

Circuits résistifs

Alimentation d'un moteur par un générateur non-idéal

A - Étude de l'alimentation seule

1 Un schéma est représenté figure 1. Si aucun dipôle n'est branché aux bornes de l'alimentation, alors les résistances R_2 et R_5 ne sont traversées par aucun courant. La tension U_0 se retrouve donc aux bornes de R_3 , et les trois résistances R_1 , R_3 et R_4 forment un pont diviseur de tension. Ainsi,

$$\frac{U_0}{E} = \frac{R}{R + R + R} \quad \text{donc} \quad \boxed{U_0 = \frac{E}{3}}.$$

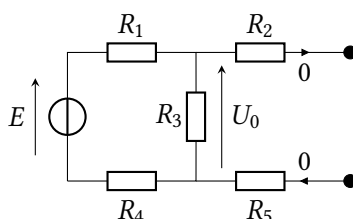


Figure 1 – Alimentation en circuit ouvert.

2 Des schémas équivalents sont représentés figure 2. Lorsque l'alimentation est en court-circuit, alors les résistances R_2 et R_5 sont équivalentes à $R_{25} = 2R$, elle-même montée en parallèle de R_3 d'où une résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{235}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \text{d'où} \quad R_{235} = \frac{2}{3}R.$$

Comme précédemment, les résistances R_1 , R_{235} et R_4 forment un pont diviseur de tension, d'où

$$\frac{U_{235}}{E} = \frac{\frac{2}{3}R}{R + \frac{2}{3}R + R} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

On en déduit enfin l'intensité I_0 grâce à la loi d'Ohm appliquée à R_{25} ,

$$I_0 = \frac{U_{235}}{R_{25}} = \frac{\frac{E}{4}}{2R} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I_0 = \frac{E}{8R}}.$$

De nombreuses méthodes différentes sont possibles pour mener au résultat, notamment déterminer le courant sortant du générateur en ramenant le circuit à une unique résistance équivalente, puis utiliser un pont diviseur de courant pour en déduire I_0 .

3 Raisonnons avec les notations de la figure 3. En utilisant successivement la loi des nœuds, la loi d'Ohm et la loi des mailles, il vient

$$I_1 = I + I_2 \quad \text{donc} \quad \frac{U'_1}{2R} = I + \frac{U_3}{R} \quad \text{et} \quad \frac{E - U_3}{2R} = I + \frac{U_3}{R}$$

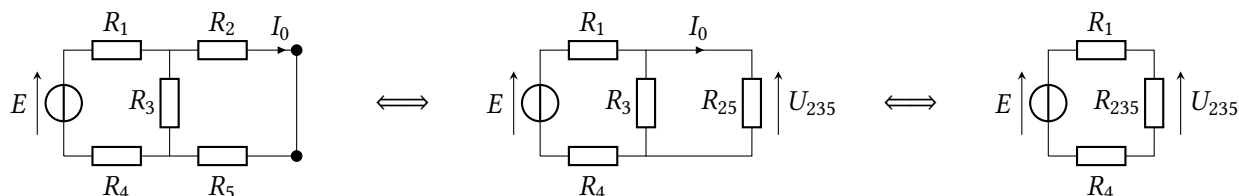


Figure 2 – Alimentation en court-circuit.

ce qu'il est plus simple de réécrire

$$E - U_3 = 2RI + 2U_3 \quad \text{soit} \quad E = 2RI + 3U_3.$$

Par ailleurs, avec la loi des mailles et la loi d'Ohm appliquées dans la maille de droite,

$$U_3 = 2RI + U$$

d'où on déduit en réinjectant

$$E = 2RI + 6RI + 3U$$

d'où

$$U = \underbrace{\frac{E}{3}}_{=E_T} - \underbrace{\frac{8}{3}R}_{=R_T} I,$$

ce qui est bien la loi de comportement d'un générateur de Thévenin de paramètres E_T et R_T .

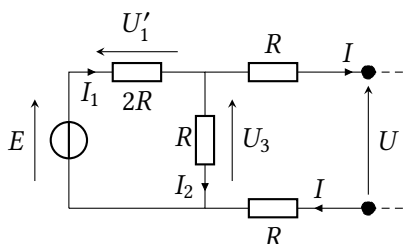


Figure 3 – Notations pour la démonstration du modèle de Thévenin.

Affirmer d'emblée que la tension à vide vaut U_0 « parce que c'est le même nom » et la résistance interne $8R/3$ « parce que c'est la résistance équivalente » ne démontre rien du tout ! Il s'agit en effet de résultats généraux sur le modèle de Thévenin d'un générateur, mais que nous n'avons jamais vus et que cette question a pour but de vous faire démontrer.

Une justification plus rigoureuse bien qu'incomplète consiste à étudier les cas $U = 0$ et $I = 0$. Pour un générateur de Thévenin, si $I = 0$ alors $U = E_T$, or nous avons montré que dans ce cas la tension de l'alimentation vaut $U = U_0 = E/3$ d'où on identifie E_T . Réciproquement, si $U = 0$ alors $I = E_T/R_T$, or pour notre alimentation $I = I_0 = E/8R$, ce qui permet d'identifier R_T . Cependant, cette démarche ne permet pas de prouver que la relation courant-tension est affine : bien qu'on voie mal comment cela pourrait être le cas avec des résistances, on pourrait également imaginer une relation polynômiale (ou exponentielle, ou autre) qui passerait par ces deux points particuliers.

4 En renversant la loi de comportement,

$$I = \frac{E_T}{R_T} - \frac{U}{R_T}.$$

La caractéristique est donc une droite affine, d'ordonnée à l'origine

$$I_{\text{ord}} = \frac{E_T}{R_T} = \frac{E}{8R} = I_0.$$

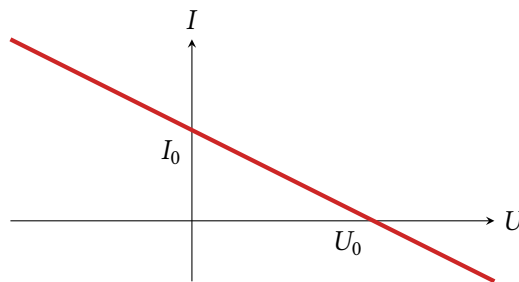


Figure 4 – Caractéristique de l'alimentation.

Le courant délivré par le générateur s'annule pour une tension telle que

$$U = E_T = \frac{E}{3} = U_0.$$

On en déduit le tracé de la figure 4.

5 L'alimentation fonctionne en générateur lorsque la puissance $\mathcal{P} = UI$ qu'elle fournit est positive, ce qui est le cas si U et I sont de même signe. Comme ils ne peuvent pas être négatifs simultanément, on déduit de la caractéristique que l'alimentation peut fournir **une tension $U \in [0, U_0]$ et un courant $I \in [0, I_0]$** .

Attention à ne pas confondre convention générateur/récepteur et fonctionnement générateur/récepteur. La convention ne dit rien du fonctionnement réel, et réciproquement !

B - Alimentation connectée au moteur

6 La loi d'additivité des tensions appliquée côté alimentation et côté moteur donne (attention aux conventions générateur/récepteur)

$$\begin{cases} U = E_T - R_T I \\ U = E_m + R_m I \end{cases}$$

On en déduit d'abord

$$E_T - R_T I = E_m + R_m I \quad \text{soit} \quad I = \frac{E_T - E_m}{R_T + R_m} = 0,38 \text{ A}.$$

Ensuite,

$$U = E_m + R_m \frac{E_T - E_m}{R_T + R_m} = \frac{R_T E_m + R_m E_m + R_m E_T - R_m E_m}{R_T + R_m} \quad \text{soit} \quad U = \frac{R_T E_m + R_m E_T}{R_m + R_T} = 7,3 \text{ V}.$$

7 Le moteur étant orienté en convention récepteur, la puissance totale qu'il reçoit s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = UI = \frac{(R_T E_m + R_m E_T)(E_T - E_m)}{(R_m + R_T)^2} = 2,8 \text{ W}$$

8 La puissance motrice produite est donnée par

$$\mathcal{P}_m = E_m I \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_m = \frac{(E_T - E_m)E_m}{R_T + R_m} = 1,9 \text{ W}.$$

Le rendement vaut donc

$$\eta = \frac{E_m I}{UI} \quad \text{soit} \quad \eta = \frac{(R_T + R_m)E_m}{R_T E_m + R_m E_T} = 0,68.$$

9 Pour que le moteur fonctionne en récepteur électrique, il faut $\mathcal{P}_{\text{tot}} \geq 0$, soit

$$E_m \leq E_T.$$

Il est vrai que la condition $\mathcal{P}_{\text{tot}} \geq 0$ revient ici à $I > 0$, mais cet argument ne peut suffire sans référence explicite au signe de la puissance.

10 Dérivons la puissance motrice, vue comme une fonction de E_m . On peut réécrire

$$\mathcal{P}_m = \frac{E_T}{R_T + R_m} E_m - \frac{1}{R_T + R_m} E_m^2$$

ce qui donne

$$\frac{d\mathcal{P}_m}{dE_m} = \frac{E_T}{R_T + R_m} - \frac{2}{R_T + R_m} E_m = \frac{E_T - 2E_m}{R_T + R_m}.$$

La dérivée s'annule (et la puissance est donc maximale) pour $E_m^* = E_T/2$. On a alors

$$\mathcal{P}_m^* = \frac{E_T^2}{4(R_T + R_m)} = 2,2 \text{ W},$$

et on peut en déduire le rendement

$$\eta(E_m^*) = \frac{R_T + R_m}{R_T + 2R_m} = 81 \%.$$

11 On peut bien sûr calculer la dérivée $d\eta/dE_m$ et montrer qu'elle est toujours positive, mais ici il est plus astucieux de réécrire le rendement sous la forme

$$\eta = \frac{R_T + R_m}{R_T + R_m \frac{E_T}{E_m}}.$$

Lorsque la tension E_m augmente, le dénominateur diminue et le rendement augmente donc. Le meilleur rendement est obtenu pour la valeur maximale de E_m , soit $E_m = E_T$ et on a alors

$$\eta = \eta_{\text{max}} = 1.$$

Cependant, la puissance motrice est alors égale à 0 : bien qu'idéale d'un point de vue théorique, cette situation est **inexploitable en pratique**.