Thermodynamique des gaz parfait

Expérience de Rüchardt

inspiré concours EPITA-IPSA 2024

A - Équation du mouvement sans frottement

$\boxed{1}$ Géométriquement,

$$V(t) = V_0 - \Sigma x\,.$$

$\boxed{2}$ Le piston subit une force de pression exercée par l'atmosphère, et une autre exercée par le gaz, soit

$$\vec{F}_P = P_0 \Sigma \vec{e}_x - P(t)\Sigma\vec{e}_x = (P_0 - P(t))\Sigma\vec{e}_x\,.$$

La transformation du gaz étant adiabatique réversible, on peut estimer la pression $P(t)$ par la loi de Laplace :

$$P(t)V(t)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \qquad \text{soit} \qquad P(t)\cancel{V_0^\gamma}\left(1 - \frac{\Sigma x}{V_0}\right)^\gamma = P_0\cancel{V_0^\gamma} \qquad \text{et} \qquad P(t) = P_0\left(1 - \frac{\Sigma x}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

Par un développement limité au premier ordre,

$$P(t) = P_0\left(1 + \gamma\frac{\Sigma x}{V_0}\right) \qquad \text{d'où} \qquad P_0 - P(t) = -\gamma\frac{P_0\Sigma}{V_0}x$$

ce qui conduit finalement à

$$\boxed{\vec{F}_P = -\gamma \underbrace{\frac{P_0\Sigma^2}{V_0}}_{=K} x\,\vec{e}_x\,.}$$

$\boxed{3}$ Le piston n'est soumis qu'à son poids et à la force résultante $\vec{F}_P$. D'après le PFD dans le référentiel terrestre projeté sur l'axe (Ox),

$$m\ddot{x} = mg - \gamma K x \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma K}{m}}_{={\omega_0}^2} x = g\,.}$$

B - Détermination expérimentale de γ

$\boxed{4}$ On observe une dizaine d'oscillations sur la courbe, donc

$$\boxed{Q \sim 10\,.}$$

$\boxed{5}$ La pseudo-pulsation ω' est donnée par la partie imaginaire des racines du polynôme caractéristique, qui s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Puisque le régime est pseudo-périodique, son discriminant est négatif et vaut

$$\Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4{\omega_0}^2 = -4{\omega_0}^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0$$

d'où on déduit les racines

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{i}\sqrt{4{\omega_0}^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}\right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\omega' = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,.}$$

Comme $Q \sim 10$, $1/4Q^2 \ll 1$ et on peut considérer quasiment égales la pulsation propre et la pseudo-pulsation.

$\boxed{6}$ On compte sur la courbe neuf oscillations en environ 9,5 s, soit une pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{9{,}5/9} = 5{,}95\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\gamma = \frac{m}{K}{\omega_0}^2 = 1{,}42\,.}$$

La valeur est proche de la valeur attendue, signe que la méthode de mesure de γ et les hypothèses associées sont pertinentes ... même si une modélisation plus fine de l'expérience serait nécessaire pour obtenir une valeur précise.

$\boxed{7}$ La force $\overrightarrow{F}_P$ ne dépend ni du temps, ni de la vitesse, ni des autres forces subies par le piston. Montrons qu'elle est conservative, en identifiant la fonction énergie potentielle apparente $E_{\mathrm{p,app}}$ telle que

$$\overrightarrow{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_{\mathrm{p,app}} \qquad \text{soit} \qquad -\gamma K x = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,app}}}{\mathrm{d}x}\,.$$

En choisissant l'énergie potentielle nulle en $x = 0$ où la force est nulle, on en déduit que l'énergie potentielle apparente dont dérive la force $\overrightarrow{F}_P$ dans l'expérience s'écrit

$$\boxed{E_{\mathrm{p,app}} = \frac{1}{2}\gamma K x^2\,.}$$

$\boxed{8}$ Les frottements étant négligés, le piston n'est soumis qu'à des forces conservatives. Par conservation de l'énergie mécanique entre la position initiale et le premier point de rebroussement,

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{pp} + E_{\mathrm{p,app}} \underset{\substack{\uparrow\\ x=0}}{=} 0 - mg\times 0 + 0 \underset{\substack{\uparrow\\ x=H}}{=} 0 - mgH + \frac{1}{2}\gamma K H^2$$

d'où on déduit

$$\boxed{\gamma = \frac{2mg}{KH} \simeq 0{,}96\,!}$$

Cette seconde méthode n'est pas du tout précise : la qualité du pointage vidéo doit être à remettre en cause ?

> *Je ne sais pas pourquoi la courbe fournie sur l'énoncé de concours ne conduit pas à un bon résultat sur cette deuxième méthode ! Normalement, elle marche tout aussi bien que la première. On ne peut même pas imputer l'écart aux frottements, car ils auraient pour conséquence de sous-estimer H ... et donc de surestimer γ, ce qui ne va pas dans le bon sens pour expliquer l'écart.*

C - Vers l'équilibre thermique

9 La capacité thermique du flacon vaut

$$C_{\text{verre}} = mc = 2{,}1 \cdot 10^3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\,.$$

Pour estimer la capacité thermique de l'air contenu dans le flacon, on détermine sa quantité de matière à partir des conditions initiales

$$n = \frac{P_0V_0}{RT_0} \qquad \text{d'où} \qquad C_{\text{air}} = \frac{\gamma P_0 V_0}{(\gamma-1)T_0} = 12\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\,.$$

Puisque $C_{\text{verre}} \gg C_{\text{gaz}}$, modéliser le flacon par un thermostat de température égale à sa température initiale est tout à fait justifié.

10 • **Équation différentielle sur la température :** L'évolution étant isobare, procédons à un bilan d'enthalpie pour le gaz pendant une durée infinitésimale dt.

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} hS(T_0 - T)\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Joule}}}{=} C_{\text{air}}\mathrm{d}T\,,$$

ce qui conduit à une équation différentielle vérifiée par la température,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C_{\text{air}}}T = \frac{hS}{C_{\text{air}}}T_0\,.$$

> *Raisonner en énergie interne obligerait à calculer le travail des forces pressantes, ce qui serait plus ou moins équivalent en termes de difficulté de calcul.*

• **Équation différentielle sur la position :** On cherche désormais à relier la température à la position du piston x, via l'équation d'état des gaz parfaits puisque l'évolution est isobare à une pression P_0' :

$$P_0'(V_0 - \Sigma x(t)) = nRT(t)\,.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle sur T,

$$-\frac{P_0'\Sigma}{nR}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C_{\text{air}}}\frac{P_0'}{nR}(V_0 - \Sigma x) = \frac{hS}{C_{\text{air}}}T_0$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C_{\text{air}}}x = \frac{hS}{C_{\text{air}}}\left(\frac{V_0}{\Sigma} - \frac{nR}{P_0'\Sigma}T_0\right)$$

La pression P_0' se déduit de la condition d'équilibre mécanique du piston :

$$\overrightarrow{F}_P + m\overrightarrow{g} = 0 \qquad \text{donc} \qquad -P_0'\Sigma + P_0\Sigma + mg = 0 \qquad \text{d'où} \qquad P_0'\Sigma = P_0\Sigma + mg$$

ce qui permet de réécrire l'équation différentielle sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C_{\text{air}}}x = \frac{hS}{C_{\text{air}}}\left(\frac{V_0}{\Sigma} - \frac{nRT_0}{P_0\Sigma + mg}\right)}\,.$$

On identifie un temps caractéristique

$$\tau = \frac{C_{\text{air}}}{hS}\,,$$

qui le même pour la relaxation thermique et mécanique … ce qui n'est pas surprenant puisqu'elles sont dues au même phénomène.

• **Résolution et interprétation du résultat :** Cette équation admet pour solution particulière

$$x_\infty = \frac{V_0}{\Sigma} - \frac{nRT_0}{P_0\Sigma + mg}\,,$$

qui s'interprète comme la **position du piston permettant au gaz d'être en équilibre thermodynamique à la température T_0 et sous la pression P'_0**. En effet, l'équation d'état s'écrit

$$P'_0(V_0 - \Sigma x_\infty) = nRT_0 \qquad \text{soit} \qquad x_\infty = \frac{V_0}{\Sigma} - \frac{nRT_0}{P'_0\Sigma} = \frac{V_0}{\Sigma} - \frac{nRT_0}{P_0\Sigma + mg}\,.$$

À l'instant initial, la position est **celle atteinte à la fin des oscillations adiabatiques**, qui correspond à la solution particulière de l'équation d'oscillateur étudiée au début du sujet, soit

$$x_0 = \frac{mg}{\gamma K} = \frac{mgV_0}{\gamma P_0 \Sigma^2}\,.$$

Ainsi, la solution de l'équation s'écrit

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + x_\infty \qquad \text{avec} \qquad x(t=0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + x_\infty \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} x_0$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + x_\infty \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{mgV_0}{\gamma P_0\Sigma^2} \\ x_\infty = \dfrac{V_0}{\Sigma} - \dfrac{nRT_0}{P_0\Sigma + mg} \end{cases}}$$