

Interférences

Des trous d'Young aux étoiles doubles

A - Trous d'Young éclairés par une source hors de l'axe optique

1 La propagation ayant lieu dans l'air,

$$\delta = (AT_2M) - (AT_1M) = AT_2 + T_2M - AT_1 - T_1M.$$

Par un calcul analogue à celui du cours (et qui doit apparaître au moins une fois sur votre copie, avant de pouvoir écrire « de même » pour les trois calculs suivants),

$$T_2M - T_1M = \frac{az}{d}.$$

Le calcul est analogue pour la partie avant les trous d'Young, et donne

$$AT_2 - AT_1 = \frac{aZ}{D}.$$

On en déduit

$$\delta = \frac{az}{d} + \frac{aZ}{D}.$$

2 D'après la formule de Fresnel, en supposant que les deux trous produisent la même intensité lumineuse I_0 ,

$$I_A(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right]$$

Le terme dépendant de Z est indépendant de z et agit comme un déphasage, qui décale la position des minima et des maxima d'intensité. Cela se traduit par un **décalage global de la figure d'interférences** sur l'écran.

3 Pour retrouver la même figure d'interférences que celle observée lorsque la source A est sur l'axe optique, il faut avoir

$$\frac{2\pi aZ}{\lambda D} = 2k\pi \quad \text{soit} \quad Z = k \frac{\lambda D}{a} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4 Par définition,

$$p = \frac{az}{\lambda d} + \frac{aZ}{\lambda D} \quad \text{d'où} \quad z_p = \frac{\lambda d}{a} p - Z \frac{d}{D}.$$

Ainsi, si Z augmente alors z_p diminue : les franges se décalent dans le sens des z décroissants lorsque Z augmente, et plus largement dans le sens opposé au déplacement de la source.

B - Trous d'Young éclairés par deux sources incohérentes

5 Les intensités produites par chaque source s'écrivent

$$I_A(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right] \quad \text{et} \quad I_B(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} - \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right]$$

L'additivité des intensités donne alors

$$\begin{aligned} I(z) &= 2I_0 \left[2 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} - \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right] \\ &= 2I_0 \left[2 + 2 \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right] \\ I(z) &= 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} \right) \right] \end{aligned}$$

ce qui est bien la forme cherchée, avec

$$I_{\text{moy}} = 4I_0 \quad \text{et} \quad \gamma(Z) = \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right).$$

On peut aboutir au résultat avec la formule d'addition des cosinus $\cos a + \cos b$, ou bien de manière plus élégante en reconnaissant

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

6 Dans le cas d'une unique source ponctuelle,

$$I_A(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right]$$

L'intensité est maximale (resp. minimale) lorsque le cosinus vaut ± 1 , soit

$$\begin{cases} I_{\text{max}} = 4I_0 \\ I_{\text{min}} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = 1.}$$

Dans le cas des deux sources ponctuelles,

$$\begin{cases} I_{\text{max}} = 4I_0 \left[1 + \left| \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right| \right] \\ I_{\text{min}} = 4I_0 \left[1 - \left| \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right| \right] \end{cases} \quad \text{d'où} \quad C = \frac{4I_0 \times 2 \left| \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right|}{4I_0 \times 2} \quad \text{soit} \quad \boxed{C = \left| \cos \left(\frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right|}.$$

En présence de la deuxième source, la figure d'interférences est globalement plus lumineuse (intensité moyenne doublée), mais moins contrastée. Les franges sombres ne le sont pas parfaitement, et les franges brillantes sont moins brillantes que ce qu'elles auraient pu être. Voir figure 1 pour illustration.

7 La figure d'interférences est totalement brouillée pour

$$\cos \left(\frac{2\pi aZ^*}{\lambda D} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi aZ_k^*}{\lambda D} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ce qui donne

$$\boxed{Z_k^* = \frac{\lambda D}{2a} \left(k + \frac{1}{2} \right) \quad (k \in \mathbb{N}).}$$

Dans ce cas, les intensités minimale et maximale sont égales : l'intensité est uniforme sur la figure d'interférences, égale à sa valeur moyenne. Attention à ne pas confondre, les interférences ne sont pas destructives pour autant, et il y a de la lumière sur l'écran.

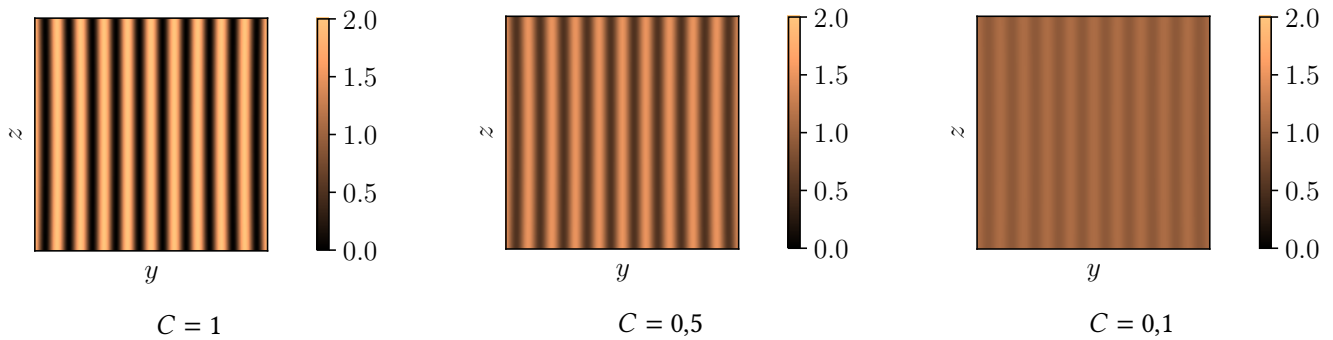


Figure 1 – Figure d'interférences en fonction du contraste.

8] Considérons le premier brouillage total, pour $Z_0^* = \lambda D/4a$. En reprenant les expressions de la première partie, les franges brillantes créées par la source A se trouvent aux positions z_m ($m \in \mathbb{Z}$) telles que

$$\frac{az_m}{d} + \frac{aZ_0^*}{D} = \frac{az_m}{d} + \frac{\lambda}{4} = m\lambda \quad \text{soit} \quad z_m = \frac{\lambda d}{a} \left(m - \frac{1}{4} \right)$$

alors que les franges sombres sont en $z_{m'}$ ($m' \in \mathbb{Z}$) tel que

$$\frac{az_{m'}}{d} + \frac{aZ_0^*}{D} = \frac{az_{m'}}{d} + \frac{\lambda}{4} = \left(m' + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad \text{soit} \quad z_{m'} = \frac{\lambda d}{a} \left(m' + \frac{1}{4} \right).$$

Les expressions sont analogues pour la source B en remplaçant Z_1^* par $-Z_1^*$, ce qui donne des franges brillantes aux positions

$$z_n = \frac{\lambda d}{a} \left(m + \frac{1}{4} \right)$$

et des franges sombres aux positions

$$z_{n'} = \frac{\lambda d}{a} \left(n' - \frac{1}{4} \right).$$

Ainsi, les franges brillantes produites par la source A se superposent aux franges sombres produites par la source B, et réciproquement. On comprend pourquoi l'intensité apparaît uniforme sur l'écran.

Plus largement, on peut remarquer que les intensités s'écrivent

$$I_A(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2I_0 \left[1 - \sin \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} \right) \right]$$

$$I_B(z) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} - \frac{2\pi aZ}{\lambda D} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \sin \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} \right) \right]$$

Elles sont donc en opposition de phase, et on peut vérifier ainsi directement que l'une est maximale quand l'autre est minimale.

C - Interférométrie stellaire

9] Avec les notations de la partie précédente, l'angle θ formé par les rayons arrivant des deux sources est tel que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Z}{D}$$

ce qui devient dans la limite des petits angles

$$\theta = \frac{2Z}{D}.$$

On en déduit l'intensité

$$I(z) = I_{\text{moy}} \left[1 + \cos \frac{\pi a \theta}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi az}{\lambda d} \right) \right].$$

10 Votre réponse doit faire apparaître d'une part l'idée de mesurer le contraste, d'autre part le fait de déplacer les télescopes pour avoir plusieurs mesures et diminuer l'incertitude. Vous devez ensuite proposer une méthode pertinente d'exploitation des résultats, typiquement basée sur une régression linéaire.

Par exemple, en imaginant mesurer le contraste C de la figure d'interférences pour différentes valeurs de a , et en considérant $\theta \ll 1$ (ce qui est complètement légitime),

$$C = \cos \frac{\pi a \theta}{\lambda} = 1 - \frac{\pi^2 a^2 \theta^2}{\lambda^2}$$

On peut alors isoler

$$\sqrt{1 - C} = \frac{\pi a}{\lambda} \theta.$$

Représenter $y = \sqrt{1 - C}$ en fonction de $x = \pi a / \lambda$ donne alors une droite de pente θ .

La résolution θ_{\min} du dispositif dépend de la capacité à mesurer le contraste : sans plus d'information, à vous de proposer des ordres de grandeur pertinents. Par exemple, imaginons que les mesures soient exploitables à condition que le contraste atteigne des valeurs inférieures à 0,9. À la limite,

$$\sqrt{1 - 0,9} = \frac{\pi a_{\max}}{\lambda} \theta_{\min} \quad \text{soit} \quad \theta_{\min} = \frac{\lambda}{\pi a_{\max} \sqrt{10}} \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ rad}$$

pour $\lambda \sim 600 \text{ nm}$ et $a_{\max} = 200 \text{ m}$.

L'instrument donne évidemment accès à beaucoup plus d'informations. L'éclairement est mesuré en tout point de l'écran pour différentes valeur de a , avec différents filtres sélectionnant différentes longueurs d'ondes, et on fait ensuite l'équivalent d'une régression non-linéaire en faisant varier les différents paramètres du modèle (angle θ mais aussi diamètre apparent des étoiles, luminosité relative, composition spectrale, etc.) pour trouver les valeurs qui correspondent au mieux aux résultats expérimentaux.