Gravitation

Tchouri, Rosetta et Philae

inspiré E3a MP 2015

A - Rosetta tourne autour de Tchouri

1 Par application du PFD dans la base de Frénet (cf. cours pour les détails),

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{G m_\mathrm{T}}{r_1}} = 0{,}15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

On en déduit

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} = 1{,}3\cdot 10^6\,\mathrm{s} = 14{,}5\,\mathrm{jours}\,.}$$

2 Voir figure 1.

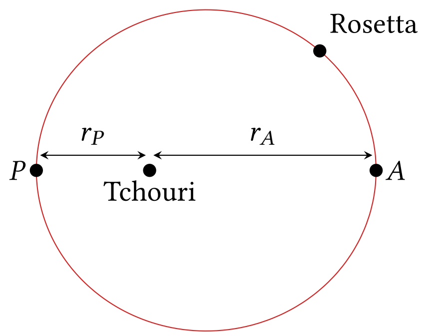

Figure 1 – Schéma de l'orbite elliptique de Rosetta autour de Tchouri.

3 Nous avons montré en cours que sur une orbite elliptique

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{G\,m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{R}}{2a} = -\frac{G\,m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{R}}{r_A + r_P}\,.}$$

4 Le mouvement de Rosetta est conservatif, exprimer l'énergie mécanique en P donne donc

$$\frac{1}{2}\,m_\mathrm{R}\,v_P^2 - \frac{G\,m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{R}}{r_P} = -\frac{G\,m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{R}}{r_A + r_P}$$

soit

$$v_P^2 = 2\,G\,m_\mathrm{T}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A + r_P}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{v_P = \sqrt{\frac{2\,G\,m_\mathrm{T}\,r_A}{r_P(r_A + r_P)}} = 0{,}30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

5 La vitesse en orbite circulaire de rayon r_P vaut

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{G\,m_{\text{T}}}{r_P}} = 0{,}26\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

La variation de vitesse est donc

$$\boxed{\Delta v = v_{\text{circ}} - v_P = -0{,}04\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

B - Philae se fait larguer

6 Le système étudié est l'atterrisseur Philae, modélisé par un point matériel en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ présenté dans l'énoncé. Philae n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la comète, donc d'après le PFD

$$\cancel{m_P}\,\vec{a} = -G\frac{m_{\text{T}}\,\cancel{m_P}}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

ce qui donne en projection sur $\vec{e}_r$

$$\boxed{\ddot{r} = -G\frac{m_{\text{T}}}{r^2}}$$

7 Avec la technique habituelle,

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -G\dfrac{m_{\text{T}}}{r^2} \end{cases}$$

8 Le code complet est reproduit ci-dessous. Le test permet de limiter le calcul au domaine $r > 0$, le seul ayant un sens physique ($r < r_{\text{T}}$ signifie que l'atterrisseur a atteint le sol de la comète).

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as sci
import matplotlib.pyplot as plt

### Constantes physiques
G = 6.7e-11 # m3.kg-1.s-2
m_T = 1e13 # kg

### Conditions initiales
r0 = 22.5e3 # m
v0 = -.15 # m.s-1
y0 = [r0, v0]

### Intervalle de temps pour la simulation
t = np.linspace(0, 160e3, 1000) # s

### Fonction d'évolution
def f(y, t):
    r, v = y
    if y[0] <= 0:
        return [0, 0]
    else:
        dxdt = v
        dvdt = -G * m_T / r**2
        return [dxdt, dvdt]

### Calcul de la solution
sol = sci.odeint(f, y0, t)
r = sol[:, 0]

### Tracé de r(t)
plt.figure()
```

```python
plt.plot(t, r)
plt.xlabel('Temps (s)')
plt.ylabel('Distance à la comète (m)')
```

9 On cherche à quel instant temps t est atteinte la valeur $r = r_\mathrm{T} = 2\,\mathrm{km}$. Par lecture de la courbe (a) de la première figure,

$$\boxed{\tau_0 = 145\,000\,\mathrm{s} \simeq 40\,\mathrm{h}}$$

pour atterrir sur le sol de la comète.

> *Attention à la précision de la réponse : il faut préciser explicitement la courbe lue en la justifiant, et la valeur de r pour laquelle la comète a atterri.*

10 La durée de chute étant de sept heures, soit environ 25 000 secondes pour atteindre le sol de la comète ($r = r_\mathrm{T} = 2\,\mathrm{km}$), on déduit par lecture graphique que la trajectoire de Philae est décrite par la courbe (f), ce qui indique qu'il est lâché de Rosetta avec la vitesse verticale initiale

$$\boxed{v_0 = -0{,}75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

11 Exploitons maintenant la deuxième figure de l'énoncé. La vitesse initiale verticale se lit à la distance $r = r_0 = 22{,}5\,\mathrm{km}$. Par lecture de la valeur de $\dot r$ en $r = r_\mathrm{T}$ sur la courbe partant de $\dot r = v_0$, on en déduit que la vitesse verticale de Philae au moment du contact avec la comète vaut

$$\boxed{v_\mathrm{contact} = -1{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

12 Philae n'est soumise qu'à la force gravitationnelle, qui est conservative : son énergie mécanique est donc constante. Ainsi,

$$E_\mathrm{m}(\text{largage}) = E_\mathrm{m}(\text{contact}) \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}\,m_\mathrm{P}\,{v_0}^2 - G\frac{m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{P}}{r_0} = \frac{1}{2}\,m_\mathrm{P}\,{v_\mathrm{contact}}^2 - G\frac{m_\mathrm{T}\,m_\mathrm{P}}{r_\mathrm{T}}$$

ce qui s'écrit sous la forme

$${v_\mathrm{contact}}^2 = {v_0}^2 + 2\,G\,m_\mathrm{T}\left(\frac{1}{r_\mathrm{T}} - \frac{1}{r_0}\right)$$

soit finalement

$$\boxed{v_\mathrm{contact} = \sqrt{{v_0}^2 + 2\,G\,m_\mathrm{T}\frac{r_0 - r_\mathrm{T}}{r_\mathrm{T}\,r_0}} = 1{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,}$$

ce qui est conforme avec la valeur lue graphiquement.