se forme dans le plan focal image. C'est donc là qu'il faut placer le capteur, à une distance $D_c = f'_1 = 2550\,\text{mm}$ de L_1. Comme Jupiter est vue sous un angle $\alpha_0 \ll 1$, alors l'image de

Jupiter a pour diamètre

$$\boxed{d = f_1' \, \alpha_0 = \frac{D_J f_1'}{D_{\min}} = 0{,}56\,\text{mm}\,.}$$

3 Voir figure 4.

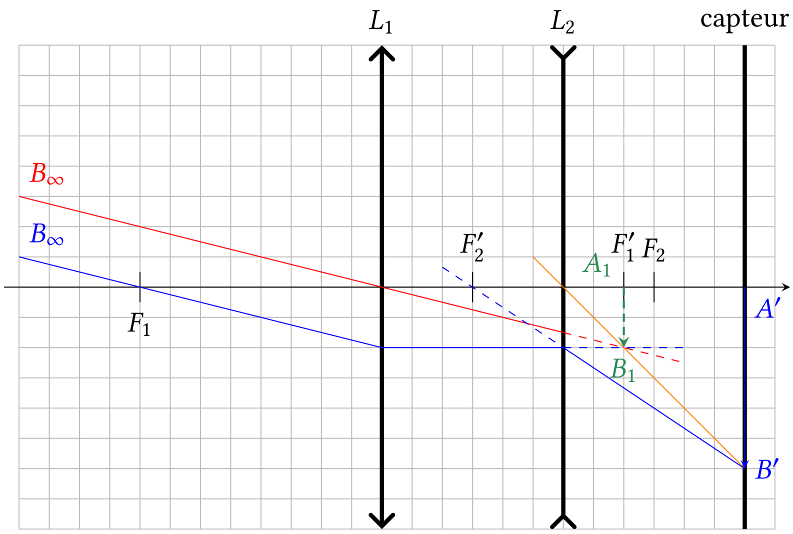


Figure 4 – Marche des rayons dans l'instrument.

4 L'objet pour L_2 est l'image de Jupiter par L_1. On sait qu'elle se trouve dans le plan focal image de L_1. Ainsi, en notant O_c le centre du capteur où se trouve l'image finale, la relation de grandissement donne

$$\frac{\overline{O_2O_c}}{\overline{O_2F_1'}} = 3 \qquad \text{donc} \qquad \overline{O_2F_1'} = \frac{1}{3}\overline{O_2O_c} \qquad \text{soit} \qquad \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} = \frac{1}{3}\overline{O_2O_c}$$

Remplaçons les distances algébriques par les paramètres géométriques de la lunette, avec D_{12} la distance entre les centres optiques des deux lentilles,

$$-D_{12} + f_1' = \frac{d}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{D_{12} = f_1' - \frac{d}{3} = 2483\,\text{mm}\,.}$$

La relation conjugaison de Descartes appliquée à L_2 donne ensuite

$$\frac{1}{\overline{O_2O_c}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{\overline{O_2O_c}} - \frac{3}{\overline{O_2O_c}} = \frac{1}{f_2'}$$

d'où

$$\boxed{f_2' = -\frac{d}{2} = -100\,\text{mm}\,.}$$

> *La lentille est divergente, il est donc normal de trouver $f_2' < 0$.*

5 Comme démontré précédemment, la taille de l'image sur le capteur sans oculaire est directement proportionnelle à la distance focale image de l'objectif L_1. L'oculaire de Barlow permet d'obtenir une image trois fois plus grande sur le capteur, ce qui nécessiterait de tripler la focale de la lentille objectif si on voulait l'utiliser seule. L'intérêt de l'oculaire est bien sûr un encombrement bien moindre.

Exercice 5 : Lunette de Galilée

2 | 2 |

- *Association de lentilles ;*
- *Lentille divergente ;*
- *Modèle de l'œil.*

1 La lunette de Galilée sert à observer des objets éloignés, que l'on peut considérer comme étant à l'infini. Elle est destinée à une observation à l'œil : pour que l'œil ne fatigue pas, il ne doit pas accomoder, et donc l'image finale par la lunette de Galilée doit se trouver à l'infini. Finalement, la lunette de Galilée forme une image à l'infini d'un objet à l'infi : c'est bien la définition d'un instrument afocal.

Comme l'objet est à l'infini, l'image intermédiaire se trouve dans le plan focal image de L_1. Pour que l'image finale soit également à l'infini, elle doit se trouver dans le plan focal objet de L_2. On en déduit donc que **le plan focal image de l'objectif doit coïncider avec le plan focal objet de l'oculaire.**

2 Voir figure 5. On construit l'image intermédiaire à partir des deux rayons rouges parallèles issus de B : celui qui passe par F_1 et celui qui passe par O_1. Comme ils ne se coupent pas entre L_1 et L_2, c'est leur prolongement virtuel au delà de L_2 qui donne B_0. On contruit ensuite l'image finale à partir des deux rayons oranges passant par B_0 : celui passant par O_2 et celui qui arrive sur L_2 parallèlement à l'axe optique, et qui ressort donc tel que son prolongement passe par F_2'. Remarquons que ce dernier rayon est aussi celui qui passe par F_1.

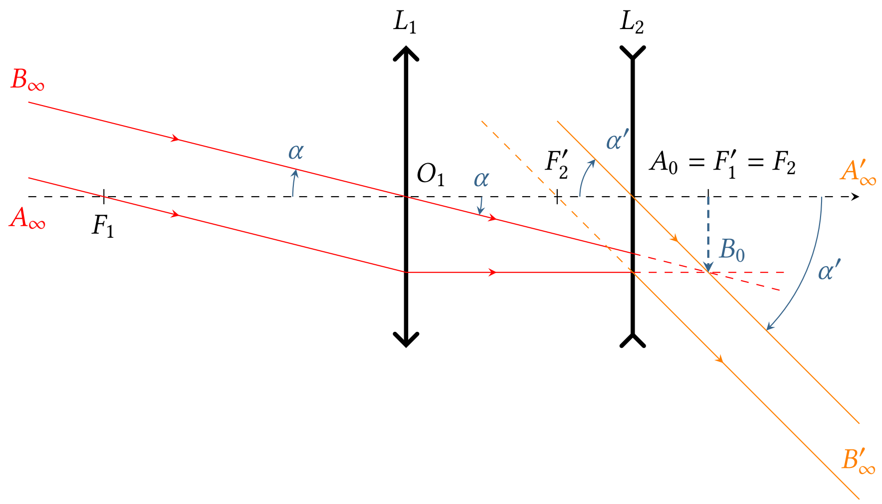


Figure 5 – Marche des rayons dans une lunette de Galilée. Version couleur sur le site de la classe.

3 Les angles $\alpha < 0$ et $\alpha' < 0$ sont représentés figure 5. Ils sont très exagérés sur la figure : on peut en fait les traiter dans l'approximation des petits angles. Le grossissement est défini à partir de ces angles par

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}\,.$$

En raisonnant dans le triangle $O_1A_0B_0$,

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A_0B_0}}{f_1'}\,.$$

En raisonnant de même dans le triangle $O_2A_0B_0$,

$$\alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{A_0B_0}}{-f_2'}\,.$$

> *Faites très attention aux signes : ici $\overline{A_0B_0} < 0$, $f_1' > 0$ et $f_2' < 0$ (car lentille divergente) donc on a bien deux angles négatifs.*

Finalement,

$$G = -\frac{\overline{A_0B_0}}{f_2'} \times \frac{f_1'}{\overline{A_0B_0}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'}\,.}$$

Comme l'oculaire est une lentille divergente, alors $f_2' < 0$ donc $G > 0$: **on obtient bien une image droite**. De plus, la focale de l'objectif est (en valeur absolue) supérieure à la focale de l'oculaire, ce qui donne $G > 1$, c'est-à-dire que **l'image finale est agrandie**.

$\boxed{4}$ La longueur L de la lunette correspond approximativement à la distance séparant le centre optique des deux lentilles. Comme $f_2' < 0$, cette distance est donnée par

$$L = f_1' + f_2'\,.$$

En utilisant en plus l'expression de G obtenue à la question précédente, on en déduit

$$L = (-G+1)f_2' \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_2' = \frac{L}{1-G} \simeq -1{,}3\,\text{cm}\,.}$$

et de même

$$L = \left(1 - \frac{1}{G}\right) f_1' \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_1' = \frac{G}{G-1} L = 41{,}3\,\text{cm}\,.}$$

$\boxed{5}$ Compte tenu des questions précédentes portant sur les angles et de la vision à l'œil nu, on se doute qu'il s'agit de comparer la taille angulaire des habitants de Murano avec et sans lunette.

Commençons par la première partie de la légende : les habitants de Murano seraient à peine discernables à l'œil nu lorsqu'ils sont vus du haut de la colline, à une distance $D = 3\,\text{km}$. La taille apparente d'un habitant mesurant $h = 1{,}80\,\text{m}$ vaut alors

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{h}{D} = 6 \cdot 10^{-4}\,\text{rad}\,.$$

Sachant que le pouvoir de résolution d'un œil emmétrope est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-4}$ rad, la première partie de l'histoire est plausible.

Une fois que l'habitant est regardé au travers de la lunette, il est vu avec une taille angulaire $\alpha' = G\alpha = 18 \cdot 10^{-3}$ rad, ce qui est visible sans difficulté. Pour pouvoir voir les habitants bouger, il faut par exemple que leur bras, de taille $a \sim 10\,\text{cm}$, soit visible. La taille angulaire d'un bras vu au travers de la lunette vaut

$$\alpha'_{\text{bras}} \simeq \frac{Ga}{D} = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}\,,$$

ce qui est à nouveau nettement supérieur au pouvoir de résolution de l'œil. Comme un bras peut être vu au travers de la lunette, alors le mouvement est perceptible également.

En conclusion, **le fait que les mécènes voient les habitants de Murano bouger au travers de la lunette est tout à fait vraisemblable**.

> *Une autre interprétation est possible, en réécrivant la taille angulaire en sortie de lunette sous la forme*
>
> $$\alpha' = G\frac{h}{D} = \frac{h}{D/G}\,,$$
>
> *ce qui signifie que tout se passe comme si l'objet se trouvait à une distance D/G de l'observateur. Ainsi, les mécènes voient les habitants de Murano comme s'ils se trouvaient à $3000/30 = 100\,\text{m}$ d'eux, ce qui correspond à la longueur d'une piste d'athlétisme ou d'un stade, et confirme la crédibilité de la légende.*

Exercice 6 : Lunette astronomique — extrait CCINP PC 2015 | 3 | 2

▹ *Association de lentilles.*

1 Un œil normal n'accomode pas **lorsque l'objet qu'il observe se trouve à l'infini optique.** Dans le cas de la lunette astronomique, l'objet pour l'œil est l'image formée par l'oculaire, qui doit se trouver à l'infini. On en déduit que l'objet pour l'oculaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire, à une distance f_2' en amont de O_2. Or cet objet est l'image objective formée par l'objectif d'un objet « primaire » se trouvant à l'infini optique pour l'objectif. Cette image objective se trouve donc dans le plan focal image de l'objectif, à une distance f_1' en aval de O_1. Finalement, on en déduit que **le plan focal image de l'objectif doit coïncider avec le plan focal objet de l'oculaire**, ou encore

$$\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2' \,.}$$

2 Le foyer objet d'un système optique est le point de l'axe optique dont l'image se trouve à l'infini. Réciproquement, le foyer image est le point de l'axe optique où se trouve l'image d'un objet situé à l'infini. Ici, comme discuté à la question précédente, un objet situé à l'infini forme une image à l'infini. Une lunette astronomique ne possède donc **ni foyer objet, ni foyer image : c'est un instrument afocal**.

3 Voir figure 6. Le prolongement entre les deux lentilles des deux rayons donnés sur l'énoncé permet de déterminer la position de l'image intermédiaire B_{int} au sein de la lunette. On en déduit ensuite la marche du rayon quelconque : il arrive sur l'objectif parallèlement au rayon tracé (même incidence θ car objet à l'infini), il est dévié par l'objectif afin de passer par l'image intermédiaire (propriété de stigmatisme), et est dévié par la l'oculaire afin d'émerger parallèlement au rayon tracé (même angle θ' car image à l'infini).

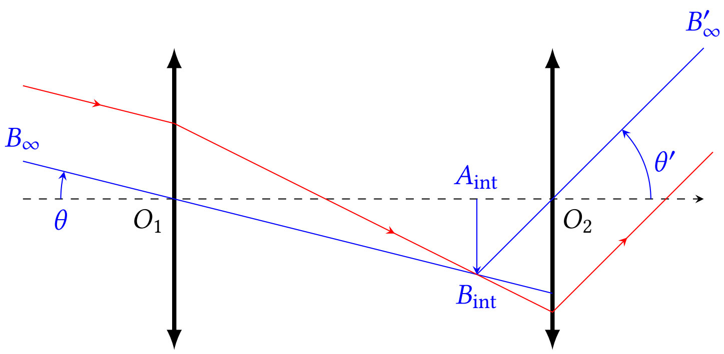


Figure 6 – Marche des rayons dans une lunette astronomique. Les rayons bleus correspondent à ceux du schéma de l'énoncé. Le rayon rouge est le rayon d'intérêt. Version couleur sur le site de la classe.

4 Les notations sont celles de la figure 6, et comme la lunette est utilisée dans les conditions de Gauss on utilise l'approximation des petits angles. On identifie dans le triangle $O_1A_{\text{int}}B_{\text{int}}$

$$\tan\theta = -\frac{A_{\text{int}}B_{\text{int}}}{O_1A_{\text{int}}} \qquad \text{soit} \qquad \theta = \frac{A_{\text{int}}B_{\text{int}}}{f_1'}$$

car l'image intermédiaire se trouve dans le plan focal image de l'objectif.

> *On sait à partir du dessin que $\theta < 0$, donc que $\tan\theta < 0$. Il faut donc penser à rajouter le signe − « à la main » lorsqu'on exprime la tangente en fonction des longueurs. Il est aussi possible d'exprimer la tangente à partir des longueurs algébriques, mais je vous la déconseille fortement.*

De même, dans le triangle $O_2A_{\text{int}}B_{\text{int}}$,

$$\tan\theta' = \frac{A_{\text{int}}B_{\text{int}}}{O_2A_{\text{int}}} \qquad \text{soit} \qquad \theta' = \frac{A_{\text{int}}B_{\text{int}}}{f_2'}$$

car l'image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. On en déduit finalement

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{A_\text{int}B_\text{int}}{f_2'}\,\frac{f_1'}{A_\text{int}B_\text{int}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{G = -\frac{f_1'}{f_2'} = -50\,.}$$

5 Voir figure 7. Les déviations des deux rayons extrêmes sont déterminées en utilisant le fait que ces rayons, issus de l'objet, se coupent forcément au niveau de l'image intermédiaire par stigmatisme.

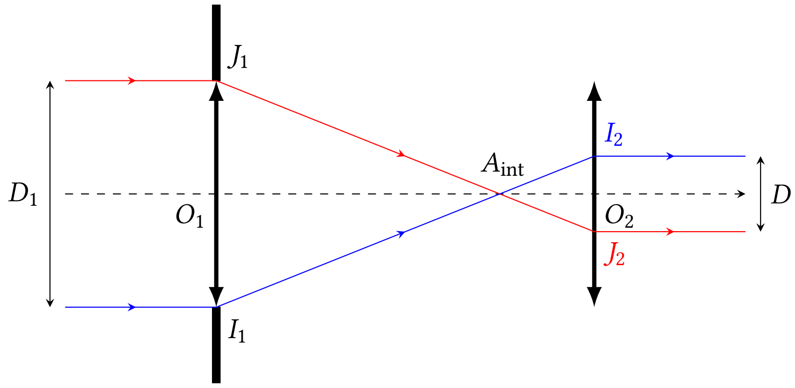


Figure 7 – Diaphragme d'ouverture d'une lunette astronomique. L'échelle n'est pas la même que sur la figure 6. Version couleur sur le site de la classe.

6 D'après le théorème de Thalès dans les triangles $O_1J_1A_\text{int}$ et $O_2J_2A_\text{int}$,

$$\frac{O_1J_1}{O_1A_\text{int}} = \frac{O_2J_2}{O_1A_\text{int}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{D_1/2}{f_1'} = \frac{D/2}{f_2'}$$

connaissant la position de l'image intermédiaire. En identifiant $G = f_1'/f_2'$, on aboutit à

$$\boxed{D = \frac{D_1}{G}\,.}$$

7 Avec $G = 50$ et $D_1 = 10\,\text{cm}$, on trouve que le diamètre du faisceau en sortie de l'oculaire vaut $D = 2{,}0\,\text{mm}$. Comme $D < D_2$, c'est bien la monture de l'objectif qui limite le diamètre du faisceau de sortie et non pas la monture de l'oculaire.

8 Lorsque l'angle θ devient grand, les rayons sont très inclinés par rapport à l'axe optique. Comme on peut s'en rendre compte par exemple à partir du rayon passant par O_1, lorsque cet angle devient très grand, les rayons sont arrêtés par la monture de l'oculaire. L'image finale du point objet associé à cette inclinaison **devient alors moins lumineuse** lorsque seule une fraction des rayons est occultée, et **disparaît complètement** si l'inclinaison est telle que tous les rayons issus de ce point et passant par l'objectif sont arrêtés par la monture de l'oculaire.

9 Le champ est la fraction de l'objet visible au travers de l'instrument d'optique. Le raisonnement qualitatif de la question précédente montre que c'est la monture de l'oculaire qui est responsable de la visibilité ou non d'un point au travers de l'objectif : si la taille de cette monture est augmentée, moins de rayons seront arrêtés, et plus de points sont visibles. Cela permet de conclure que la monture de l'oculaire joue bien le rôle de diaphragme de champ de la lunette astronomique.

Appareil photo

Exercice 7 : Distance hyperfocale d'un appareil photo — oral banque PT | 2 | 2 |

- *Appareil photo ;*
- *Profondeur de champ.*

1 Voir figure 8. La mise au point est à l'infini, l'image se forme donc dans le plan focal image de l'objectif, c'est là que doit être placé le capteur.

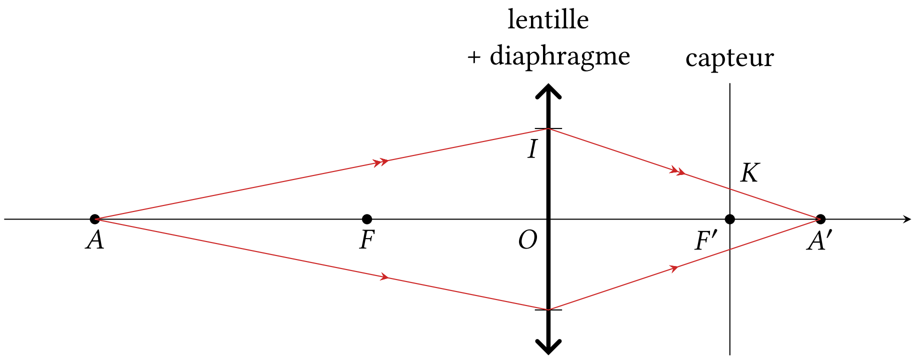


Figure 8 – Construction des rayons issus de A dans l'appareil photo.

2 Le plus simple est d'utiliser la relation de conjugaison avec origine au foyer,

$$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = -f'^2 \qquad \text{soit} \qquad (f'-d)\,\Delta = -f'^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\Delta = \frac{f'^2}{d-f'}}\,.$$

Sachant que $d \gg f'$, on peut approximer

$$\boxed{\Delta \simeq \frac{f'^2}{d}}\,.$$

> *Pour retrouver rapidement cette relation, la retenir sous la forme $\overline{FA}\,\overline{F'A'}$ = cte indépendante du point A. Retrouver la valeur constante se fait en choisissant un point particulier, en l'occurence le point O qui est son propre conjugué.*
>
> *Le résultat peut aussi être établi à partir de la relation de conjugaison avec origine au centre optique, mais c'est un peu plus long :*
>
> $$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad \textit{soit} \qquad \frac{1}{f'+\Delta} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'} \qquad \textit{etc.}$$

3 La marche des rayons issus de A et passant par les extrémités du capteur est représentée figure 8. Ces deux rayons se rejoignent en A', image de A par l'objectif. D'après le théorème de Thalès (ou en exprimant la tangente de l'angle d'inclinaison des rayons),

$$\frac{F'K}{OI} = \frac{F'A'}{OA'}$$

Ainsi, la hauteur $h = 2F'K$ de la tâche lumineuse sur le capteur est donnée par

$$h = 2 \times \frac{\Delta}{OA'} \times \frac{D}{2}\,.$$

De plus, avec la relation de conjugaison

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d} = \frac{d-f'}{f'd} \simeq \frac{1}{f'}\,.$$

On en conclut

$$h = \frac{f'^2}{d} \times \frac{1}{f'} \times D \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h = \frac{f'D}{d}\,.}$$

4 Pour que l'image de A soit nette, il faut avoir

$$h \leq a \qquad \text{soit} \qquad \boxed{d \geq \frac{f'D}{a} = 10\,\mathrm{m}\,.}$$