



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

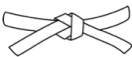
DM 9 – à rendre lundi 4 décembre

Mécanique des fluides

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.



Flasher ce code pour
accéder au corrigé

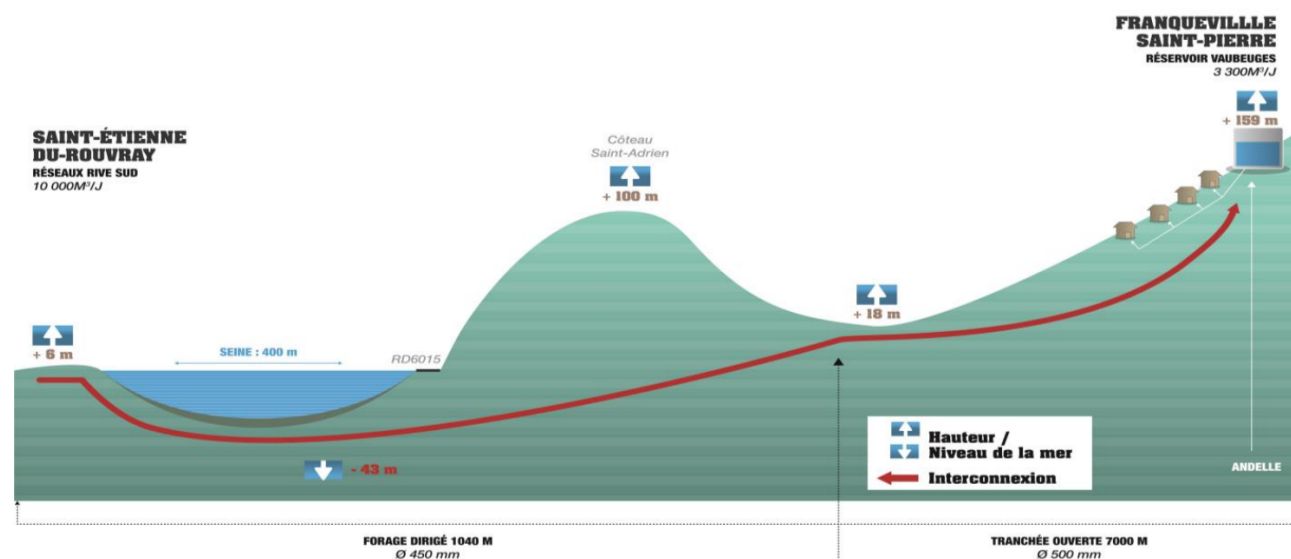
Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 5
	Ceinture jaune	Questions 1 à 8
	Ceinture rouge	Questions 11 à 16
	Ceinture noire	Questions 9 à 16

I - Alimentation en eau du plateau Est rouennais

Document 1 : Une canalisation d'eau potable d'un kilomètre tirée sous la Seine

Plus grande régie publique d'eau de France (hors Paris), la Métropole Rouen Normandie est responsable de la production et l'alimentation en eau potable. Suite au développement de l'urbanisation du plateau Est, il était devenu essentiel de sécuriser l'alimentation en eau de ce secteur en apportant un complément aux ressources existantes de Saint-Aubin-Épinay et de la vallée de l'Andelle. Une adduction d'eau potable a ainsi été créée entre l'usine de production d'eau de la Chapelle, à Saint-Étienne-du-Rouvray, et le nouveau réservoir des Vaubeuges à Franqueville-Saint-Pierre.

Pour ce faire, une canalisation d'eau potable longue d'un kilomètre et de 45 cm de diamètre a été tirée sous la Seine samedi 28 octobre 2017, à l'aide d'une foreuse d'une capacité de tirage de 250 tonnes et de grues, avec un passage à 43 m de profondeur sous la Seine et à 130 m sous la falaise du coteau Saint-Adrien. Des chantiers de cette ampleur sont exceptionnels (une fois par an en France), plus souvent destinés au gaz ou au pétrole.



D'un côté de la Seine se situe le réservoir de Franqueville-Saint-Pierre, qui a été créé en 2014 et est alimenté par les forages de la vallée de l'Andelle. De l'autre, les réseaux de production de la Rive Sud disposent d'une marge d'exploitation. Sept kilomètres de distance les séparent. L'objectif de ce chantier exceptionnel est de pouvoir les

relier grâce à l'installation de trois équipements : une station de pompage à l'usine de la Chapelle à Saint-Étienne-du-Rouvray ; une canalisation sous-fluviale (longueur 1000 m, diamètre 450 mm) et une canalisation de liaison côté plateau Est entre Saint-Adrien et le réservoir des Vaubeuges à Franqueville-Saint-Pierre (longueur 7000 m, diamètre 500 mm).

Adapté du dossier de presse de la Métropole Rouen Normandie, 28 octobre 2017

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'ordre de grandeur de la puissance nécessaire de la station de pompage construite à Saint-Étienne-du-Rouvray. Pour simplifier, on modélisera les deux canalisations sous-fluviale et de liaison par une unique conduite de diamètre $D = 500$ mm et de longueur $L = 8$ km. On suppose de plus que l'eau est pompée dans un bassin de diamètre très supérieur à celui de la conduite, et qu'elle ressort à la pression atmosphérique.

Données : masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

1 - En supposant l'installation dimensionnée pour un débit maximal $D_V = 10\,000 \text{ m}^3$ par jour, estimer la vitesse débitante de l'écoulement et son nombre de Reynolds. Comment qualifier l'écoulement ?

2 - Par application de la relation de Bernoulli, déterminer la puissance indiquée requise pour compenser la dénivellation en négligeant toute perte de charge et en considérant le débit maximal.

En pratique, la conduite est le siège d'une perte de charge régulière que l'on décrit par l'équation de Darcy-Weisbach,

$$\frac{\Delta h}{L} = \Lambda \frac{V^2}{2gD},$$

avec Λ (lambda majuscule) le coefficient de perte de charge, V la vitesse débitante dans la conduite, et g l'intensité de la pesanteur. Lorsque l'écoulement est turbulent, le coefficient de perte de charge peut s'estimer à partir de l'abaque de Moody représentée figure 1. La hauteur typique de rugosité de la conduite peut être estimée à $e = 0,5$ mm.

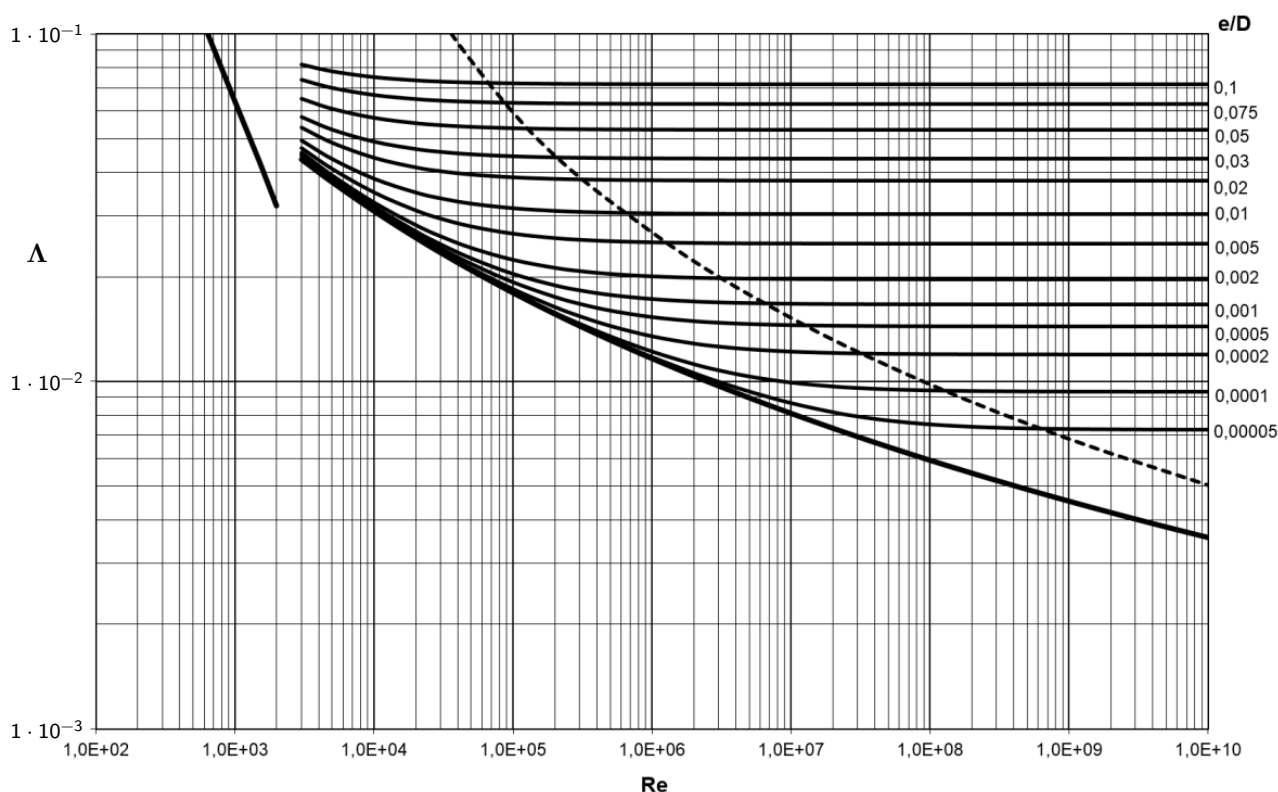


Figure 1 – Diagramme de Moody.

3 - En expliquant le raisonnement, déterminer la valeur numérique de Λ .

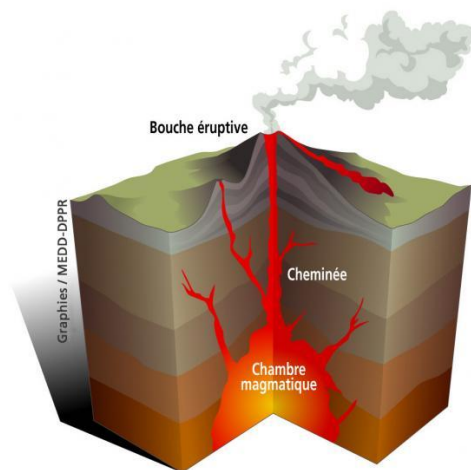
4 - Déterminer la perte de charge Δh entre le bassin de pompage et le réservoir sous forme d'une hauteur équivalente. En déduire la puissance indiquée que la station de pompage doit être en mesure de fournir pour garantir le débit voulu malgré les pertes de charge. Comparer au résultat de la question 2.

5 - En supposant que la station de pompage a un rendement de 85 %, déterminer la puissance électrique nécessaire. Commenter le résultat, sachant que la consommation électrique annuelle de la ville de Rouen est d'environ $2 \cdot 10^8$ kWh.

On cherche enfin à identifier le point de l'installation où la pression est maximale, qui peut être ou bien la sortie de la station de pompage, ou bien le point le plus bas de l'installation que l'on suppose se trouver sous la Seine à 500 m de la station de pompage. On suppose le débit maximal dans la conduite.

- 6 - Expliquer qualitativement pourquoi il peut a priori s'agir de l'un ou l'autre de ces deux points.
- 7 - Calculer la pression P_s de l'eau en sortie de la station de pompage.
- 8 - Déterminer la perte de charge Δh_b au point bas. En déduire la pression P_b en ce point. Conclure.

II - Remontée du magma



Lors d'une éruption volcanique, le magma stocké dans une chambre magmatique remonte à la surface le long d'une cheminée volcanique quasiment verticale. L'objectif de l'exercice est d'estimer l'ordre de grandeur de la pression régnant dans la chambre magmatique et permettant la remontée du magma. Le magma est modélisé par un liquide incompressible de masse volumique $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 20 \text{ kPa} \cdot \text{s}$, en écoulement stationnaire avec un débit de $50 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La cheminée est modélisée par un cylindre parfait de rayon $R = 10 \text{ m}$ et de hauteur $H = 5 \text{ km}$.

La remontée du magma se faisant le long d'une cheminée verticale, elle est freinée non seulement par viscosité mais aussi sous le simple effet de la pesanteur. Dans le but d'analyser l'effet de la viscosité du magma sur l'écoulement, on suppose dans un premier temps qu'il s'écoule dans une « conduite » **horizontale**, ce qui permet de négliger tout effet de la pesanteur.

Cette conduite est de rayon R , longueur L et d'axe (Oz) , et l'écoulement du magma y est laminaire, stationnaire et incompressible. On note respectivement P_1 et P_2 les pressions en $z = 0$ et $z = L$, et on pose $\Delta p = P_1 - P_2$. Le champ de vitesse de l'écoulement est cherché sous la forme

$$\vec{v} = v_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

- 9 - Justifier par un argument physique que v_z ne dépend pas de θ , et montrer que l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement impose qu'elle ne dépend pas non plus de z . On indique en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

- 10 - Raisonons sur un cylindre de même longueur L que la conduite, mais de rayon $r < R$. Faire un schéma de la situation représentant le cylindre et les forces qu'il subit. Représenter sur une section de la conduite l'allure du profil de vitesse attendu.

- 11 - Montrer **rigoureusement** que la résultante des forces de viscosité subies par le cylindre s'écrit

$$\vec{f} = +2\pi\eta r L \frac{dv_z}{dr}(r) \vec{e}_z.$$

En particulier, on justifiera soigneusement le sens de $\vec{f}$ et le signe $+$ présent dans l'expression ci-dessus.

- 12 - On rappelle que raisonner sur une conduite horizontale permet de négliger le poids. En raisonnant toujours sur le même cylindre, montrer que le champ de vitesse v_z vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r.$$

- 13 - En déduire le profil de vitesse $v_z(r)$.

- 14 - Montrer que la chute de pression Δp est reliée à la vitesse U débitante de l'écoulement par

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{R^2} U.$$

- 15 - Justifier que cette chute de pression peut s'interpréter comme une perte de charge régulière. Par identification avec la relation de Darcy-Weisbach, montrer que le coefficient λ de perte de charge associé ne dépend que du nombre de Reynolds de l'écoulement et vaut

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Revenons désormais à un modèle plus réaliste de la cheminée volcanique, verticale, et prenons en compte l'effet de la pesanteur en vue d'estimer la pression régnant dans la chambre magmatique.

16 - Estimer la vitesse débitante et le nombre de Reynolds de l'écoulement du magma dans la cheminée volcanique. Les résultats de la partie précédente sont-ils applicables ?

17 - Déterminer la pression P_{ch} devant régner dans la chambre magmatique pour que le magma remonte avec le débit voulu. Calculer numériquement P_{ch} terme à terme et commenter les ordres de grandeur.