Principes thermodynamiques

I - Étude d'une pompe à chaleur pédagogique

Centrale TSI 2016

I.A - Modèle de Carnot

I.A.1.a Cours Trois échanges énergétiques étant mis en jeu,

$$\boxed{\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_\mathrm{f} + Q_\mathrm{c} + W \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0\,.}$$

L'écriture est la même que le cycle soit réversible ou non.

I.A.1.b Cours Le fluide échange de l'entropie avec deux sources, donc

$$\Delta S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{Q_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} + \frac{Q_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} + \cancel{S_\mathrm{cr}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{Q_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} + \frac{Q_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = 0\,.}$$

Le terme d'entropie créée ne se simplifie que si le cycle est réversible, l'écriture encadrée dépend donc de cette hypothèse.

I.A.2.a Cours Le but d'une PAC est de réchauffer, c'est-à-dire fournir de l'énergie, à la source chaude donc $Q_\mathrm{c} < 0$ (sens réel de l'échange du fluide vers la source). Une partie de cette énergie est prélevée à la source froide, donc $Q_\mathrm{f} > 0$, et l'autre partie vient du travail $W > 0$ apporté au niveau du compresseur.

> *Cette question peut paraître difficile en début d'année, mais pas d'inquiétude : le fonctionnement des pompes à chaleur sera revu dans le cours de thermodynamique industrielle.*

I.A.2.b D'après le bilan d'entropie,

$$\frac{Q_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = -\frac{Q_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{|Q_\mathrm{f}|}{|Q_\mathrm{c}|} = \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}} < 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{|Q_\mathrm{f}| < |Q_\mathrm{c}|\,.}$$

La pompe à chaleur fournit plus d'énergie à la source chaude qu'elle n'en prélève à la source froide, le reste provenant du travail reçu au niveau du compresseur.

> *Ce résultat est complètement évident si on regarde le sens réel des échanges énergétiques sur le diagramme des échanges ! Sauf qu'ici on a montré par les principes thermodynamiques qu'il ne pouvait pas en être autrement, ce qui revient à dire qu'on a « démontré » le diagramme des échanges.*

I.A.3.a Cours En supposant une utilisation en réfrigérateur (ce qui est une hypothèse un peu bizarre, bien que tout à fait cohérente sur le plan thermodynamique), alors

$$\boxed{\eta_\mathrm{fc} = \frac{Q_\mathrm{f}}{W}\,.}$$

En combinant les deux principes thermodynamiques pour éliminer Q_c, il vient

$$\frac{Q_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} + \frac{-Q_\mathrm{f} - W}{T_\mathrm{c}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \left(\frac{1}{T_\mathrm{f}} - \frac{1}{T_\mathrm{c}}\right) Q_\mathrm{f} - \frac{W}{T_\mathrm{c}} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c}}{\cancel{T_\mathrm{c}}\, T_\mathrm{f}} Q_\mathrm{f} - \frac{W}{\cancel{T_\mathrm{c}}} = 0$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\eta_\mathrm{fc} = \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}}\,.}$$

La méthode est générale et à retenir : pour exprimer le rendement de Carnot, on utilise le premier principe pour remplacer l'échange thermique inintéressant dans le second principe, et on manipule l'équation pour faire apparaître la définition du rendement.

I.A.3.b Numériquement,

$$\eta_{\mathrm{fc}} = \frac{273}{26} = 10{,}5$$

Attention à convertir les températures en Kelvin !

I.A.3.c Classique L'hypothèse de réversibilité conduit à surestimer fortement l'efficacité de la machine : pour un frigo classique, elle est plutôt de l'ordre de 3 que de 10 ...

I.A.4.a Cours En reprenant exactement le même raisonnement qu'à la question précédente,

$$\boxed{\eta_{\mathrm{cc}} = -\frac{Q_{\mathrm{c}}}{W} = \frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{f}}}\,.}$$

I.A.4.b Numériquement,

$$\eta_{\mathrm{cc}} = \frac{273 + 26}{26} = 11{,}5$$

L'efficacité est supérieure à celle du frigo (ce qui est évident puisque $T_{\mathrm{c}} > T_{\mathrm{f}}$) mais là aussi largement surestimée. Une PAC domestique a plutôt une efficacité de l'ordre de 7 dans les conditions optimales de fonctionnement.

I.B - Modèle des pseudo-sources

I.B.1.a Pendant une durée infinitésimale,

$$\boxed{\mathrm{d}U \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \delta Q_{\mathrm{f}} + \delta Q_{\mathrm{c}} + \delta W \underset{\text{cycle}}{\underset{\uparrow}{=}} 0\,.}$$

La réponse est quasiment immédiate vue la partie précédente, si bien que la question ne porte en fait que sur la rigueur des notations.

La formulation « cycle infinitésimal » se rencontre « classiquement » mais me semble assez peu claire : il serait plus rigoureux de parler de premier principe pendant une durée infinitésimale, le régime permanent de la PAC étant atteint, la nullité de dU venant de l'hypothèse de stationnarité. Cela donne exactement la même équation ... et c'est plus parlant.

I.B.1.b De même, le cycle étant supposé réversible,

$$\mathrm{d}S \underset{\text{2nd P}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{\delta Q_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{f}}} + \frac{\delta Q_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}} + \cancel{\delta S_{\mathrm{cr}}} \underset{\text{cycle}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\delta Q_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{f}}} + \frac{\delta Q_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}} = 0\,.}$$

I.B.2.a Procédons à un bilan d'énergie interne pour la source froide pendant une durée infinitésimale. Elle **cède** le transfert thermique δQ_{f} au fluide caloporteur. Ainsi,

$$\mathrm{d}U_{\mathrm{f}} \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} -\delta Q_{\mathrm{f}} \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}T_{\mathrm{f}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\delta Q_{\mathrm{f}} = -m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}T_{\mathrm{f}}\,.}$$

Attention au changement de point de vue : cette fois, c'est la source froide le système !

I.B.2.b De même,

$$\boxed{\delta Q_{\mathrm{c}} = -m_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}T_{\mathrm{c}}\,.}$$

I.B.2.c La relation s'obtient immédiatement en combinant avec la question I.B.1.b,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{f}}} + \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}} = 0\,.}$$

I.B.3.a Difficile La température de la source chaude augmente au cours du temps et celle de la source froide diminue, ce qui est logique : prélever de l'énergie à la source froide pour en fournir à la source chaude est le principe même de la pompe à chaleur ! D'un point de vue plus mathématique, d'après la question I.B.2.a,

$$\mathrm{d}T_\mathrm{f} = -\frac{1}{m_\mathrm{e} c_\mathrm{e}} \delta Q_\mathrm{f} < 0$$

ce qui veut dire que T_f diminue. On justifie de même que T_c augmente. Par ailleurs, on constate que $\sqrt{T_\mathrm{c}\, T_\mathrm{f}}$ et donc $T_\mathrm{c}\, T_\mathrm{f}$ sont des constantes. Pour le justifier, exprimons la différentielle,

$$\mathrm{d}(T_\mathrm{c}\, T_\mathrm{f}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad T_\mathrm{c}\, \mathrm{d}T_\mathrm{f} + T_\mathrm{f}\, \mathrm{d}T_\mathrm{c} = 0$$

et en divisant par $T_\mathrm{c}\, T_\mathrm{f}$ on retrouve

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = 0\,.}$$

ce qui est exactement le résultat de la question précédente.

> *Attention à la précision de vos réponses : « commenter » ne veut pas dire décrire mais plutôt « interpréter », « justifier » ou encore « donner des arguments physiques permettant de comprendre ». Les variations de T_c et T_f sont très intuitives, en revanche il est impossible de justifier que $\sqrt{T_\mathrm{c} T_\mathrm{f}} = \mathrm{cte}$ sans passer par un calcul de différentielle.*

I.B.3.b Difficile On constate que la température T_f se stabilise autour de 273 K ... c'est-à-dire la température de solidification de l'eau. Ainsi, au delà de 1500 s, de la glace se forme dans le seau correspondant à la source froide. Le transfert thermique δQ_f n'est plus associé à une variation $\mathrm{d}T_\mathrm{f}$ de température, mais à la solidification d'une masse $\mathrm{d}m$ d'eau. Ainsi,

$$\boxed{\delta Q_\mathrm{f} = \mathrm{d}m\, \Delta_\mathrm{fus} h > 0}$$

avec $\Delta_\mathrm{fus} h$ l'enthalpie de fusion de l'eau.

> *Attention, $\Delta_{fus}h$ est une constante, qui ne peut pas « devenir » infinitésimale : écrire $\mathrm{d}_{fus}h$ n'a aucun sens.*

I.B.4.a Comme les températures des sources évoluent au cours du temps, les transferts thermiques échangés avec les sources dépendent du temps également. Ainsi, définir l'efficacité globalement, sur toute la durée de fonctionnement de la PAC, n'a pas de sens. Il est plus pertinent de définir une efficacité instantané en raisonnant sur un cycle infinitésimale comme le fait l'énoncé.

I.B.4.b Les calculs sont formellement identiques à ceux de la questions I.A.4.b, si ce n'est que les échanges énergétiques sont infinitésimaux. On aboutit au même résultat, à savoir

$$\eta_\mathrm{t} = \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}}$$

... mais attention, les températures dépendent du temps.

I.B.4.c La forme cherchée suggère clairement de multiplier par T_c le numérateur et le dénominateur dans l'expression précédente, soit

$$\eta_\mathrm{t} = \frac{{T_\mathrm{c}}^2}{{T_\mathrm{c}}^2 - T_\mathrm{f} T_\mathrm{c}}$$

et puisque $T_\mathrm{f} T_\mathrm{c} = \mathrm{cte}$ comme discuté question I.B.3.a, la valeur est donnée par la condition initiale $T_\mathrm{c} = T_\mathrm{f} = T_0$, ce qui donne le résultat voulu

$$\boxed{\eta_\mathrm{t} = \frac{{T_\mathrm{c}}^2}{{T_\mathrm{c}}^2 - {T_0}^2}\,.}$$

I.B.4.d L'écart de température entre les sources ΔT augmente au cours du temps :
- ▷ il est initialement nul et η_t diverge, ce qui est globalement cohérent avec la courbe ;
- ▷ il augmente ensuite, η_t diminue donc, ce qui est là aussi raisonnable, avec une allure de type hyperbole cohérente avec l'expression à analyser.

II - Conditionnement d'air d'une voiture

légèrement adapté E3a MP 2017

Régime permanent

1 Par définition de la conductance thermique,

$$\boxed{\Phi = G(T_{\text{ext}} - T_{\text{int}})\,.}$$

2 Procédons à un bilan enthalpique instantané pour l'air de la voiture, qui subit une transformation isobare par hypothèse. Il reçoit les puissances thermiques Φ au travers de la carosserie, np de la part des passagers, et P_1 via le conditionneur. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} \Phi + np + P_1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{RP}}}{=} 0$$

car l'enthalpie du système est constante en régime permanent. On en déduit

$$G(T_{\text{ext}} - T_C) + np + P_1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_1 = G(T_C - T_{\text{ext}}) - np\,.}$$

> *Attention aux raisonnements de type « puissance reçue = puissance cédée », qui conduisent trop souvent à des erreurs de signe. Mieux vaut procéder à un bilan enthalpique rigoureux et le simplifier dans l'hypothèse du régime permanent.*

3 En hiver, $P_1 = 2{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{W}$ et en été $P_1 = -1{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{W}$. Il est logique de trouver $P_1 < 0$ en été, car il faut refroidir la voiture et donc lui prélever un transfert thermique. Le conditionnement n'est pas nécessaire si

$$G(T_C - T_{\text{ext}}) - np = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_{\text{ext}} = T_C - \frac{np}{G} = 291\,\mathrm{K} = 18\,°\mathrm{C}\,.}$$

Cette valeur est raisonnable, légèrement inférieure à T_C en raison de la puissance produite par les occupants de la voiture.

Régime transitoire

4 On reprend le même bilan d'enthalpie, en appliquant cette fois la loi de Joule, soit

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} G(T_{\text{ext}} - T) + np + P_{1,\max} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Joule}}}{=} C\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{G}{C}T = \frac{G}{C}\left(T_{\text{ext}} + \frac{np + P_{1,\max}}{G}\right)\,.$$

On retrouve la forme demandée avec

$$\boxed{\tau = \frac{C}{G} \qquad \text{et} \qquad T_\infty = T_{\text{ext}} + \frac{np + P_{1,\max}}{G}\,.}$$

5 Aucun calcul nécessaire, et notamment pas besoin de résoudre l'équation différentielle : on connaît la valeur initiale, la valeur asymptotique, et il ne reste qu'à tracer la courbe correctement, voir figure 1.

6 La forme générale des solutions de cette équation s'écrit

$$T(t) = T_\infty + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

et à l'instant initial

$$T(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} T_{\text{ext}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} T_\infty + A \qquad \text{d'où} \qquad A = T_{\text{ext}} - T_\infty$$

d'où on déduit

$$\boxed{T(t) = T_\infty + (T_{\text{ext}} - T_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = T_{\text{ext}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

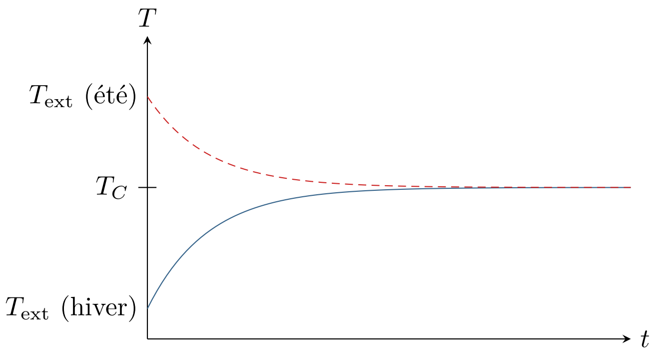

Figure 1 – Évolution de la température dans l'habitacle.

Pour que la température de consigne soit atteinte en une durée Δt, il faut

$$T(t=\Delta t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{imposé}}}{=} T_C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_{\text{ext}}\,\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau} + T_\infty\left(1-\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}\right)$$

Puisque P_1 n'intervient que dans T_∞, on l'isole d'abord,

$$T_\infty = \frac{T_C - T_{\text{ext}}\,\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}}{1-\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}}$$

et enfin

$$P_{1,\max} = G\left(\frac{T_C - T_{\text{ext}}\,\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}}{1-\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}} - T_{\text{ext}}\right) - np$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{P_{1,\max} = \frac{G(T_C - T_{\text{ext}})}{1-\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}} - np\,.}$$

7 Le volume d'air dans la voiture est $V_{\text{air}} = 0{,}5\,H\ell L$. D'après l'équation d'état d'un gaz parfait,

$$\boxed{q = \frac{pV_{\text{air}}}{RT_C} = 216\,\text{mol}\,.}$$

8 Par définition, et pour un gaz parfait,

$$H = U + PV = U + nRT \qquad \text{donc} \qquad H_{\text{m}} = U_{\text{m}} + RT\,.$$

> *La formulation « pour une mole » est équivalente à « molaire ». Vous pouvez éventuellement garder la quantité de matière n dans le calcul et préciser que $n = 1\,\text{mol}$ ... en revanche hors de question de remplacer n par 1 dans le calcul et d'écrire des relations comme $H = U + RT$ pour des raisons d'inhomogénéité.*

Comme H_{m} et U_{m} pour un gaz parfait ne dépendent que de la température, on obtient en dérivant

$$\frac{\mathrm{d}H_{\text{m}}}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U_{\text{m}}}{\mathrm{d}T} + R \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C_{P,\text{m}} = C_{V,\text{m}} + R\,.}$$

Comme de plus $C_{P,\text{m}} = \gamma C_{V,\text{m}}$, on obtient

$$\gamma C_{P,\text{m}} = \gamma C_{V,\text{m}} + \gamma R = C_{P,\text{m}} + \gamma R \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_{P,\text{m}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\,.}$$

9 On obtient

$$\boxed{C = q\,C_{P,\text{m}} = 6{,}3\cdot 10^3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$$

puis $\tau = C/G \simeq 40\,\text{s}$ et

$$\boxed{P_{1,\max} = 4{,}5\cdot 10^3\,\text{W}\,.}$$

Ce résultat est cohérent avec celui du régime permanent, qui correspond à une durée de chauffage très supérieure à τ, auquel il est logiquement légèrement supérieur.

C'est bien la capacité isobare qu'il faut considérer, et pas la capacité thermique isochore : tous les raisonnements sont menés en enthalpie, et le caractère constant de la pression fait partie des hypothèses de travail listées par l'énoncé.

La démarche utilisée peut paraître un peu surprenante, car la capacité thermique des solides est très supérieure à celle des gaz. Ainsi, assimiler la capacité thermique totale de l'habitacle à celle de l'air qu'il contient est une très mauvaise approximation. Je pense néanmoins que la démarche est cohérente compte tenu de l'échelle de temps envisagée : on peut imaginer qu'en deux minutes seulement la température des parties solides (sièges, tableau de bord, etc.) n'a pas encore varié, justement à cause de leur grande capacité thermique, si bien que quasiment toute l'énergie fournie par le conditionneur a été récupérée par l'air. En revanche, pour être complet, il faudrait ajouter dans le bilan thermique les échanges entre l'air réchauffé et les accessoires restés froids.

10 Les équations sont exactement identiques, seule change l'application numérique qui donne

$$\boxed{P_{1,\max} = -1{,}9 \cdot 10^3\,\mathrm{W}\,.}$$