Phénoménologie des ondes

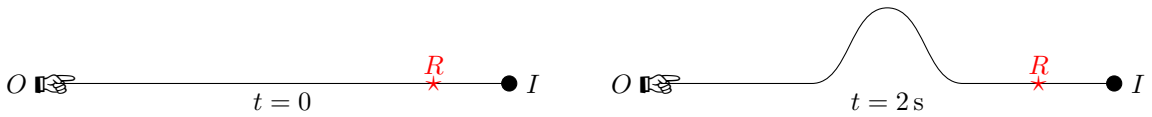
Exercices

Exercice 1 : Mauvais réflexes [♦◊◊]

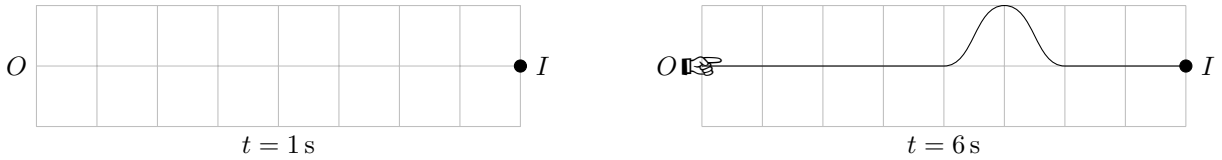
Les questions suivantes ont pour but de lever quelques mauvais réflexes spontanés au sujet des ondes. Plus intéressant que de constater vos erreurs, demandez-vous surtout *pourquoi* vous les faites.

Toutes les questions sont indépendantes les unes des autres, mais la corde est toujours fixée à l'extrémité I et tenue à la main au point O.

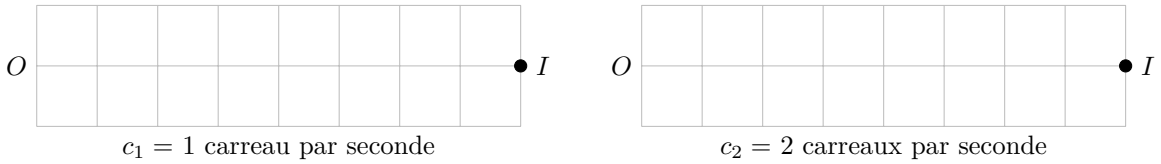
1 - Au milieu de la corde se trouve un point rouge R. En bougeant la main, la forme de la corde observée au bout de 2 s est représentée ci-dessous. Y a-t-il une façon de bouger la main qui permette à l'onde d'atteindre le point rouge au bout de 2 s ?



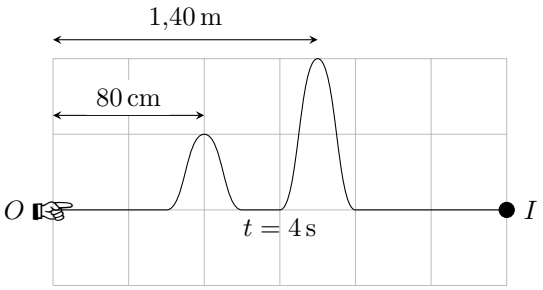
2 - Pour le dessin, la célérité est choisie à 1 carreau par seconde. On choisit une échelle de 10 cm par carreau en ordonnée. On lève la main en 1 s d'une hauteur de 10 cm et on la ramène à sa position initiale en 1 s. L'instant où commence le mouvement de la main est pris comme origine des temps. On représente, à droite, la forme de la corde à $t = 6$ s. Dessiner, à gauche, la forme de la corde à $t = 1$ s.



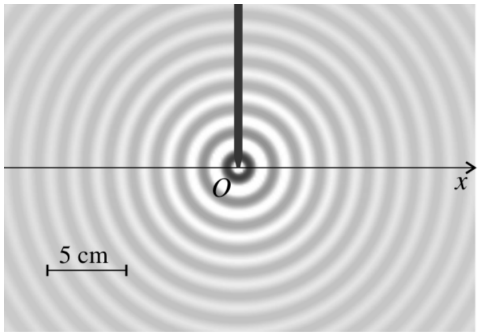
3 - La célérité sur la première corde est de 1 carreau par seconde, celle sur la deuxième de 2 carreaux par seconde. On choisit une échelle de 10 cm par carreau en ordonnée. On lève la main en 1 s d'une hauteur de 10 cm et on la ramène à sa position initiale en 1 s. L'instant où commence le mouvement de la main est pris comme origine des temps. Représenter la forme des deux cordes à $t = 3$ s.



4 - À l'instant $t = 0$ on commence à bouger la main : on forme une bosse, puis l'autre, et on immobilise la main. À l'instant $t = 4$ s, on photographie la corde. Le sommet de la petite bosse se trouve à 80 cm de la main, celui de la grande bosse à 1,40 m. À quelle distance de la main se trouveront les sommets des deux bosses à l'instant $t = 5$ s ?



Exercice 2 : Cuve à ondes [♦◊◊]



La figure ci-contre représente la surface d'une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique bien accordé. L'onde est générée par un vibreur de fréquence $f = 20\,\text{Hz}$. L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe (en bosse) et foncée là où elle est concave (en creux). Ainsi, le niveau de gris indique la hauteur d'eau dans la cuve.

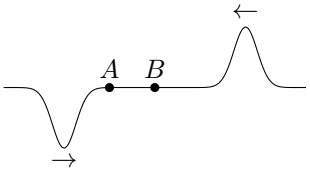
1 - En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.

2 - En déduire la célérité de l'onde.

3 - Supposons l'onde harmonique, d'amplitude H. Donner une expression mathématique pour la hauteur $h(x,t)$. Distinguer les cas $x < 0$ et $x > 0$.

4 - Expliquer pourquoi l'amplitude H n'est en fait pas constante.

Exercice 3 : Deux ondes sur une corde [IPhO, ♦◊◊]



Considérons la corde représentée ci-contre sur laquelle deux ondes progressives se propagent en sens contraire.

1 - Tracer l'allure de la corde à quelques instants, en particulier quand les centres des deux ondes se superposent.

2 - Commenter l'aspect de la corde lorsque les deux ondes se superposent exactement. Quelle est la différence avec une corde au repos ?

3 - Représenter graphiquement (chronogramme) l'altitude de A et B au cours du temps.

Exercice 4 : Diagramme de rayonnement d'un haut-parleur [♦♦◊]

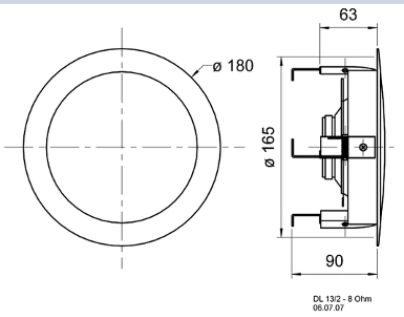
Le fabricant de haut-parleurs VISATON fournit sur son site web les caractéristiques du modèle DL 13/2 8 Ω reportées dans le document 1.

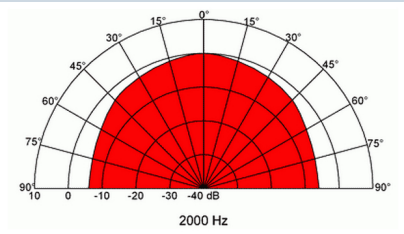
Les deux diagrammes sont des diagrammes de rayonnement, qui décrivent la directionnalité du haut-parleur. Ils représentent l'intensité sonore émise par le haut parleur en fonction de la direction de l'espace. Par convention, le cône de rayonnement définit la portion d'espace dans laquelle le haut-parleur émet une intensité sonore qui n'est pas inférieure à son intensité maximale de plus de 3 dB.

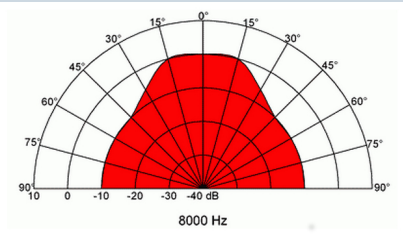
1 - En analysant le cône de rayonnement à 8 kHz en termes de diffraction, retrouver l'ordre de grandeur du diamètre du haut-parleur.

2 - Pourquoi le diagramme de rayonnement à 2 kHz ne permet pas une telle analyse ?

Document 1 : Extrait de la fiche technique du haut-parleur







Exercice 5 : Écoute musicale et interférences [♦♦◊]

La qualité de l'écoute musicale que l'on obtient avec une chaîne hi-fi dépend de la manière dont les enceintes sont disposées par rapport à l'auditeur. En particulier, il faut absolument éviter la configuration où un mur se trouve à distance D trop courte derrière l'auditeur. Cet exercice a pour but de comprendre pourquoi.

Supposons l'onde issue de l'enceinte harmonique de fréquence f. Elle se réfléchit sur le mur sans aucun déphasage pour la surpression, grandeur à laquelle est sensible l'oreille de l'auditeur. On note $c = 343\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ la vitesse du son dans l'air.

1 - En vous aidant d'un schéma clair, exprimer le décalage temporel $\Delta\tau$ qui existe entre les deux ondes arrivant dans l'oreille de l'auditeur, celle provenant directement de l'enceinte et celle s'étant réfléchie sur le mur.

2 - En déduire le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux ondes.

3 - Expliquer pourquoi il existe un risque de diminution de l'amplitude perçue par l'auditeur pour certaines fréquences.

4 - Exprimer ces fréquences en fonction d'un entier p. Quelle condition doit vérifier la distance D pour qu'aucune d'entre elles ne soit dans le domaine audible ? Commenter.

5 - Expliquer qualitativement pourquoi on évite l'effet nuisible en éloignant l'auditeur du mur. Pourquoi recouvrir le mur d'un revêtement adéquat aura-t-il le même effet ?

On cherche maintenant à mesurer l'efficacité d'un tel revêtement. Un micro sensible à la surpression est placé à une distance D du mur, puis un haut-parleur envoie un signal appelé *bruit blanc* dont le spectre contient toutes les fréquences avec la même amplitude. La courbe obtenue est représentée figure 1. D'allure très caractéristique, elle est appelée « courbe en peigne ». Elle représente la différence de niveau sonore en décibel en fonction de la fréquence, cette différence ΔI_{dB} étant relié à l'amplitude A du signal sonore par

$$\Delta I_{\mathrm{dB}} = 20\log\frac{A}{A_{\mathrm{réf}}}\,,$$

où $A_{\mathrm{réf}}$ est une amplitude de référence.

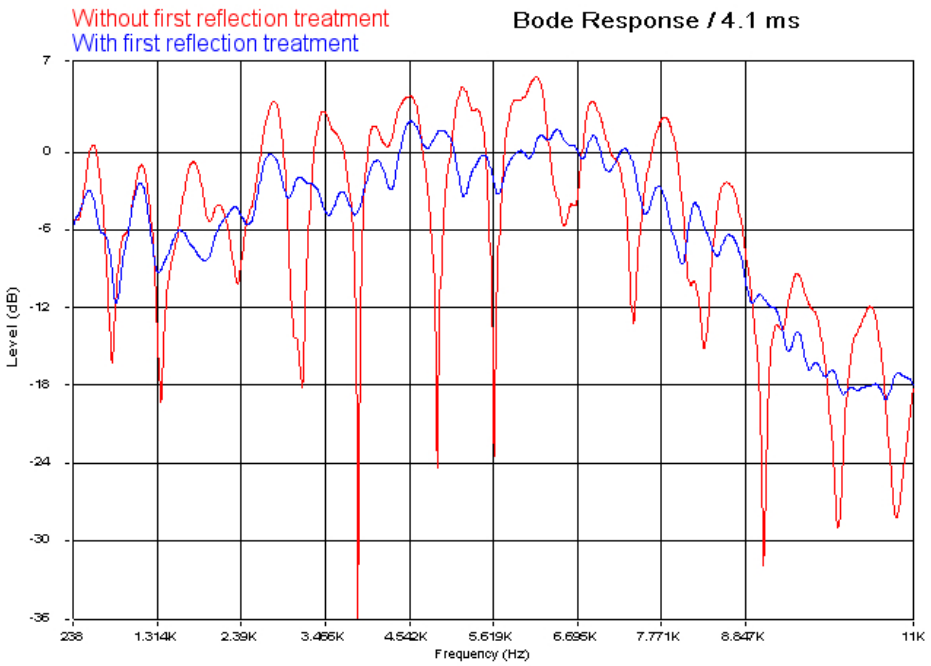
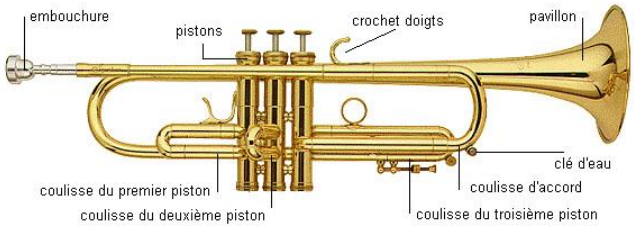


Figure 1 – Courbe en peigne enregistrée à distance D du mur. Les échelles sont de 1,077 kHz/div en abscisse et 6 dB/div en ordonnée. Source : `http://realtraps.com/`

6 - Calculer numériquement la distance D.

7 - *(Difficile)* Lorsqu'il y a superposition de deux ondes de même amplitude A_0, quelle est, en dB, l'augmentation maximale de l'amplitude ? Que peut-on donc dire du choix de l'amplitude de référence au vu de la courbe ?

Exercice 6 : Trompette [♦♦◊]



Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale $L = 1{,}40\,\mathrm{m}$, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe x tel que l'embouchure se trouve en $x = 0$ et le pavillon en $x = L$.

1 - On modélise l'onde de pression $P_\mathrm{i}(x,t)$ générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude P_0, de pulsation ω, et de phase initiale φ_i. Écrire son expression mathématique.

2 - Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude, mais avec un déphasage éventuel. Écrire son expression mathématique, en notant φ_r la phase initiale de l'onde réfléchie.

3 - Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme

$$P_\mathrm{tot}(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

en exprimant A, ψ et φ en fonction des paramètres déjà introduits. Comment s'appelle une telle onde ?

Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore. Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression au niveau de l'embouchure ($x = 0$) et un nœud au niveau du pavillon ($x = L$).

4 - En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde λ_n des modes propres sont telles que

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.$$

En déduire la fréquence fondamentale ($n = 0$) de la trompette.

5 - On se propose de retrouver le résultat précédent par le calcul.
5.a **-** En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que $\psi = 0$ convient.
5.b **-** Déduire de la seconde condition aux limites que $k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec n un entier.
5.c **-** Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.

Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par $2^{3/12}$.

6 - En déduire la longueur de la coulisse du troisième piston.

Exercice 7 : Déphasage à la réflexion sur l'extrémité d'une corde [♦♦◊]

L'objectif de cet exercice est de justifier que la réflexion d'une onde sur l'extrémité fixe d'une corde vibrante entraîne un déphasage de π sans changement d'amplitude par rapport à l'onde incidente. Ce résultat a été indiqué (et utilisé) sans démonstration dans le cours.

On considère une corde OI dont l'extrémité I est excitée par un vibreur de fréquence $f = 100\,\mathrm{Hz}$. La célérité des ondes transverses le long de la corde vaut $c = 25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On choisit O comme origine de l'axe des abscisses, et on prend ce point comme référence des phases, c'est-à-dire que son ébranlement est donné par

$$\xi_O(t) = \xi(0,t) = \xi_0\cos(\omega t)\,.$$

1 - On considère une onde progressive harmonique, se propageant de I vers O, dans le sens des x décroissants. Donner l'ébranlement $\xi_M(t) = \xi(x,t)$ en un point M d'abscisse x.

2 - En déduire l'expression du vecteur d'onde k et de la longueur d'onde λ en fonction de f et c.

3 - Supposons maintenant que O est fixé donc immobile. L'onde s'y réfléchit donc, en subissant un déphasage φ mais sans changement d'amplitude. Exprimer les ébranlements $\xi_{O,\mathrm{i}}(t)$ et $\xi_{O,\mathrm{r}}(t)$ respectivement dus à l'onde incidente et réfléchie. En déduire que $\varphi = -\pi$ convient.

4 - Pour un point M de la corde, exprimer les ébranlements $\xi_{M,\mathrm{i}}(t)$ et $\xi_{M,\mathrm{r}}(t)$ puis l'ébranlement $\xi_M(t)$ résultant de la superposition des deux ondes. Quelle structure d'onde retrouve-t-on ?

5 - En déduire les positions des nœuds et des ventres de vibration.

Annale de concours

Exercice 8 : Sonar [CCP TSI 2016, ♦♦◊]

Un sonar (SOund NAvigation and Ranging) est un dispositif de détection utilisant les ondes acoustiques comme signal détectant. Il permet aux marins de naviguer correctement (mesure de la profondeur) ou aux sous-mariniers de repérer les obstacles et les autres navires. Certains animaux (chauve-souris, dauphins, etc.) utilisent des systèmes similaires au sonar pour repérer leurs proies ou des obstacles.

On suppose dans cette partie que la mer est un milieu homogène dans lequel le son se propage rectilignement. À 10 °C, la vitesse du son dans l'eau de mer est $c_{\text{mer}} = 1{,}50\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

L'avant d'un sous-marin est équipé d'un sonar lui permettant d'éviter d'entrer en collision avec un autre sous-marin. Le sonar est constitué d'un émetteur d'ondes sonores et d'un récepteur capable d'identifier l'écho de l'onde précédemment émise. On note O l'avant du sous-marin équipé du sonar et (Ox) l'axe du sous-marin, correspondant à l'axe de propagation de l'onde sonore. Un second sous-marin se trouve à distance L du premier, dans la configuration représentée figure 2.

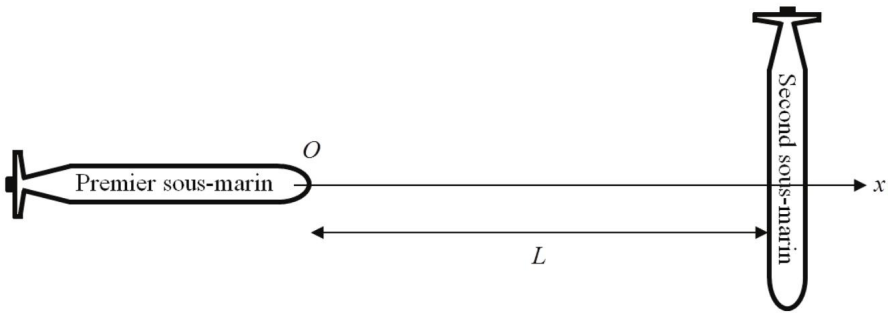


Figure 2 – Les sous-marins, vus du dessus.

1 - Expliquer le principe de fonctionnement d'un sonar.

2 - L'émetteur produit une très brève impulsion sonore. Le récepteur en reçoit l'écho au bout d'une durée $\tau = 400\,\text{ms}$. En déduire la distance L à laquelle se situe le second sous-marin.

À partir de l'instant $t = 0$, le sonar émet l'impulsion sonore pseudo-sinusoïdale représentée figure 3 pendant une durée $\Delta t = 500\,\mu\text{s}$.

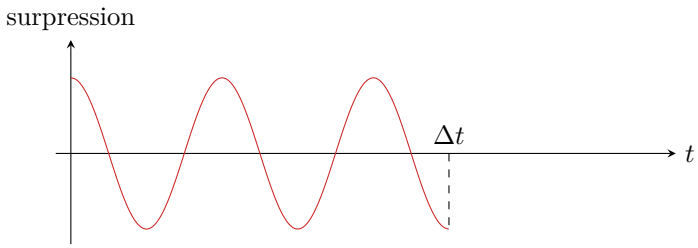


Figure 3 – Impulsion pseudo-sinusoïdale de durée Δt correspondant au signal envoyé par le sonar.

3 - Déterminer en justifiant la fréquence f de l'onde sonore émise par le sonar.

On s'intéresse à la propagation spatiale de l'impulsion sonore. On la représente alors dans un système d'axe dont l'abscisse est la position x mesurée à partir de l'avant du sous-marin qui émet l'onde ultrasonore.

4 - Exprimer et calculer numériquement la longueur spatiale Δx de l'impulsion.

5 - Représenter sur la copie l'impulsion sonore à l'instant $t = 12{,}0\,\text{ms}$ en fonction de x. Calculer numériquement, en justifiant précisément, les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin.

Un détecteur d'ondes sonores est placé sur le second sous-marin, sur l'axe (Ox).

6 - Représenter sur la copie l'évolution de l'amplitude enregistrée par ce détecteur au cours du temps. Calculer numériquement, en justifiant précisément, les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion.

Phénoménologie des ondes

Exercices

Exercice 1 : Mauvais réflexes

1 Non, il n'est **pas possible** que l'onde atteigne le point rouge plus rapidement en changeant la façon de bouger la main. La célérité d'une onde dépend du milieu de propagation (ici, la corde), mais pas de la forme du signal envoyé.

> ***Confusion possible :*** *En mécanique, la vitesse d'un objet dépend énormément des conditions initiales qui lui sont données. Cela peut vous amener à des confusions du type « en bougeant la main plus fort, l'onde arriverait plus rapidement ». C'est vrai si vous lancez une balle, mais pas avec une onde sur une corde.*

2 Comme la photo de gauche est prise cinq secondes plus tôt, l'onde sera décalée de cinq carreaux vers la gauche. À cet instant, le mouvement de la main n'est pas encore terminée, et elle se trouve sur le sommet de la bosse, voir figure 4. La partie « qui redescend » n'a pas encore été créée.

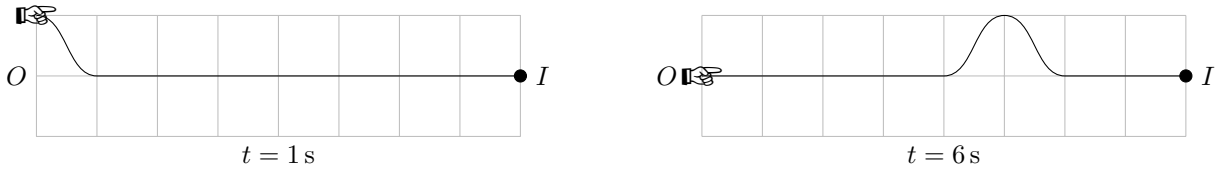


Figure 4 – Formation d'une onde.

> ***Confusion possible :*** *Au contraire d'un objet matériel, un signal peut exister sans être complètement formé, et il commence à se propager avant d'être complètement fabriqué. Là encore, l'intuition mécaniste qu'on peut avoir d'une onde est source de confusion.*

3 Le front de l'onde a été créé en O à un instant précédent la prise des photos de $\Delta t_\mathrm{f} = 3\,\mathrm{s}$, il se trouve donc en

$$x_\mathrm{f} = c\,\Delta t_\mathrm{f} = 3 \text{ ou } 6 \text{ carreaux.}$$

Le sommet de l'onde a été créé en O à un instant précédent la prise des photos de $\Delta t_\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$, il se trouve donc en

$$x_\mathrm{s} = c\,\Delta t_\mathrm{s} = 2 \text{ ou } 4 \text{ carreaux.}$$

Enfin, l'arrière de l'onde a été créé en O à un instant précédent la prise des photos de $\Delta t_\mathrm{a} = 1\,\mathrm{s}$, il se trouve donc en

$$x_\mathrm{a} = c\,\Delta t_\mathrm{a} = 1 \text{ ou } 2 \text{ carreaux.}$$

Les deux photos sont représentées figure 5

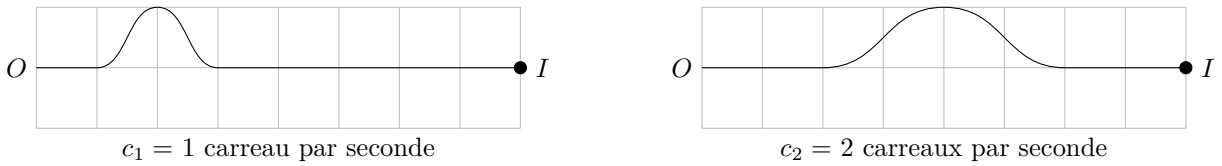


Figure 5 – Propagation d'une même onde à célérités différentes.

> ***Confusion possible :*** *Au contraire d'un objet matériel, une onde n'a pas de forme propre. Sa forme apparente sur une photographie dépend à la fois de la façon dont elle a été crée, mais aussi de la célérité à laquelle elle se propage. La forme d'un objet matériel ne dépend évidemment pas de la vitesse à laquelle il se déplace. Une nouvelle fois (comme dans tout cet exercice ?) l'intuition mécaniste est*

> *trompeuse !*

4 D'après l'énoncé, le front de l'onde se trouve en O à $t = 0$. Au bout de 4 s, il a avancé de quatre carreaux, soit 1,60 m. On en déduit que l'onde représentée se propage à $40\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Une seconde après la photo, **le sommet de la grande bosse se trouvera donc à 1,80 m de la main et celui de la petite bosse à 1,20 m**.

> ***Confusion possible :*** *Comme les bosses se trouvent à des distances différentes de la main, vous pourriez être tentés d'imaginer qu'elles se propagent à des vitesses différentes. Il n'en est rien ! Elle se trouvent à des abscisses différentes car elles ont émis à des instants différents. Pour déterminer la célérité à partir de la distance parcourue, il est indispensable de considérer le point qui se trouvait en O à $t = 0$, c'est-à-dire le front de l'onde. Utiliser le sommet des bosses pour calculer la célérité donne un résultat faux.*

Exercice 2 : Cuve à ondes

1 La longueur d'onde est la période spatiale des vaguelettes le long d'un rayon des cercles, c'est-à-dire la distance entre deux raies foncées ou claires successives. On mesure sur la figure [1] 2,1 cm pour sept longueurs d'ondes, l'échelle étant de 1/5. Ainsi,

$$\lambda = 5 \times \frac{2{,}1}{7} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda = 1{,}5\,\mathrm{cm}\,.}$$

2 L'onde étant progressive et harmonique, la célérité se déduit de la relation de dispersion,

$$\boxed{c = \lambda\, f = 0{,}30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

3 En premier lieu, il faut se rappeler que les vagues ont lieu *à la surface* de l'eau. Notons H_0 le niveau d'eau en l'absence d'onde. Pour $x > 0$, l'onde se propage dans le sens des x croissants et s'écrit donc

$$\boxed{h_{\rightarrow}(x,t) = H_0 + H\cos\left[2\pi\, f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]\,.}$$

Réciproquement, pour $x < 0$, l'onde se propage dans le sens des x décroissants et s'écrit alors

$$\boxed{h_{\leftarrow}(x,t) = H_0 + H\cos\left[2\pi\, f\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]\,.}$$

La phase initiale φ est la même pour les deux fonctions car elles doivent coïncider à tout instant en $x = 0$.

> *Si on admet que la photo est prise à l'instant $t = 0$, alors la surface de l'eau est convexe en $x = 0$, c'est-à-dire que la hauteur d'eau y est maximale. On peut donc en conclure que $\varphi = 0$.*

4 Au cours de la propagation, **l'énergie que le vibreur transmet à la surface de l'eau se répartit sur des cercles de plus en plus grands**. Il est donc raisonnable que l'amplitude de l'onde diminue au fur et à mesure que le cercle s'agrandit.

> *Cela se voit d'ailleurs sur la figure, où le niveau de gris est de moins en moins marqué lorsque l'on s'éloigne du centre.*

Exercice 3 : Deux ondes sur une corde [IPhO]

1 Le principe de superposition indique que l'ébranlement de la corde est la superposition des ébranlements dus à chacune des deux ondes progressives, représentées figure 6 en pointillés bleus et rouges.

2 Lorsque les deux ondes se superposent exactement, **la corde est parfaitement horizontale**. Néanmoins, contrairement à une corde au repos, **elle est en mouvement** : l'horizontalité n'est qu'à cet instant précis.

3 Les deux chronogrammes sont représentés figure 7. Étant situé parfaitement au milieu de la corde, le point B demeure immobile : l'ébranlement imposé par une des ondes est toujours compensé par celui imposé par la seconde.

1. ... ou plutôt sur le livre d'où j'ai extrait la figure en espérant que la photocopie se fasse à la bonne échelle !

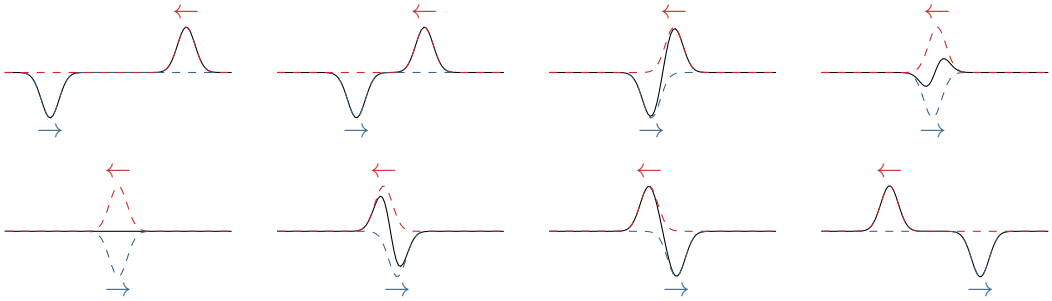


Figure 6 – Allure de la corde à différents instants. Version couleur sur le site de la classe.

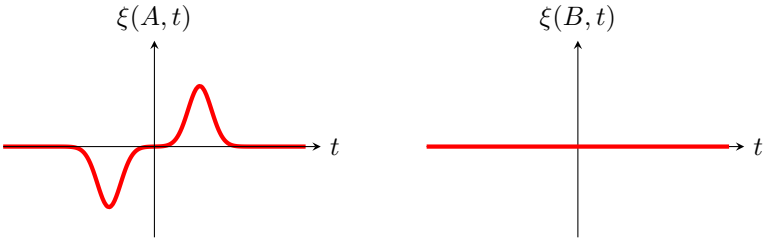


Figure 7 – Chronogramme des altitudes des points A et B.

> *Attention à ne pas se tromper sur l'allure du chronogramme : le point A commence par descendre avant de remonter.*

Exercice 4 : Diagramme de rayonnement d'un haut-parleur

1 Comme la célérité du son à température ambiante vaut de $343\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, la longueur d'onde des ondes sonores vaut $\lambda = 4{,}3\,\mathrm{cm}$. D'après la lecture du diagramme, le cône de rayonnement est compris entre les angles $\theta = 20°$ et $\theta' = -20°$. Une telle ouverture angulaire est due à un obstacle de taille

$$\boxed{a \simeq \frac{\lambda}{\sin\theta} = 13\,\mathrm{cm}}$$

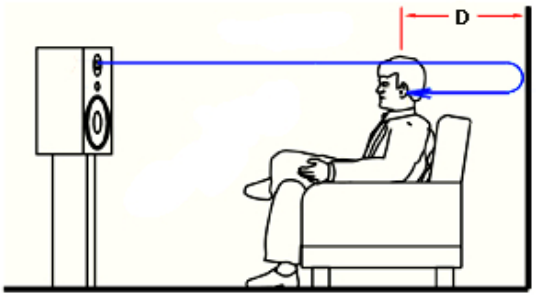
Cet ordre de grandeur est bien celui du diamètre du haut-parleur.

> *Évidemment, le résultat n'est pas très précis : on compte à peine un chiffre significatif. Une première raison est une lecture imprécise du diagramme de rayonnement. De plus, la relation $\sin\theta \simeq \lambda/a$ vaut pour une fente rectangulaire parfaitement « transparente » percée dans un matériau parfaitement « opaque » aux ondes. Pour un trou circulaire, il faut le multiplier par un facteur 1,2, ce qui améliore un peu le résultat ... mais surtout un haut parleur est un émetteur, loin d'être un cercle percé !*

2 La longueur d'onde à 2 kHz vaut 17 cm, ce qui est aussi grand que la membrane du haut-parleur. Pour ces ondes, **la diffraction se fait dans tout l'espace** et n'est plus reliée de façon aussi simple à la taille de l'objet diffractant.

Exercice 5 : Écoute musicale et interférences

1 En plus de la distance séparant l'enceinte de l'auditeur, l'onde réfléchie parcourt une distance $2D$ correspondant à un aller-retour entre l'auditeur et le mur.



Cela se traduit par un décalage temporel

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2D}{c}}$$

2 Les deux ondes sont harmoniques et synchrones. Leur déphasage est relié au retard temporel par

$$\Delta\phi = \omega\,\Delta\tau = 2\pi\,f\,\Delta\tau \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi\,f\,D}{c}\,.}$$

3 Il peut y avoir une diminution de l'amplitude **si l'onde directement incidente et l'onde réfléchie sur le mur interfèrent destructivement**, c'est-à-dire si elles sont en opposition de phase.

4 La condition d'opposition de phase se traduit par

$$\Delta\phi_p = \pi + 2p\pi = (2p+1)\pi\,, \quad p \text{ entier} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_p = (2p+1)\frac{c}{4D}\,, \quad p \text{ entier}\,.}$$

Les fréquences du domaine audible courent de $f_{\text{min}} = 20\,\text{Hz}$ à $f_{\text{max}} = 20\,\text{kHz}$. Les fréquences où les interférences sont destructives augmentent avec p. Pour qu'aucune d'entre elles ne fasse partie du domaine audible, il faut donc que

$$f_{p=0} = \frac{c}{4D} > f_{\text{max}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D < \frac{c}{4f_{\text{max}}} = 4{,}3\,\text{mm}\,.}$$

Il faudrait donc que les oreilles de l'auditeur soient presque collées au mur ! Compte tenu de l'encombrement dû à l'arrière de la tête, **c'est tout simplement impossible**.

5 Les interférences ne sont parfaitement destructives que si les deux ondes ont même amplitude, mais l'amplitude de l'onde émise par une enceinte décroît avec la distance qu'elle parcourt. Par conséquent, si l'auditeur est suffisamment loin du mur, **l'onde réfléchie sur le mur a une amplitude suffisamment faible devant l'onde directement incidente pour que l'effet des interférences ne soit pas perceptible**.

Un revêtement adéquat **absorbera une partie de l'onde incidente sans la réfléchir**, ce qui aura le même résultat sur les interférences.

6 L'écart moyen entre deux fréquences pour lesquelles l'amplitude mesurée est minimale vaut $\Delta f = 0{,}84\,\text{kHz}$. D'après les questions précédentes,

$$\Delta f = f_{p+1} - f_p = \frac{c}{2D} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{D = \frac{c}{2\,\Delta f} = 20\,\text{cm}\,.}$$

> *Penser à mesurer l'écart entre plusieurs minima pour gagner en précision : j'en ai ici mesuré 12.*
>
> *La distance D est ici à nouveau faible par rapport à une distance « normale » entre l'auditeur et le mur, mais cela permet d'être sûr qu'à distance plus grande le résultat ne pourra qu'être meilleur.*

7 L'amplitude est maximale dans le cas d'interférences constructives, et vaut alors $2A_0$. Sa valeur en décibels vaut

$$\Delta I_{\text{dB}} = 20\log\frac{2A_0}{A_{\text{réf}}} = 20\log\frac{A_0}{A_{\text{réf}}} + 20\log 2 = 20\log\frac{A_0}{A_{\text{réf}}} + 6\,.$$

Comme la valeur maximale de la différence de niveau sonore est de l'ordre de 6 dB à une fréquence d'environ 5,65 kHz, on peut penser que **les ingénieurs qui ont réalisé l'expérience ont choisi $\boldsymbol{A_{\text{réf}} = A_0}$**.

Exercice 6 : Trompette

1 L'onde se propage dans le sens des x croissants, donc

$$\boxed{P_{\text{i}}(x,t) = P_0\cos(\omega t - kx + \varphi_{\text{i}})} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}\,.$$

2 L'onde se propage cette fois dans le sens des x décroissants, d'où

$$\boxed{P_{\text{r}}(x,t) = P_0\cos(\omega t + kx + \varphi_{\text{r}})\,.}$$

3 D'après le principe de superposition, $P_{\text{tot}} = P_{\text{i}} + P_{\text{r}}$, et ainsi

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}}(x,t) &= P_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{\text{i}}) + P_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{\text{r}}) \\ &= 2P_0 \cos\left(\frac{2\omega t + 0 + \varphi_{\text{r}} + \varphi_{\text{i}}}{2}\right) \cos\left(\frac{0 + 2kx + \varphi_{\text{r}} - \varphi_{\text{i}}}{2}\right) \\ &= 2P_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{\text{r}} + \varphi_{\text{i}}}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi_{\text{r}} - \varphi_{\text{i}}}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme voulue avec

$$\boxed{A = 2P_0 \qquad \psi = \frac{\varphi_{\text{r}} - \varphi_{\text{i}}}{2} \qquad \varphi = \frac{\varphi_{\text{r}} + \varphi_{\text{i}}}{2}\,.}$$

Une telle onde est une **onde stationnaire**.

> *On utilise ici la formule d'addition des cosinus (à connaître !)* $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ *avec* p *l'argument du cosinus de l'onde réfléchie et* q *celui de l'onde incidente.*
>
> *Si jamais vous preniez* p *et* q *dans l'autre sens ce n'est pas un problème, mais rajoute juste une étape où il faut utiliser la parité* $\cos(-x) = \cos x$.

4 Représentons figure 8 l'onde de surpression dans le tuyau, en respectant les conditions aux limites. Ce schéma permet de retrouver que deux nœuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$ et qu'un nœud et un ventre qui se suivent sont séparés de $\lambda/4$. On voit alors apparaître que les conditions aux limites imposent

$$\boxed{L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.}$$

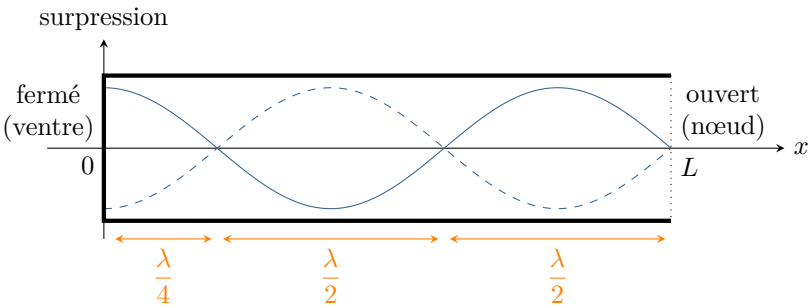


Figure 8 – Fuseaux d'onde stationnaire dans la trompette.

Pour $n = 0$, on trouve $L = \lambda_0/4$, et en utilisant la relation de dispersion sous la forme $\lambda_0 = c/f_0$ on en déduit

$$L = \frac{c}{4f_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_0 = \frac{c}{4L} = 61\,\text{Hz}\,.}$$

> ***Rappel :*** $c = 3{,}4 \cdot 10^2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, *valeur à connaître.*

5 Repartons de l'expression $P_{\text{tot}}(x,t) = A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$. L'amplitude locale de l'onde stationnaire est donnée par $A(x) = A\cos(kx + \psi)$.

5.a Un ventre se trouve au niveau de l'embouchure, donc l'amplitude est maximale. On en déduit

$$\cos(k_n \times 0 + \psi) = \pm 1 \qquad \text{soit} \qquad \psi = n\pi \quad (n \text{ entier})$$

Choisir $\psi = 0$ est donc compatible avec la condition limite.

5.b Un nœud se trouve au niveau du pavillon, donc l'amplitude locale est nulle, d'où

$$\cos(k_n L) = 0 \qquad \text{soit} \qquad k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi\,.$$

> *Ne pas hésiter à s'appuyer sur un cercle trigonométrique au brouillon pour répondre à ces questions sans erreur !*

5.c De cette condition on déduit

$$L = \frac{\pi}{2k_n} + \frac{n\pi}{k_n}$$

et comme par définition $k_n = 2\pi/\lambda_n$ alors

$$\boxed{L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.}$$

6 Lorsque le trompettiste appuie sur le piston, la nouvelle fréquence fondamentale est donnée par

$$f_0' = \frac{4c}{L'} = \frac{f_0}{2^{3/12}}$$

où L' est la longueur totale (tuyau + coulisse). Ainsi,

$$\frac{4c}{L'} = \frac{4c}{2^{3/12}\,L} \qquad \text{d'où} \qquad L' = 2^{3/12}\,L$$

On en déduit enfin la longueur L_c de la coulisse par $L' = L + L_\mathrm{c}$, si bien que

$$\boxed{L_\mathrm{c} = (2^{3/12} - 1)L = 26\,\mathrm{cm}\,.}$$

Exercice 7 : Déphasage à la réflexion sur l'extrémité d'une corde

1 Comme l'OPH se propage dans le sens des x décroissants, alors elle s'écrit sous la forme

$$\xi_M(t) = A\cos(\omega t + kx + \psi)\,.$$

Or on sait qu'au point O, $x = 0$, et donc

$$\xi_O(t) = A\cos(\omega t + \psi) = \xi_0\cos(\omega t)\,.$$

On en déduit par identification $A = \xi_0$ et $\psi = 0$, d'où

$$\boxed{\xi_M(t) = \xi_0\cos(\omega t + kx)\,.}$$

2 Une onde progressive harmonique est une onde progressive ! Ses dépendances en t et en x sont donc couplées sous la forme de la variable réduite $t + x/c$. On a donc

$$\xi_M(t) = \xi_0\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] = \xi_0\cos(\omega t + kx)$$

Par identification, on en déduit la relation de dispersion de l'OPH,

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{2\pi f}{c}\,.}$$

La longueur d'onde s'obtient ensuite par

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lambda = \frac{c}{f}\,.}$$

3 Compte tenu des questions précédentes,

$$\xi_{O,\mathrm{i}} = \xi_0\cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad \xi_{O,\mathrm{r}} = \xi_0\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

D'après le principe de superposition,

$$\xi_O(t) = \xi_{O,\mathrm{i}} + \xi_{O,\mathrm{r}} = \xi_0\cos(\omega t) + \xi_0\cos(\omega t + \varphi) = \xi_0\left[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)\right]\,.$$

En utilisant la formule de trigonométrie $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$, on aboutit à

$$\xi_O(t) = 2\xi_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) .$$

Or on sait que O est immobile et donc qu'à tout instant t, $\xi_O(t) = 0$. Pour que la forme mathématique précédente soit compatible avec cette contrainte, et comme $\cos(\omega t + \varphi/2)$ ne peut pas être nul à tout instant, alors il faut mathématiquement que $\xi_0 = 0$ ou $\cos(\varphi/2) = 0$. Avoir $\xi_0 = 0$ signifie qu'il n'y a pas d'onde sur la corde : c'est physiquement faux. On en déduit donc que

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\varphi}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\varphi = \pm\pi}$$

en choisissant le déphasage entre $-\pi$ et π.

4 L'ébranlement associé à l'onde incidente est celui détaillé plus haut,

$$\xi_{M,\mathrm{i}}(t) = \xi_0 \cos(\omega t + kx) .$$

Celui associé à l'onde réfléchie s'en déduit en prenant en compte le sens de propagation inversé et le déphasage de π,

$$\xi_{M,\mathrm{r}}(t) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \pi) .$$

Enfin, d'après le principe de superposition,

$$\xi_M(t) = \xi_{M,\mathrm{i}}(t) + \xi_{M,\mathrm{r}}(t) = \xi_0 \left[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx - \pi)\right] .$$

En utilisant la formule d'addition des cosinus,

$$\xi_M(t) = 2\xi_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

soit finalement

$$\boxed{\xi_M(t) = -2\xi_0 \sin(\omega t)\sin(kx) .}$$

On retrouve **une structure d'onde stationnaire**.

5 Les nœuds de vibration se trouvent aux points où l'amplitude de vibration est nulle, c'est-à-dire en x_n tels que

$$\sin(kx_n) = 0 \qquad \text{soit} \qquad kx_n = n\pi \qquad \text{donc} \qquad x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi\lambda}{2\pi}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{x_n = n\frac{\lambda}{2} .}$$

Le cas $n = 0$ redonne bien qu'il y a un nœud en $x = 0$, c'est-à-dire en O.

Les ventres de vibrations se trouvent aux points où l'amplitude est maximale, c'est-à-dire en $x_{n'}$ tels que

$$\sin(kx_{n'}) = \pm 1 \qquad \text{soit} \qquad kx_{n'} = \frac{\pi}{2} + n'\pi \qquad \text{donc} \qquad x_{n'} = \frac{\pi}{2k} + \frac{n'\pi}{k} = \frac{\pi\lambda}{4\pi} + \frac{n'\pi\lambda}{2\pi}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{x_{n'} = \frac{\lambda}{4} + n'\frac{\lambda}{2} .}$$

Annale de concours

Exercice 8 : Sonar [CCP TSI 2016]

1 Le récepteur permet d'avoir accès au temps mis par une impulsion ultra-sonore pour aller se réfléchir sur le second sous-marin et revenir. Connaissant la vitesse du son dans l'eau, un calculateur peut alors en déduire la distance séparant les deux sous-marins.

> *Les points à évoquer absolument sont que le sonar envoie des impulsions (et pas une OPH continue), que ces impulsions se réfléchissent, et que la méthode implique que leur célérité est connue.*

2 Pendant la durée τ, l'impulsion parcourt une distance $2L$, d'où

$$\tau = \frac{2L}{c} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L = \frac{c\tau}{2} = 300\,\mathrm{m}\,.}$$

3 Sur la figure de l'énoncé, on compte deux périodes et demi pendant la durée Δt, donc

$$\Delta t = \frac{5}{2}T \qquad \text{soit} \qquad T = \frac{2}{5}\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f = \frac{5}{2\Delta t} = 5\,\mathrm{kHz}\,.}$$

4 La longueur spatiale de l'impulsion vaut

$$\Delta x = c_{\mathrm{mer}}\,\Delta t = 75\,\mathrm{cm}\,.$$

5 À l'instant $t = 0$, l'avant de l'impulsion se trouve en $x = 0$. À l'instant t, il se trouve en

$$x_{\mathrm{avt}}(t) = c_{\mathrm{mer}}\,t = 18\,\mathrm{m}\,.$$

L'arrière de l'impulsion est émis du point $x = 0$ au bout de Δt. À l'instant t, il se trouve donc en

$$x_{\mathrm{arr}}(t) = c_{\mathrm{mer}}(t - \Delta t) = 17{,}25\,\mathrm{m}\,.$$

L'impulsion est représentée figure 9.

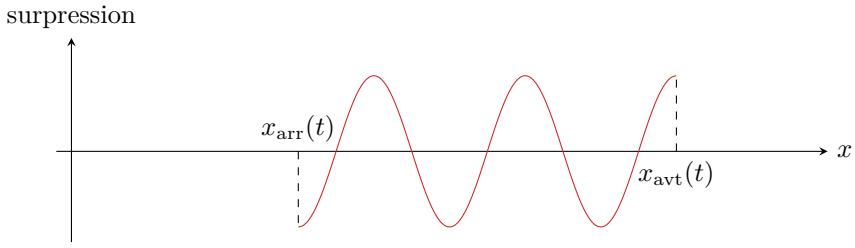


Figure 9 – Représentation spatiale de l'impulsion à $t = 12$ ms..

> *Penser à bien vérifier que $x_{\mathrm{avt}}(t) - x_{\mathrm{arr}}(t) = \Delta x$ ... à moins que vous n'ayiez directement utilisé ce résultat pour calculer $x_{\mathrm{arr}}(t)$.*
>
> *Attention sur la figure : l'avant de l'onde est la partie émise en premier, donc pour laquelle la surpression est positive.*

6 L'onde met un temps $\tau = 400\,\mathrm{ms}$ pour faire l'aller-retour entre les deux sous-marins, il ne lui faut donc que $\tau/2 = 200\,\mathrm{ms}$ pour parcourir la distance aller. L'impulsion est représentée figure 10.

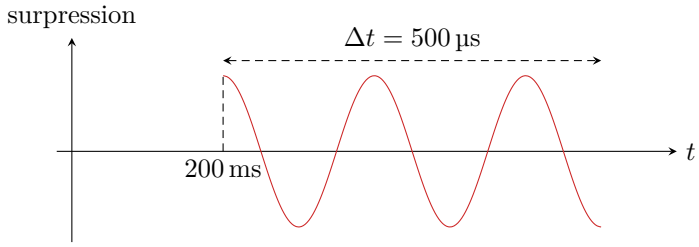


Figure 10 – Représentation spatiale de l'impulsion à $t = 12$ ms..