



Systèmes linéaires

Lissage d'une tension hachée

A - Analyse qualitative du montage

1 Avec un pont diviseur de tension, il y aurait **dissipation d'énergie par effet Joule** dans la deuxième résistance, ce qui n'est pas conforme au point (3) du cahier des charges. On peut également mentionner que le contrôle du rapport cyclique serait moins simple, car il faudrait faire varier les résistances.

2 Si les deux interrupteurs sont fermés simultanément, alors le générateur est court-circuité, c'est-à-dire que les interrupteurs imposent une tension nulle à ses bornes, ce qui n'est pas compatible avec sa fém E et le détériore. Par suite, obtenir $u_2 = 0$ nécessite d'avoir K_2 fermé, et donc K_1 ouvert. Pour obtenir $u_2 = E$, il faut avoir K_1 fermé (le générateur est alors monté en parallèle de K_2) et K_2 ouvert.

3 Les variations du signal sont codées dans ses harmoniques, qu'il faut éliminer pour avoir un signal constant. On doit pour cela utiliser un **filtre passe-bas**, qui ne conserverait idéalement que la composante continue de u_2 . Dans la limite des basses fréquences, la bobine équivaut à un fil donc tout se passe comme si R était montée en parallèle de K_2 donc $u = u_2$. À l'inverse, dans la limite des hautes fréquences, la bobine équivaut à un interrupteur ouvert, aucun courant ne traverse donc la résistance R et ainsi $u = 0$. Le filtre a donc bien un comportement de type **passe-bas**.

B - Choix du rapport cyclique

4 La valeur moyenne d'un signal est égale à sa composante continue, c'est-à-dire le terme constant du développement de Fourier. Il vient directement

$$\langle u_2 \rangle = \alpha E$$

C'est un résultat à connaître et directement utilisable. Rappelons-en la démonstration. Par linéarité de la moyenne,

$$\langle u_2 \rangle = \langle \alpha E \rangle + \left\langle \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(\pi n \alpha)|}{n} \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \right\rangle = \alpha E + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(\pi n \alpha)|}{n} \langle \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle$$

Attention à la façon dont vous traitez les préfacteurs : pour une fonction f et une constante a , on a bien $\langle a f \rangle = a \langle f \rangle$, mais par contre pour deux fonctions f et g , $\langle f g \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle$. Ici, $\sin(\pi n \alpha)$ est une constante, on peut donc le sortir de la moyenne ... mais évidemment affirmer $\langle \sin(\pi n \alpha) \rangle = 0$ n'a aucun sens. Comme par ailleurs une fonction harmonique est de moyenne nulle, alors pour tout n , $\langle \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \rangle = 0$, d'où le résultat

5 En utilisant les valeurs lues graphiquement,

$$\langle u_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E \, dt + 0 = \frac{1}{T} \times \alpha T E.$$

On peut également passer par un calcul d'aire sous la courbe, mais d'une part cela me semble moins intuitif que simplement lire la valeur, d'autre part il faut l'expliquer un minimum !

6 Il faut choisir

$$\alpha = \frac{U_0}{E},$$

ce qui impose $0 \leq U_0 \leq E$.

C - Calcul numérique de la tension u

7 Il s'agit simplement de comparer le « temps réduit » t_{per} à αT et d'agir en conséquence.

```

1  def calc_u2(t):
2      """
3      Renvoie la valeur de la tension u2 à l'instant t en fonction du
4      rapport
5      cyclique alpha.
6      """
7      t_per = t - np.floor(t/T) * T # décalage de l'origine des temps
8
9      if t_per < alpha*T:
10         return E
11     else:
12         return 0

```

Le temps réduit est forcément positif par construction : la partie entière du flottant est inférieure ou égale à ce flottant, il n'y a donc pas besoin de vérifier que t_{per} est positif. Pour ceux qui l'auraient fait, attention aux doubles inégalités, qui ne sont pas acceptées par Python. Il faut utiliser deux inégalités simples séparées d'un **and**.

8 Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{u}{u_2} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

ce qui permet d'identifier

$$\omega_c = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}.$$

9 Traduisons cette fonction de transfert dans le domaine temporel. Par un produit en croix,

$$\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_c}\right) u = u_2$$

d'où on déduit

$$u + \frac{1}{\omega_c} \frac{du}{dt} = u_2$$

soit en réorganisant les termes

$$\frac{du}{dt} + \omega_c u = \omega_c u_2.$$

10 Par application du schéma d'Euler explicite, on obtient

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + \omega_c u_n = \omega_c u_2(t_n).$$

ce qui se réécrit

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \omega_c (u_2(t_n) - u_n).$$

11 Ici, la liste des instants auxquels le calcul est fait est donnée en argument à la fonction. Il n'est donc pas nécessaire de la créer, et le pas de temps est simplement la différence entre les deux premiers instants de la liste `lst_t`. La valeur $u_2(t_n)$ se calcule à l'aide de la fonction `calc_u2`.

```

1  def calc_u(L, lst_t):
2      """
3      Renvoie une liste contenant la valeur de u(t) pour
4      chaque instant appartenant à la liste lst_t.
5      """
6      omega_c = R/L

```

```

8      N = len(lst_t)
9      dt = lst_t[1] - lst_t[0] # pas de temps

11     ### Initialisation :
12     u = [None for n in range(N)]
13     u[0] = alpha * E

15     for n in range(N-1):
16         u[n+1] = u[n] + dt * omega_c * (calc_u2(lst_t[n]) - u[n])

18     return u

```

12 On constate clairement que les fluctuations de u sont d'autant plus faibles que l'inductance est élevée, il vaut donc mieux choisir une bobine **de grande inductance**. Ces fluctuations sont associées aux harmoniques présentes dans le spectre de u , qui sont d'autant plus atténuées par le filtre que sa fréquence de coupure est faible, ce qui est d'autant plus le cas que la valeur de L est élevée.

Attention à ne pas se tromper dans le raisonnement : ici la fréquence f du signal est fixée et imposée, c'est la fréquence de coupure du filtre que l'on fait varier via le choix de l'inductance L .

D - Taux d'ondulation

13 L'harmonique fondamentale correspond à $n = 1$ dans le développement de Fourier, et elle est de fréquence f_0 égale à la fréquence du signal. Pour la tension d'entrée du filtre $u_2(t)$, elle est d'amplitude

$$U_{2,1} = \frac{2E}{\pi} \frac{|\sin(\alpha\pi)|}{1},$$

et en sortie du filtre

$$U_1 = |\underline{H}(f_0)| U_{2,1}$$

ce qui donne bien

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_0/f_c)^2}} \frac{2E}{\pi} |\sin \alpha\pi|.$$

Fréquence et pulsation étant proportionnelles, la fonction de transfert peut s'écrire sous les deux formes :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} = \frac{1}{1 + jf/f_c}.$$

14 En ne considérant que cette harmonique fondamentale,

$$u(t) \simeq U_0 + U_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{(U_0 + U_1) - (U_0 - U_1)}{U_0} = \frac{2U_1}{U_0}.$$

Dans la limite $f_c \ll f_0$, on peut approximer

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f_0/f_c)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{(f_0/f_c)^2}} = \frac{1}{f_0/f_c} = \frac{f_c}{f_0}$$

ce qui donne pour le taux d'ondulation

$$\eta = \frac{2 \frac{f_c}{f_0} \frac{2E}{\pi} |\sin \alpha\pi|}{\alpha E} = \frac{4f_c}{\pi \alpha f_0} |\sin \alpha\pi|.$$

En reprenant l'expression de la fréquence de coupure,

$$\eta = \frac{4}{\pi \alpha f_0} \times \frac{R}{2\pi L} \times |\sin \alpha\pi| \quad \text{soit} \quad \eta = \frac{2R}{\pi^2 \alpha f_0 L} |\sin \alpha\pi|.$$

15 C'est immédiat en utilisant les fonctionnalités permises par **numpy** :

```

1 | def calc_eta(L, lst_t):
2 |     u = calc_u(L, lst_t)
3 |     return (np.max(u) - np.min(u)) / np.mean(u)

```

16 Dans la limite des (très) faibles valeurs de L , la fréquence de coupure du filtre devient très élevée, et on atteint le domaine $f_0 \ll f_c$. Le signal est alors transmis à l'identique par le filtre : $u(t) \simeq u_2(t)$. Dans ce cas,

$$\eta \simeq \frac{E - 0}{\alpha E} = \frac{1}{\alpha}$$

La valeur de η est indépendante de L et supérieure à 1, deux aspects qui se retrouvent sur la courbe analysée.

À l'inverse, dans la limite des grandes valeurs de L , la fréquence de coupure du filtre devient très faible, et on se trouve dans le domaine étudié question 14. On a alors

$$\eta = \frac{2R}{\pi^2 \alpha f_0 L} |\sin \alpha \pi| = \frac{k}{L} \quad \text{soit} \quad \log \eta = -\log L + \log k$$

ce qui se traduit par une droite de pente -1 en échelle logarithmique, que l'on retrouve bien sur la droite de la courbe étudiée.

Enfin, on s'attend à ce que la transition entre les « petites » et les « grandes » valeurs de L se fasse lorsque la fréquence de coupure du filtre est égale à la fréquence du hachage, ce qui se traduit par

$$f_c = f_0 \quad \text{soit} \quad \frac{R}{2\pi L} = f_0 \quad \text{d'où} \quad L = \frac{R}{2\pi f_0} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

et c'est en effet autour de cette valeur qu'apparaît le point d'inflexion de la courbe donnée.