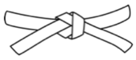
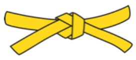
BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

DM 2 – à rendre lundi 18 septembre

Systèmes linéaires

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Partie C uniquement
	Ceinture jaune	Questions 1 à 12
	Ceinture rouge	Questions 1 à 14
	Ceinture noire	Totalité du sujet

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Lissage d'une tension hachée

La problématique abordée dans ce sujet est celle de la conversion statique de puissance électrique. À partir d'un générateur de tension constante $E = 12\,\mathrm{V}$, le but est d'alimenter un récepteur électrique assimilable[1] à une résistance $R = 100\,\Omega$. Les trois contraintes à vérifier par le système d'alimentation sont les suivantes :

(1) la tension u aux bornes de R doit être quasi-constante, c'est-à-dire très peu fluctuer autour de sa valeur moyenne U_0 ;
(2) cette valeur moyenne U_0 doit être réglable ;
(3) le dispositif d'alimentation ne doit pas consommer d'énergie.

Le dispositif adéquat est un hacheur série associé à une inductance de lissage, que vous avez probablement déjà croisé en SI. L'objectif est de comprendre pourquoi il satisfait au cahier des charges énoncé ci-dessus et comment le dimensionner.

Le schéma du montage est représenté figure 1. Le hacheur proprement dit est constitué des interrupteurs K_1 et K_2, qui désignent respectivement un transistor et une diode, au sujet desquels la seule chose à savoir est qu'ils peuvent être commandés de manière périodique avec une fréquence $f_0 = 500\,\mathrm{Hz}$ et un rapport cyclique α. La tension u_2 a l'allure donnée figure 1, dont le développement de Fourier s'écrit

$$u_2(t) = \alpha E + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(\pi n \alpha)|}{n} \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)\,.$$

Ensuite, la tension de sortie du hacheur est filtrée par l'association de l'inductance de lissage L et de la résistance R pour donner la tension u.

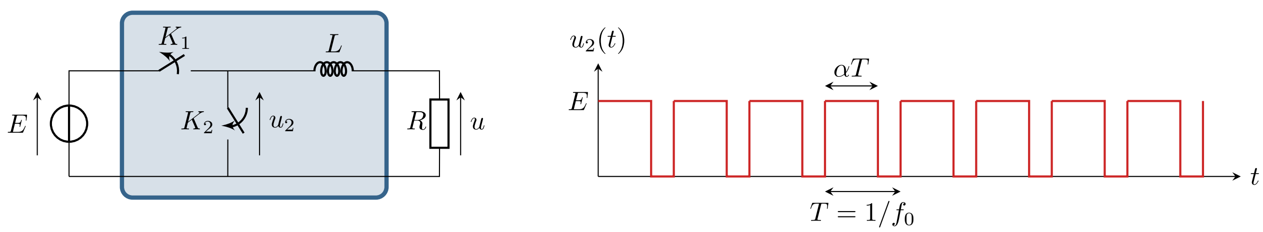


Figure 1 – Hacheur série et inductance de lissage.

1. La résistance R est appelée *impédance d'entrée* du récepteur, c'est le dipôle auquel il est équivalent « vu de l'extérieur ».

A - Analyse qualitative du montage

1 - Une première idée pour abaisser une tension continue consiste à utiliser un pont diviseur de tension. Justifier brièvement qu'un tel montage ne peut pas respecter le cahier des charges fixé ici.

2 - Les deux interrupteurs K_1 et K_2 ne peuvent pas être fermés simultanément, sous peine d'endommager l'installation. Pourquoi ? En déduire l'état ouvert ou fermé des deux interrupteurs produisant chaque valeur de u_2.

3 - Quel type de filtrage la tension u_2 doit-elle subir pour satisfaire au cahier des charges ? Montrer sans calcul que l'association R, L le réalise bien.

B - Choix du rapport cyclique

Commençons par déterminer le rapport cyclique permettant d'obtenir la valeur U_0 voulue. On suppose pour cette partie seulement que le filtrage réalisé par la cellule R, L est parfait :

$$u = \langle u_2 \rangle = \text{cte}\,.$$

On rappelle que la valeur moyenne d'un signal périodique se calcule par la relation

$$\langle u_2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4 - Identifier $\langle u_2 \rangle$ à partir du développement de Fourier.

5 - Retrouver ce résultat par un calcul prenant appui sur le chronogramme de u_2 représenté figure 1.

6 - En déduire comment choisir α pour obtenir $u = U_0$. À quel intervalle de valeurs la tension U_0 est-elle restreinte ?

C - Calcul numérique de la tension u

Étudier les fluctuations de u autour de sa valeur moyenne U_0 exige de la calculer explicitement. La forme de u_2 ne permettant pas facilement de réaliser le calcul à la main, on réalise un calcul numérique basé sur la méthode d'Euler.

Un extrait de code à compléter est donné en dernière page de l'énoncé. Les valeurs de E, R, α et de la fréquence de hachage f_0 sont choisies comme des variables globales. Il vous est demandé d'écrire certaines parties de code sur votre copie comme vous le ferez lors des épreuves écrites, pas de produire un code Python fonctionnel complet.

7 - Compléter la fonction `calc_u2(t)` conformément à la figure 1. La fonction `np.floor` appliquée à un flottant positif renvoie la partie entière de ce flottant : par exemple, `np.floor(7.8)` renvoie `7.0`. Ainsi, les valeurs prises par la variable `t_per` sont forcément comprises entre 0 et T : tout se passe comme si l'origine du temps avait été décalée au début de la période courante.

8 - Établir la fonction de transfert $\underline{u}/\underline{u_2}$ du filtre formé par la bobine L et la résistance R. Identifier sa pulsation de coupure puis sa fréquence de coupure f_c.

9 - En déduire la relation différentielle reliant $u(t)$ à $u_2(t)$.

10 - Appliquer le schéma d'Euler explicite pour établir une relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les valeurs $u_n = u(t_n)$ à un ensemble d'instants t_n séparés d'un pas de temps Δt.

11 - Compléter la fonction `calc_u`, prenant en argument la valeur `L` de l'inductance de lissage et une liste d'instants `lst_t`. On prendra $u(t{=}0) = \alpha E$. N'oubliez pas de définir le pas de temps.

12 - On obtient les courbes de la figure 2 pour différentes valeurs de L. Est-il préférable d'utiliser une grande ou une petite valeur d'inductance ? Interpréter à la lumière de la question 8.

D - Taux d'ondulation

Pour quantifier les fluctuations de u autour de sa valeur moyenne, on utilise usuellement le taux d'ondulation défini par

$$\eta = \frac{u_\text{max} - u_\text{min}}{\langle u \rangle}\,.$$

On cherche à exprimer η en fonction de L.

13 - Commençons par une approche analytique, en considérant pour faire simple que les fluctuations ne sont dues qu'à la première harmonique présente dans le spectre de u. Montrer que son amplitude vaut

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_0/f_\mathrm{c})^2}}\,\frac{2E}{\pi}\,|\sin \alpha\pi|\,.$$

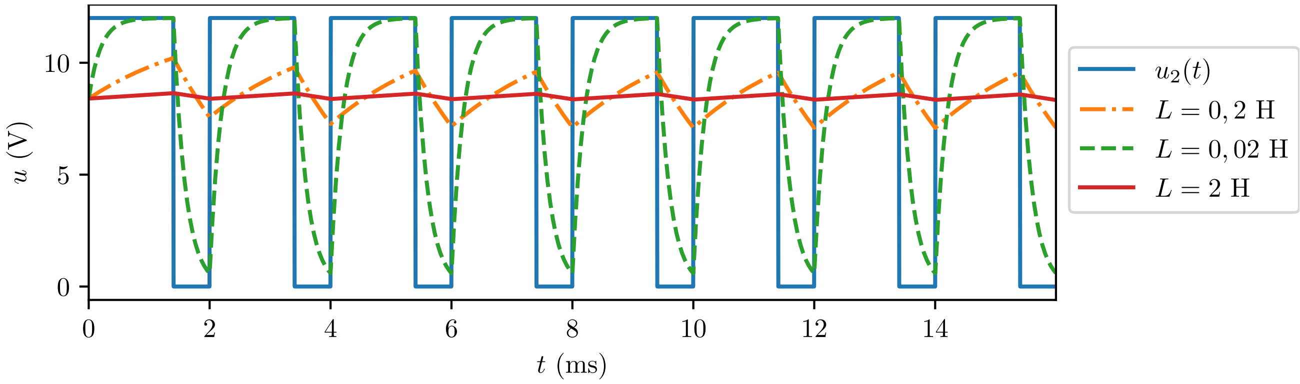


Figure 2 – Courbes représentant $u(t)$ calculées via la méthode d'Euler. Version couleur disponible en ligne

14 - Exprimer le taux d'ondulation η en fonction notamment de R, L et α dans la limite où la fréquence de coupure f_c du filtre R, L est très inférieure à la fréquence de hachage f_0.

15 - Pour aller plus loin, on retourne à une étude numérique. Écrire une fonction `calc_eta(L)` s'appuyant sur les fonctions écrites précédemment et renvoyant la valeur numérique du taux d'ondulation en fonction de la valeur de L.

16 - Cette fonction permet d'obtenir la courbe de la figure 3. L'analyser aussi précisément que possible : interpréter physiquement l'allure pour les faibles valeurs de L, celle pour les grandes valeurs de L, ainsi que la valeur critique à laquelle a lieu le changement de comportement. Aucun calcul compliqué n'est attendu.

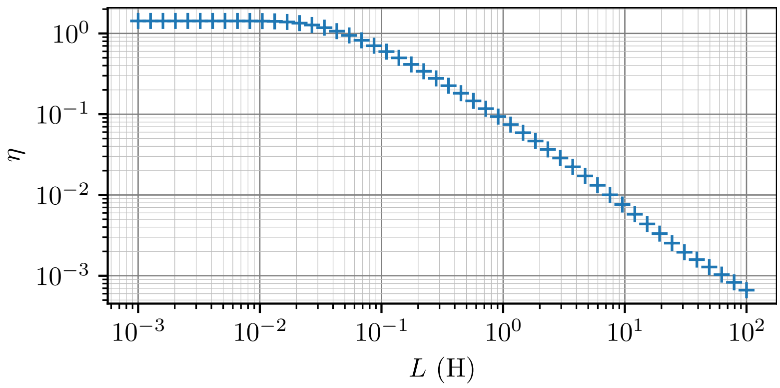


Figure 3 – Taux d'ondulation en fonction de l'inductance de lissage. Les deux axes sont gradués en échelle logarithmique.

Base de code à compléter

```python
import numpy as np

E = 12       # en V

f0 = 500     # en Hz
T = 1/f0     # en s

R = 100      # en ohms

alpha = 0.7 # sans unité

def calc_u2(t):
    """
    Renvoie la valeur de la tension u2 à l'instant t.
    """
    t_per = t - np.floor(t/T) * T  # décalage de l'origine des temps

    # à compléter


def calc_u(L, lst_t):
    """
    Renvoie une liste contenant la valeur de u(t) pour
    chaque instant appartenant à la liste lst_t.
    """

    # à compléter

    return u
```