Correction

Circuits du premier ordre

I - Un circuit à calculs

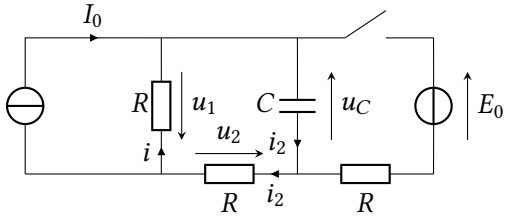

Figure 1 – Schéma du circuit à $t > 0$.

$\boxed{1}$ Raisonnons à partir de la figure 1. La branche contenant la source de tension est ouverte, c'est bien le même courant i_2 qui circule dans R et C.

Loi des mailles : $$u_1 + u_2 + u_C = 0$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

Lois de comportement : $$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Loi des nœuds : $$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i + I_0) + \frac{1}{C}(i + I_0) = 0$$

$$2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = -\frac{I_0}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{2RC} = -\frac{I_0}{2RC}$$

On identifie alors $\tau = 2RC$ et on peut écrire sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = -\frac{I_0}{\tau}.}$$

$\boxed{2}$ Plaçons-nous à $t = 0^-$. Les interrupteurs n'ont pas encore basculé, donc le circuit est en régime permanent continu. On raisonne par circuit équivalent, comme sur la figure 2.

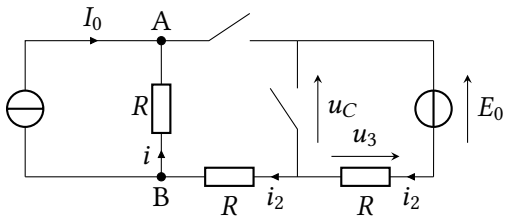

Figure 2 – Schéma du circuit à $t = 0^-$.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

La loi des nœuds appliquée en A donne $i + I_0 = 0$, d'où on déduit de la loi des nœuds appliquée en B que $i_2 = i + I_0 = 0$. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$u_C(0^-) + \underbrace{u_3(0^-)}_{=0} = E_0 \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E_0\,.$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_0\,.}$$

Raisonnons maintenant à l'instant $t = 0^+$ pour déterminer $i(0^+)$. Le schéma du circuit qu'il faut considérer redevient celui de la figure 1.

Loi des mailles : $u_1(0^+) + u_2(0^+) + u_C(0^+) = 0$

Loi d'Ohm : $Ri(0^+) + Ri_2(0^+) + E_0 = 0$

Loi des nœuds : $Ri(0^+) + Ri(0^+) + RI_0 + E_0 = 0$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{i(0^+) = -\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}\,.}$$

3 Forme générale des solutions :

- Solution particulière : second membre constant donc solution particulière i_P constante, d'où

$$0 + \frac{i_\mathrm{P}}{\tau} = -\frac{I_0}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad i_\mathrm{P} = -I_0\,.$$

- Solution homogène : $i_\mathrm{H}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
- Conclusion :

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - I_0\,.$$

Détermination de la constante : la condition initiale est celle déterminée à la question précédente.

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A - I_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} -\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - I_0\,.}$$

Tracé : plusieurs cas sont à distinguer, voir figure 3.

- si $i(0^+) < -I_0$ c'est-à-dire $-\dfrac{I_0}{2} - \dfrac{E_0}{2R} < -I_0$ soit $I_0 < E_0/R$ alors la fonction est croissante ;
- si $i(0^+) = -I_0$ c'est-à-dire $I_0 = E_0/R$ alors la fonction est constante ;
- si $i(0^+) > -I_0$ c'est-à-dire $I_0 > E_0/R$ alors la fonction est décroissante.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

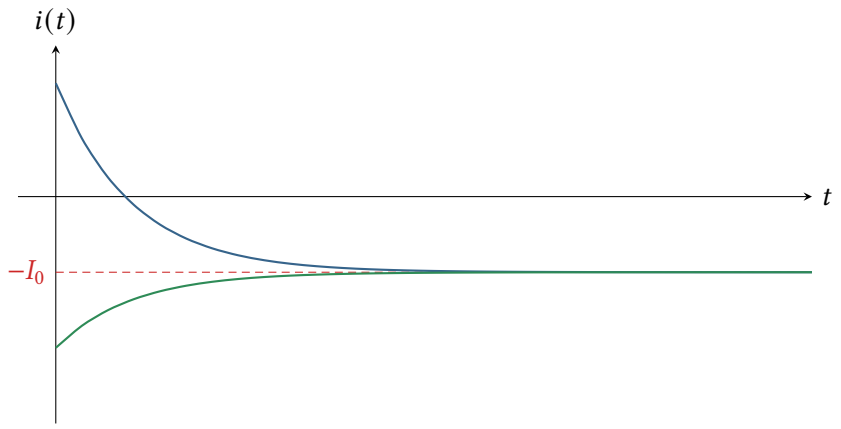

Figure 3 – Courbe d'évolution de $i(t)$.

II - Charge d'un condensateur par une alimentation stabilisée

4 Par continuité de la tension d'un condensateur, $u(0^+) = 0$ et donc

$$e(0^+) = Ri(0^+)\,.$$

▹ Première hypothèse : si $e = E_0 = 7{,}5\,\mathrm{V}$, alors $i(0^+) = E_0/R = 375\,\mathrm{mA} > I_0$, ce qui n'est pas possible ;
▹ Seconde hypothèse : si $i = I_0 = 150\,\mathrm{mA}$, alors $e(0^+) = RI_0 = 3\,\mathrm{V} < E_0$, ce qui est possible.
Conclusion : c'est la deuxième hypothèse qui est valable, et qui donne le point de fonctionnement de l'alimentation stabilisée.

5 Au cours de cette première phase, le courant i reste constant,

$$\boxed{i(t) = I_0\,.}$$

Puis,

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = I_0 \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^{u_C(t)} \mathrm{d}u_C = \frac{I_0}{C}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_C(t) = \frac{I_0}{C}t\,.}$$

Enfin, d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + u_C \qquad \text{soit} \qquad \boxed{e = RI_0 + \frac{I_0}{C}t\,.}$$

6 La tension e ne pouvant pas dépasser la valeur E_0, les expressions précédentes cessent d'être valables à l'instant t_1 tel que

$$e(t_1) = E_0 \qquad \text{soit} \qquad t_1 = \frac{C}{I_0}(E_0 - RI_0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{t_1 = C(R_0 - R) = 1{,}5\,\mathrm{ms}\,.}$$

7 Lors de la deuxième phase pour $t > t_1$, la tension e reste constante,

$$\boxed{e(t > t_1) = E_0\,.}$$

Déterminons u. D'après la loi des mailles, en posant $\tau = RC$,

$$E_0 = Ri + u = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E_0}{\tau}\,,$$

ce qui se résout en

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E_0\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

La condition initiale s'exprime à l'instant t_1 (et non pas $t = 0$, puisque les équations ne sont valables qu'à partir de t_1) :

$$u(t{=}t_1) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{I_0}{C} t_1 = I_0(R_0 - R) \underset{\text{expr}}{\overset{\uparrow}{=}} A\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E_0$$

Sachant que $R_0 I_0 = E_0$ par définition de R_0,

$$A = -RI_0\,\mathrm{e}^{+t_1/\tau}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{u(t > t_1) = -RI_0\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} + E_0\,.}$$

> *Ce n'est pas la seule façon d'exprimer $u(t)$. On aurait pu également introduire un temps $t' = t - t_1$, auquel cas*
>
> $$u(t') = A\,\mathrm{e}^{-t'/\tau} + E_0 \qquad \textit{et} \qquad u(t'{=}0) = I_0(R_0 - R)\,,$$
>
> *ou encore poser*
>
> $$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} + E_0 \qquad \textit{et} \qquad u(t{=}t_1) = I_0(R_0 - R)\,.$$

Enfin, exprimons l'intensité,

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = +\frac{1}{\cancel{\tau}}\cancel{RC}I_0\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\,.}$$

Comme $t > t_1$, on vérifie bien $i(t) < I_0$ conformément à la caractéristique de l'alimentation stabilisée.

8 On trouve numériquement $\tau = 1\,\mathrm{ms}$, ce qui permet de tracer les courbes de la figure 4.

> *Comme l'intensité est continue, alors $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ l'est également, et il n'y a pas de rupture de pente en $t = t_1$ pour la tension u.*

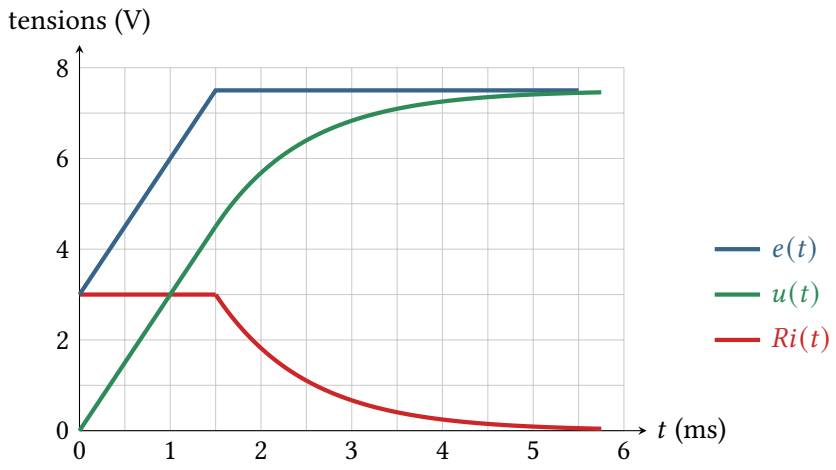

Figure 4 – Allure des courbes.

BY-NC-SA
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr