Machines thermiques

I - Moteur d'Ericsson

1 Une isotherme étant représentée par une hyperbole, on en déduit l'allure de la figure 1.

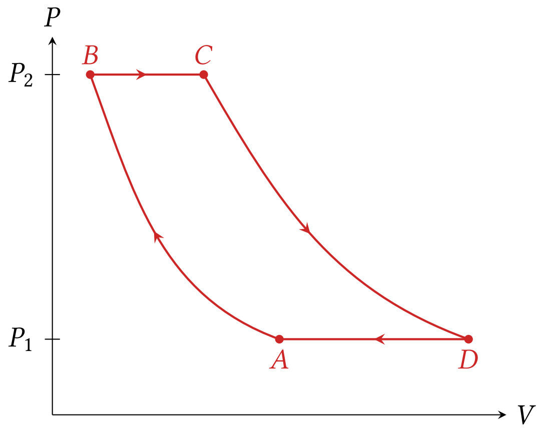

Figure 1 – Allure qualitative du cycle d'Ericsson.

2 • **Étape AB : compression isotherme.**

▹ travail des forces pressantes :

$$W_{AB} = -\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}V = -nRT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

et en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits $nRT_1 = P_2 V_B = P_1 V_A$, ce qui donne

$$\boxed{W_{AB} = nRT_1 \ln r\,.}$$

▹ transfert thermique : la compression étant isotherme, on a d'après le premier principe

$$\Delta U_{AB} \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} Q_{AB} + W_{AB} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q_{AB} = -nRT_1 \ln r}$$

• **Étape BC : échauffement isobare.**

▹ travail des forces pressantes :

$$W_{BC} = -\int_{\overset{\frown}{BC}} P\,\mathrm{d}V = -P_2 \int_{V_B}^{V_C} \mathrm{d}V = -P_2(V_C - V_B) = -nR(T_2 - T_1)$$

et en utilisant l'équation d'état on trouve finalement

$$\boxed{W_{BC} = -nRT_1(x-1)\,.}$$

> *La transformation étant isobare, le transfert thermique peut également se déduire d'un bilan d'enthalpie.*

▹ transfert thermique : d'après le premier principe,

$$\Delta U_{BC} \underset{\text{GP}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{nR}{\gamma-1}(T_2-T_1) \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} W_{BC}+Q_{BC} \qquad \text{soit} \qquad Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2-T_1)+nR(T_2-T_1)\,.$$

et ainsi

$$\boxed{Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma-1} nRT_1(x-1)\,.}$$

- **Étape CD : détente isotherme.** Le même raisonnement que pour l'étape AB conduit à

$$\boxed{W_{CD} = -nRxT_1 \ln r \qquad \text{et} \qquad Q_{CD} = +nR\,xT_1\;\ln r\,.}$$

- **Étape DA : refroidissement isobare.** Le même raisonnement que pour l'étape BC conduit à

$$\boxed{W_{DA} = nRT_1(x-1) \qquad \text{et} \qquad Q_{DA} = \frac{\gamma}{\gamma-1}nRT_1(1-x)\,.}$$

3 En considérant que les étapes DA et AB ont lieu au contact de la source froide, et les étapes BC et CD au contact de la source chaude, alors

$$\eta = -\frac{W_{AB}+W_{BC}+W_{CD}+W_{DA}}{Q_{BC}+Q_{CD}} = -\frac{\cancel{nRT_1}\ln r - \cancel{nRT_1}x\ln r}{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\cancel{nRT_1}(x-1)+\cancel{nRT_1}x\ln r}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\eta = \frac{(x-1)(\gamma-1)\ln r}{\gamma(x-1)+(\gamma-1)x\ln r} = 0{,}24\,.}$$

4 Le passage dans la turbine correspond à l'étape CD, celui dans le compresseur à l'étape AB. On a

$$W_{AB}+W_{CD} = nRT_1(1-x)\ln r < 0\,,$$

ce qui signifie bien que le travail récupérable en sortie de turbine $|W_{AB}|$ est supérieur au travail requis pour la compression W_{CD}. La turbine peut donc entraîner simultanément la rotation du compresseur et celle de la charge mécaniquement connectée au moteur. Puisque les travaux au cours des étapes BC et DA se compensent exactement,

$$\boxed{W = nRT_1(1-x)\ln r\,.}$$

5 On constate que $Q_{BC}+Q_{DA}=0$: le fluide reçoit au cours de l'étape BC un transfert thermique égal en valeur absolue à celui qu'il libère au cours de l'étape AD. Si l'échangeur est sans perte, les échanges internes au fluide suffisent pour ces étapes de refroidissement et d'échauffement.

6 Le transfert thermique Q_{BC} est interne à la machine, et n'a donc pas à être comptabilisé dans le rendement, qui s'écrit finalement

$$\eta = -\frac{W}{Q_{CD}} = -\frac{nRT_1(1-x)\ln r}{-nRxT_1\ln r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\eta = 1-\frac{1}{x} = 0{,}5\,.}$$

Le rendement est meilleur, ce qui était prévisible puisque le travail total produit par le moteur est le même mais le transfert thermique fourni par la source chaude est moindre.

> *Lors du cours sur le second principe, nous montrerons que ce rendement $1-T_1/T_2$ correspond en fait au rendement optimal d'un moteur fonctionnant entre une source chaude à T_2 et une source froide à T_1. Ainsi,*

> *le moteur d'Ericsson tel qu'il est décrit dans cet exercice est un moteur parfait sur le plan thermodynamique. Bien sûr, ce résultat théorique est à nuancer sur le plan technologique : une compression isotherme est particulièrement ardue à réaliser, car il faut que le transfert thermique vers l'extérieur ait lieu au bon moment pour compenser le travail de compression, et de même pour la détente. Paradoxalement (?), il est beaucoup plus simple de réaliser une compression et une détente adiabatique.*

II - Réfrigérateur

adapté PT 2019

II.A - Préambule

7 Voir figure 2. Tous les échanges énergétiques possibles sont orientés comme reçus par le fluide frigorigène : s'agisant d'un réfrigérateur, on a

$$W > 0 \qquad Q_{\text{fr}} > 0 \qquad Q_{\text{ch}} < 0\,.$$

De plus, c'est l'air de la cuisine qui réchauffe l'intérieur du réfrigérateur par des fuites thermiques au travers des parois, d'où le sens choisi pour avoir

$$Q_{\text{fuites}} > 0\,.$$

> *Notez bien que le sens de W, Q_{fr} et Q_{ch} est imposé par l'énoncé alors que le sens de Q_{fuites} est libre, c'est moi qui l'ai choisi de façon à avoir $Q_{fuites} > 0$.*

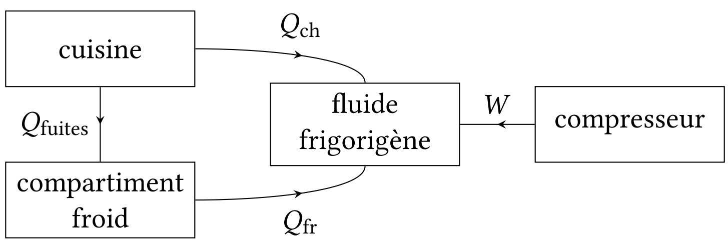

Figure 2 – Diagramme des échanges d'un réfrigérateur imparfaitement isolé.

8 Raisonnons sur la totalité du fluide frigorigène du réfrigérateur, pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ où il avance infiniment peu dans la machine. Les énergies échangées infinitésimales s'écrivent

$$\delta W = \mathcal{P}_{\text{m}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \delta Q_{\text{fr}} = \mathcal{P}_{\text{fr}}\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où par définition de l'efficacité

$$e = \frac{\delta Q_{\text{fr}}}{\delta W} = \frac{\mathcal{P}_{\text{fr}}}{\mathcal{P}_{\text{m}}}\,.$$

> *Un raisonnement en termes de puissances moyennes échangées pendant une durée Δt est valable également.*

II.B - Évaluation des fuites thermiques

9 Procédons à un bilan d'énergie interne pour le compartiment froid pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. Le réfrigérateur étant débranché, seul l'échange avec la cuisine intervient.

$$\mathrm{d}U_{\text{f}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} \delta Q_{\text{fuites}} = \frac{1}{R}(T_{\text{c}} - T)\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transf}}}{=} C\,\mathrm{d}T$$

ce qui conduit à la classique équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}T = \frac{1}{RC}T_{\text{c}}\,.$$

On peut identifier un temps caractéristique $\tau = RC$.

10 Sans avoir besoin d'une résolution explicite de l'équation différentielle, on trouve

- la température initiale $T_f = 277\,\text{K}$;
- la température T_c correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, atteinte en régime permanent, qui vaut $T_c = 293\,\text{K}$;
- le croisement de la tangente initiale et de l'asymptote a lieu à l'instant $t = \tau = 10\,\text{h}$, d'où $R = \tau/C = 0{,}12\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$.

11 Procédons à un bilan d'énergie interne pour le compartiment froid pendant une durée infinitésimale dt. Le réfrigérateur est branché et le régime permanent atteint, donc

$$\mathrm{d}U_f \underset{\text{RP}}{\underset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{R}(T_c - T_f)\mathrm{d}t - \mathcal{P}_{fr}\,\mathrm{d}t$$

Or par définition de l'efficacité $\mathcal{P}_{fr} = e\mathcal{P}_m$, d'où

$$e\mathcal{P}_m = \frac{1}{R}(T_c - T_f) \qquad \text{soit} \qquad \frac{T_f}{4(T_c - T_f)}\mathcal{P}_m = \frac{T_c - T_f}{R}$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \frac{4(T_c - T_f)^2}{RT_f} = 30\,\text{W}\,.}$$

II.C - Démarrage du réfrigérateur

12 La puissance $\mathcal{P}_m$ est celle requise pour maintenir le réfrigérateur à température constante en régime permanent, en ne faisant que compenser les fuites thermiques. Elle serait donc insuffisante pour refroidir le compartiment froid en partant d'une température plus élevée, puisque les fuites seraient toujours présentes en plus du refroidissement. En outre, travailler avec une puissance constante appliquée au compresseur empêcherait le réfrigérateur de s'adapter aux fluctuations de température de la cuisine, où il fait par exemple plus chaud en plein été.

13 Procédons à un bilan d'énergie interne pour le compartiment froid pendant une durée infinitésimale dt, qui s'écrit cette fois

$$\mathrm{d}U_f \underset{\text{transf}}{\underset{\uparrow}{=}} C\,\mathrm{d}T \underset{\text{1er P}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{R}(T_c - T)\mathrm{d}t - e \times 4\mathcal{P}_m\mathrm{d}t = \frac{1}{R}(T_c - T)\mathrm{d}t - \frac{T}{T_c - T}\mathcal{P}_m\mathrm{d}t$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}(T_c - T) - \frac{T}{T_c - T}\frac{P_m}{C}\,.}$$

14 Si les fuites sont négligeables, l'équation différentielle se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{T}{T_c - T}\frac{P_m}{C}\,,$$

qui peut se résoudre par séparation des variables :

$$-\frac{C}{\mathcal{P}_m}\frac{T_c - T}{T}\mathrm{d}T = \mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \frac{C}{\mathcal{P}_m}\left(1 - \frac{T_c}{T}\right)\mathrm{d}T = \mathrm{d}t$$

et ainsi en intégrant entre $t = 0$ et $t = \Delta t_r$

$$\int_0^{\Delta t_r} \mathrm{d}t = \frac{C}{\mathcal{P}_m}\int_{T_c}^{T_f}\left(1 - \frac{T_c}{T}\right)\mathrm{d}T$$

$$\Delta t_r = \frac{C}{\mathcal{P}_m}\left((T_f - T_c) - T_c\ln\frac{T_f}{T_c}\right)$$

ce qui donne en réorganisant

$$\boxed{\Delta t_r = \frac{C}{\mathcal{P}_m}\left(T_c\ln\frac{T_c}{T_f} - (T_c - T_f)\right) = 4{,}4\cdot 10^3\,\text{s} = 1\text{ h }13\text{ min}\,.}$$

15 Pour le faire simplement, supposons constant l'écart de température entre l'intérieur et l'extérieur du frigo, égal à la moitié de sa valeur en régime permanent :

$$T_\mathrm{c} - T(t) \sim \frac{T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}}{2}$$

ce qui permet d'estimer

$$Q_\mathrm{fuites} \sim \frac{1}{R}\frac{T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}}{2}\Delta t_\mathrm{r} \sim 3 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\,.$$

Or pendant la durée Δt_r l'énergie interne de l'intérieur du frigo varie de

$$|\Delta U_\mathrm{fr}| = C\,|T_\mathrm{f} - T_\mathrm{c}| = 4{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

Le fluide frigorigène a donc prélevé une énergie à l'intérieur du frigo de l'ordre de

$$Q_\mathrm{fr} = |\Delta U_\mathrm{fr}| + Q_\mathrm{fuites} \sim 5{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

Sans que la compensation des fuites ne soit complètement négligeable, elle reste néanmoins très inférieure au transfert thermique requis par le refroidissement lui-même. On peut donc penser que l'ordre de grandeur de Δt_r est très raisonnable, sans constituer une valeur exacte.