BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

Préparation à l'oral **Correction**

Électronique

Régimes transitoires

Exercice 1 : Circuit RL à deux mailles — oral Mines-Télécom PSI | 3 | 2

▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
▷ *Recherche de condition initiale.*

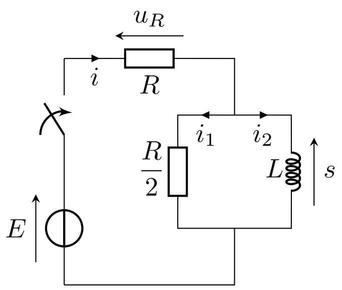


Figure 1 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

▷ *Première méthode : approche temporelle*

Avec les notations de la figure 1,

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

▷ *Deuxième méthode : approche fréquentielle*

L'association de la bobine et de la résistance $R/2$ a pour admittance équivalente

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance R,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}\right)\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{soit} \qquad 3\underline{S} + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}\underline{S} = \underline{E}\,.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en $\mathrm{j}\omega$,

$$3\mathrm{j}\omega\,\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E} \qquad \text{d'où} \qquad 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $e = E = $ cte la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0\,.}$$

> ***Moralité :*** *L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier e lorsqu'elle est constante.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▷ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds : $\quad i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

Continuité de i_2 : $\quad i(0^+) = i_1(0^+)$

Lois de comportement : $\quad \dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Loi des mailles : $\quad \dfrac{E - s(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Donc : $\quad E = 3s(0^+)$

Finalement : $\quad \boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{3}\,.}$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est* **absolument inutile** *de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne* **pas du tout** *sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
>
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{E}{3} \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 2.

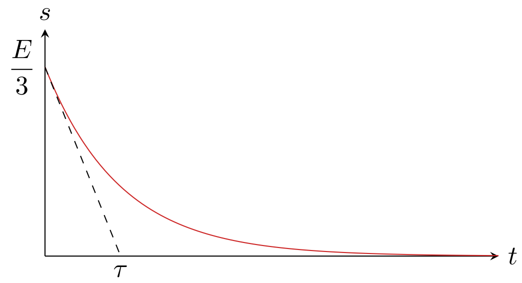
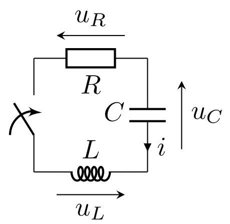


Figure 2 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 2 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 1 | 2

- ▷ *Équation différentielle du second ordre ;*
- ▷ *Montage expérimental.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Filtrage

Exercice 3 : Filtre de Wien — oral banque PT | 💡 2 | 🛠 2

- *Fonction de transfert ;*
- *Diagramme de Bode ;*
- *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

2 Notons $\underline{Y}$ l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\underline{Y}$, ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + 1}$$

3 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}x + \dfrac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

4 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}\,.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne **le gain maximal $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/3) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$**. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0, la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

$\boxed{5}$ Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-\mathrm{j}Q/x} = \frac{\mathrm{j}H_0 x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log \dfrac{H_0 x}{Q} = 20\log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log \dfrac{H_0}{Qx} = -20\log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente ± 20 dB/décade passant par $G_{\mathrm{dB}} = 0$ pour $x = 1$**, alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm\pi/2$.** Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\mathrm{dB}} = -9{,}5\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 3.

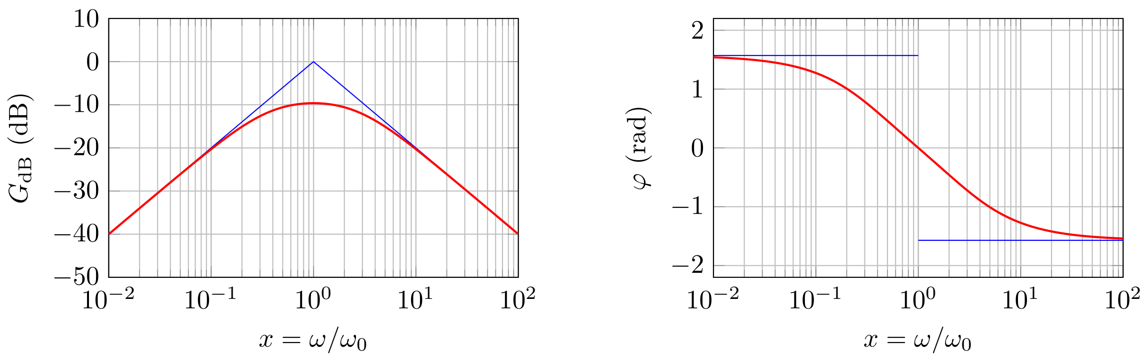


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

$\boxed{6}$ Numériquement, $\omega_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;
▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1{,}2$ rad.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10}\cos(\omega t - 1{,}2) + \frac{E_0}{3}\cos(10\,\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(100\,\omega t + 1{,}2)$$

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
>
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
>
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
>
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)|\, E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$
>
> *où* $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20}$ *et* $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Exercice 4 : Dipôles masqués

oral CCINP MP | 2 | 1

▷ *Équivalence de dipôles ;*
▷ *Fonction de transfert.*

▷ Comme le courant dans le circuit est non nul en régime continu, alors le condensateur est forcément monté en parallèle d'un autre dipôle ;
▷ Comme la tension de sortie est nulle en basse fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes de la bobine ;
▷ Comme la tension de sortie est nulle en haute fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes du condensateur.

⇝ Le dipôle D_2 est nécessairement une association parallèle entre la bobine et le condensateur ;

⇝ Le dipôle D_1 est donc forcément la résistance : s'il s'agissait d'un fil on aurait $s = e$ à toute fréquence ;

⇝ Le montage est donc celui de la figure 4.

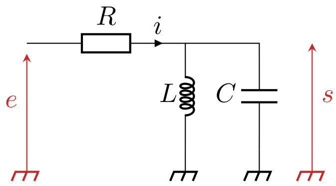


Figure 4 – Les dipôles démasqués !.

• **Analyse en régime continu :** la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la résistance est directement égale à E, d'où avec la loi d'Ohm

$$E = RI \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R = \frac{E}{I} = 3\,\mathrm{k}\Omega\,.}$$

• **Analyse en régime sinusoïdal :** l'admittance équivalente de l'association de la bobine et du condensateur est

$$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

Avec un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega}\,.$$

On peut donc identifier avec la forme canonique donnée,

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} = -\dfrac{\mathrm{j}Q\omega_0}{\omega} \\ \mathrm{j}RC\omega = \mathrm{j}Q\dfrac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} \\ \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \end{cases}$$

D'après les valeurs expérimentales,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 5\,.$$

On en déduit

$$\boxed{L = \frac{R}{Q\omega_0} = 95\,\mathrm{mH} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 2{,}7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}\,.}$$

Électronique numérique

Exercice 5 : Échantillonnage et spectre — exemple officiel banque PT | 2 | 0

▷ *Critère de Shannon ;*
▷ *Modification du spectre par échantillonnage.*

1 Comme le critère de Shannon est vérifié pour le spectre 1, alors la fréquence maximale du signal analogique est $f_{\max} = 450\,\mathrm{Hz}$. Puisque $f_{\max} > f_{e2}$, alors le critère de Shannon **n'est pas respecté** pour le spectre 2.

2 Lors de l'échantillonnage, toute composante de fréquence f se retrouve répliquée à la fréquence $f_e - f$. Ainsi, le pic présent dans le spectre 1 à 300 Hz a une réplique dans le spectre 2 à 200 Hz.

3 Le pic à 450 Hz du spectre 1 se trouve répliqué à 50 Hz lors de l'échantillonnage à f_{e2}, où le spectre 1 possède déjà un pic de même amplitude. Les deux composantes se somment alors dans le signal échantillonné. Si jamais les deux composantes sont en opposition de phase, comme elles sont de même amplitude, alors elles s'annulent dans le signal échantillonné, qui en fin de compte ne fait plus apparaître de composante à 50 Hz.

Montages à ALI

Exercice 6 : Filtre actif amplificateur — 2 | 2 |

▷ *Montage simple à ALI ;*
▷ *Régime linéaire et de saturation ;*
▷ *Filtrage.*

Le montage ne compte qu'une seule rétroaction négative, on fait donc l'hypothèse que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

1 • **Dans la limite des basses fréquences :** Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne peut traverser les résistances. Comme s est la tension aux bornes de R' on en déduit $s = 0$ c'est-à-dire que les basses fréquences sont **coupées**.

• **Dans la limite des hautes fréquences :** Le condensateur équivaut à un fil, le montage s'apparente alors à un amplificateur inverseur. On en déduit que les hautes fréquences sont **transmises**, et potentiellement amplifiées.

• **Conclusion :** le filtre est un passe-haut.

2 L'association R, C a pour impédance équivalente

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\,.$$

D'après la loi des nœuds en potentiel appliquée à l'entrée $\ominus$ de l'ALI avec $v_- = v_+ = 0$,

$$\frac{e-0}{\underline{Z}} + \frac{s-0}{R'} = 0$$

On en déduit

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R'}{\underline{Z}} = -\frac{R'}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{-R'/R}{1 + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}$$

On peut ainsi identifier à la forme canonique donnée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \mathrm{j}\frac{\omega_c}{\omega}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = -R'/R \\ \omega_c = 1/RC \end{cases}}$$

3 La capacité doit valoir

$$\boxed{C = \frac{1}{R\omega_c} = 1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}\,.}$$

En haute fréquence, $\underline{H} \sim \underline{H_0}$. Ainsi, si le gain est de 20 dB alors

$$\left|\underline{H_0}\right| = \frac{R'}{R} = 10^{20/20} = 10 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R' = 10\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

4 Dans la limite des hautes fréquences, d'après la question précédente,

$$G_{\mathrm{dB}} = 20 \log \left|\underline{H_0}\right| = 40\,\mathrm{dB}\,.$$

Dans l limite des basses fréquences,

$$\underline{H} \sim \frac{\underline{H_0}}{-\mathrm{j}\dfrac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}} = \frac{\mathrm{j}\omega \underline{H_0}}{\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{soit} \qquad G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \omega + 20 \log \frac{\left|\underline{H_0}\right|}{\omega_\mathrm{c}}\,.$$

Comme toujours avec les filtres du premier ordre, les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_\mathrm{c}$. On en déduit le diagramme est représenté figure 5.

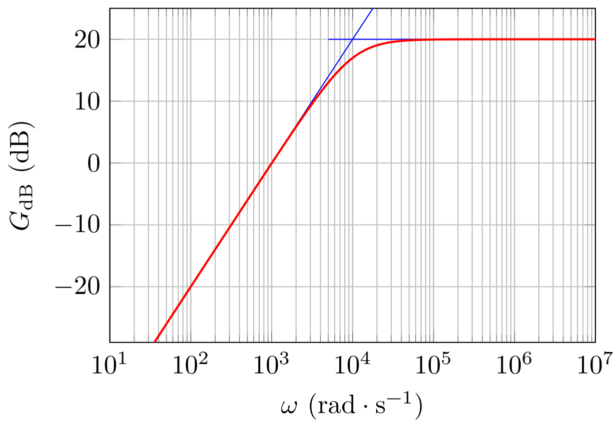


Figure 5 – Diagramme de Bode.

5 Le plus simple est de raisonner sur le diagramme de Bode, seul le dernier cas n'est pas évident.

- $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: on calcule (ou on constate sur le diagramme) que $G_{\mathrm{dB}} = -20\,\mathrm{dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{-20/20} = 1/10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $E_0/10 = 0{,}1\,\mathrm{V}$ et le spectre identique à celui de l'entrée, à l'amplitude près.
- $E_0 = 3\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: de même, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude $0{,}3\,\mathrm{V}$.
- $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: à cette pulsation, $G_{\mathrm{dB}} = 20\,\mathrm{dB}$ donc $|\underline{H}| = 10^{20/20} = 10$, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $10E_0 = 10\,\mathrm{V}$.
- $E_0 = 3\,\mathrm{V}$ et $\omega = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: en reprenant le raisonnement précédent, le signal de sortie devrait avoir une amplitude de $30\,\mathrm{V}$ ... ce qui est impossible, car la tension de sortie doit rester inférieure à la tension de saturation de l'ALI. Le signal de sortie est donc un sinus écrété, qui conserve la valeur de $\pm 15\,\mathrm{V}$ dès que l'ALI est en saturation. Cela se traduit par un enrichissement spectral : outre le fondamental à $1 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, des harmoniques apparaissent dans le spectre à $2 \cdot 10^5$,$3 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ etc. mais prévoir leur amplitude n'est pas simple.

Exercice 7 : Simulateur d'inductance 2 | 2

- *Impédance d'entrée ;*
- *Régime linéaire.*

On utilise les notations de la figure 6. D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}$$

La résistance $-R_N$ est directement soumise à la tension $\underline{U}$, donc

$$\underline{I_1} = -\frac{\underline{U}}{R_N}\,.$$

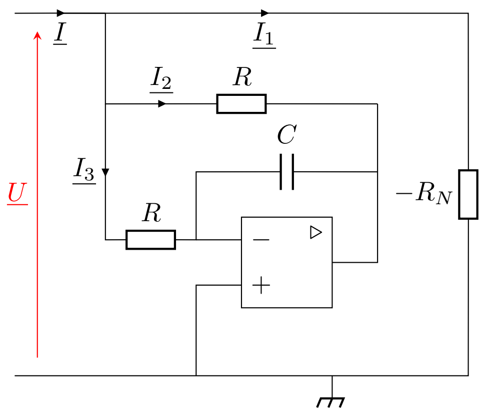


Figure 6 – Notations pour l'étude du simulateur d'inductance.

De plus, comme l'ALI est en régime linéaire alors $V_- = V_+ = 0$ et on en déduit

$$\underline{I_3} = \frac{\underline{U}}{R}$$

car la résistance se trouve directement soumise à la tension $\underline{U}$ elle aussi. Enfin, pour exprimer $\underline{I_2}$, on applique la loi des mailles aux deux branches « R » et « RC »,

$$R\underline{I_2} = R\underline{I_3} + \frac{\underline{I_3}}{\mathrm{j}C\omega} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{I_2} = \frac{\underline{U}}{R}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right).$$

On en déduit donc

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}}{R_N} + \frac{\underline{U}}{R}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\right) + \frac{\underline{U}}{R}$$

d'où

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}R^2C\omega} - \frac{1}{R_N}\,.}$$

> *Contrairement à la majorité des exercices avec ALI, exprimer la tension de sortie n'a aucun intérêt ici, voire est contre-productif car cela introduit une inconnue supplémentaire dans les calculs.*

1 Une inductance pure a une admittance complexe $\underline{Y_L} = 1/\mathrm{j}L\omega$: l'admittance d'entrée du montage prend une telle forme **pour $R_N = R/2$**, et auquel cas

$$\boxed{L_{\text{éq}} = R^2C\,.}$$

Exercice 8 : Démodulateur à déphasage — oral banque PT | 💡 3 | 🛠 2

- ▷ *Montage à plusieurs blocs ;*
- ▷ *Régime linéaire ;*
- ▷ *Filtrage.*

> *Les premières questions sont d'un niveau tout à fait raisonnable, en revanche la dernière est vraiment très difficile.*

1 Un ALI idéal se caractérise par
▷ une impédance d'entrée infinie, donc des courants de polarisation nuls ;
▷ une impédance de sortie nulle, donc un courant de sortie indépendant de la tension de sortie ;
▷ une saturation éventuelle de la tension de sortie ($V_\text{sat} \simeq 15\,\text{V}$) et du courant de sortie ($i_\text{sat} \simeq 40\,\text{mA}$).
On peut également supposer son gain infini, et un slew rate infini.

L'ALI présent dans le système possède une rétroaction sur sa borne ⊖, il fonctionne donc probablement **en régime linéaire**.

2 Par la loi des nœuds en potentiel,

$$\frac{\underline{U_\text{e}} - \underline{V_-}}{R} + \frac{\underline{U_1} - \underline{V_-}}{R} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{V_-} = \frac{\underline{U_1} + \underline{U_\text{e}}}{2}\,.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{U_\mathrm{e}}} = \frac{1/\mathrm{j}C_1\omega}{R_1 + 1/\mathrm{j}C_1\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega} \qquad \text{donc} \qquad \underline{V_+} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_\mathrm{e}}\,.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire, $\underline{V_-} = \underline{V_+}$, donc

$$\frac{\underline{U_1}+\underline{U_\mathrm{e}}}{2} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_\mathrm{e}} \qquad \text{soit} \qquad \underline{U_1} = \frac{2}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\underline{U_\mathrm{e}} - \underline{U_\mathrm{e}}$$

d'où

$$\boxed{\underline{H_1} = \frac{1-\mathrm{j}R_1C_1\omega}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\,.}$$

La fonction de transfert $\underline{H_1}$ est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module : on en déduit directement

$$\forall\omega, \quad \boxed{\left|\underline{H_1}\right| = 1\,.}$$

L'argument est donné par

$$\arg\underline{H_1} = \arg(1-\mathrm{j}R_1C_1\omega) - \arg(1+\mathrm{j}R_1C_1\omega) = \arctan\frac{-R_1C_1\omega}{1} - \arctan\frac{R_1C_1\omega}{1}$$

On en conclut

$$\boxed{\arg\underline{H_1} = -2\arctan(R_1C_1\omega)\,.}$$

3 Comme $\left|\underline{H_1}\right| = 1$, alors u_e et u_1 sont toujours de même amplitude. La condition porte donc sur le déphasage : on cherche ω_0 tel que

$$\arg\underline{H_1}(\omega_0) = -2\arctan(R_1C_1\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad \arctan(R_1C_1\omega_0) = \frac{\pi}{4}$$

et comme $\tan(\pi/4) = 1$, il vient

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}\,.}$$

4 La loi de comportement du multiplieur s'écrit ici

$$u_2(t) = K u_\mathrm{e}(t)\,u_1(t)\,.$$

Posons $\varphi_1(\omega) = -2\arctan(R_1C_1\omega)$: d'après ce qui précède,

$$u_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1)\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u_2(t) &= KA^2\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi_1) \\ &= \frac{KA^2}{2}\left[\cos(2\omega t+\varphi_1) + \cos(\varphi_1)\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2(t) = \frac{KA^2}{2}\cos(\varphi_1) + \frac{KA^2}{2}\cos(2\omega t+\varphi_1)\,.}$$

5 Si $\omega = \omega_0$, alors par définition $\varphi_1 = -\pi/2$ et donc

$$u_2(t) = \frac{KA^2}{2}\cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction de transfert de l'association R_2, C_2 vaut

$$\underline{H_2} = \frac{1/\mathrm{j}C_2\omega}{R_2 + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_2C_2\omega}\,,$$

ce qui donne

$$\left|\underline{H_2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(R_2C_2\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \arg\underline{H_2} = -\arctan(R_2C_2\omega)\,.$$

On a donc

$$\boxed{u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{1+(2R_2C_2\omega_0)^2}}\cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctan(2R_2C_2\omega_0)\right)}$$

La tension u_s est harmonique, donc pour qu'elle soit constante il faut que son amplitude soit nulle. Le filtre étant passe-bas, il faut que la pulsation $2\omega_0$ soit bien supérieure à la pulsation de coupure du filtre, soit

$$2\omega_0 \gg \frac{1}{R_2C_2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{2}{R_1C_1} \gg \frac{1}{R_2C_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_2 \gg \frac{R_1C_1}{2R_2}\,.}$$

6 Pour la tension d'entrée proposée, le déphasage φ_1 en sortie de l'ALI vaut

$$\varphi_1 = -2\arctan\left[R_1C_1(\omega_0+\Delta\omega)\right] = -2\arctan\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

car $R_1C_1\omega_0 = 1$. Par un développement limité autour de $x = 1$, sachant que $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$,

$$\varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1+1^2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\,.$$

Le terme de fréquence double de la tension u_2 sera coupé par le filtre passe-bas, en revanche comme cette fois $\varphi_1 \neq \pi/2$, la tension de sortie sera non nulle, égale à

$$U_s = \frac{KA^2}{2}\cos(\varphi_1) = \frac{KA^2}{2}\sin\left(-\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

et comme $\Delta\omega \ll \omega_0$, un développement limité donne

$$\boxed{U_s = -\frac{KA^2}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\,.}$$

La mesure de $\Delta\omega$ est donc possible à partir de celle de la tension de sortie.

> *Le calcul que je propose ci-dessus me semble bien trop difficile pour être celui attendu lors d'un oral de banque PT ... mais je ne vois pas comment faire autrement pour répondre à la question !*

Oscillateurs

Exercice 9 : Astable compact

oral banque PT | 2 | 2 |

- *Oscillateur de relaxation ;*
- *Période des oscillations.*

1 À l'aide d'un GBF, on impose en entrée un signal sinusoïdal d'amplitude suffisante (il faut pouvoir atteindre les tensions $\pm V_1$). On enregistre les deux tensions u_e et u_s à l'oscilloscope, que l'on affiche en mode XY.

Le montage est un **comparateur à hystérésis inverseur**. L'ALI fonctionne en régime de saturation. S'il est en état de saturation haute, il y reste tant que $u_e < V_1$; et s'il est en état de saturation basse, il y reste tant que $u_e > -V_1$.

2 On a $v_- = u_e$, et par un pont diviseur de tension,

$$\frac{v_+}{u_s} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,.$$

V_1 est la tension de basculement haut $\to$ bas. On suppose donc l'ALI en saturation haute, et il bascule lorsque

$$v_+ = v_- \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat} = u_e$$

d'où on déduit directement

$$\boxed{V_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}\,.}$$

3 La courbe en traits pleins correspond à u_C : en raison de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, la courbe en traits pointillés ne peut convenir. Celle-ci représente donc u_s : l'ALI fonctionne en régime de saturation. On observe une succession de phases de charge et de décharge du condensateur qui font basculer l'ALI lorsque $u_C = \pm V_1$.

4 Pendant la première phase, l'ALI est en saturation haute : $u_\mathrm{s} = +V_\mathrm{sat}$.

Équation différentielle : d'après la loi des mailles,

$$u_C + R_3 i_3 = +V_\mathrm{sat} \qquad \text{soit} \qquad R_3 C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = V_\mathrm{sat}\,.$$

Solutions :

$$u_C(t) = V_\mathrm{sat} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = R_3 C$$

Condition initiale :

$$u_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{courbe}}}{=} -V_1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} V_\mathrm{sat} + A \qquad \text{d'où} \qquad A = -V_1 - V_\mathrm{sat} = -\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_\mathrm{sat}\,.$$

Durée de la première phase : il y a basculement à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} -\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_\mathrm{sat}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + V_\mathrm{sat} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{basculement}}}{=} V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_\mathrm{sat}$$

On résout donc

$$-\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{soit} \qquad -(2R_1 + R_2)\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + R_1 + R_2 = R_1 \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$$

ce qui donne enfin

$$t_1 = \tau \ln \frac{2R_1 + R_2}{R_2}$$

On procède de même pour la deuxième phase, qui dure un temps $t_2 = t_1$ et on en déduit la période des oscillations $T = t_1 + t_2$, qui vaut

$$T = 2\tau \ln \frac{2R_1 + R_2}{R_2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T = 2R_3 C \ln\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right)\,.}$$

Exercice 10 : Oscillateur de Hartley

oral banque PT | 2 | 2 |

- ▷ *Oscillateur quasi-sinusoïdal ;*
- ▷ *Condition d'oscillation ;*
- ▷ *Démarrage des oscillations.*

1 • **Limite basse fréquence :** la tension de sortie est mesurée aux bornes d'une bobine, qui équivaut alors à un fil, elle est donc nulle.

• **Limite haute fréquence :** notons $\underline{u_C}$ la tension aux bornes du condensateur. Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{u_{L_2}} = \frac{\mathrm{j}L_2\omega}{\mathrm{j}L_1\omega + \mathrm{j}L_2\omega}\underline{u_C} = \frac{L_2}{L_1 + L_2}\underline{u_C}\,.$$

Comme $\underline{u_C} \to 0$ dans la limite haute fréquence, alors $\underline{u_{L_2}}$ également.

• **Conclusion :** le filtre est un passe bande, la fonction de transfert correspondante est donc $\underline{H_2}$. En effet, $\underline{H_1}(\omega = 0) = H_0 \neq 0$ et $\underline{H_3}(\omega \to \infty) = H_0 \neq 0$.

2 Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = H_0$ réel, donc $\varphi = 0$. De la courbe de phase on déduit donc

$$\boxed{f_0 = 1\,\mathrm{kHz}\,,}$$

et de la courbe de gain

$$20 \log H_0 = -4{,}5 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{H_0 = 10^{-4{,}5/20} \simeq 0{,}6\,.}$$

Pour le facteur de qualité le plus simple est d'étudier la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \simeq \frac{1000}{80} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q = 12{,}5\,.}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Le montage à ALI est un amplificateur non-inverseur. Avec un pont diviseur de tension, on obtient

$$\boxed{\underline{H_{ALI}} = \frac{R_2 + \alpha R_2}{R_2} = 1 + \alpha\,.}$$

D'après le critère de Barkhausen, si les oscillations sont parfaitement sinusoïdales, alors

$$\underline{H_2}\,\underline{H_{ALI}} = 1 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} H_0}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\,(1+\alpha) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} H_0 (1+\alpha) = 1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Par identification des parties réelles,

$$0 = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega = \omega_0\,,}$$

les oscillations ont lieu à la fréquence centrale du filtre. Par identification des parties imaginaires,

$$H_0(1+\alpha) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{H_0} - 1 = \frac{2}{3}\,.}$$

> *Le critère de Barkhausen fournit en réalité deux conditions, en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire. L'une des deux donne la condition d'amplification, l'autre donne la pulsation d'oscillation. Pour gagner du temps lors de l'oral, je pense qu'on peut d'emblée affirmer que la fréquence des oscillations est f_0 et avancer plus rapidement pour trouver α.*

$\boxed{\mathbf{4}}$ Étudier le démarrage des oscillations demande de repasser dans le domaine temporel. Avec les fonctions de transfert,

$$\underline{H_2}\,\underline{H_{ALI}}\,\underline{u} = \underline{u} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{j}\omega \frac{H_0(1+\alpha)}{Q\omega_0}\underline{u} = \underline{u} + \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}\underline{u} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{u}$$

En regroupant,

$$\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{u} + \frac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0}\left(H_0(1+\alpha) - 1\right)\underline{u} + \underline{u} = 0$$

et on en déduit

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\omega_0 Q}\left(H_0(1+\alpha) - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0$$

ou encore sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\left(H_0(1+\alpha) - 1\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0$$

Les oscillations démarrent si le transitoire est instable. C'est le cas si les termes de l'équation différentielle sont de signe différent, i.e. $H_0(1+\alpha) - 1 < 0$ c'est-à-dire $\alpha < 2/3$.

> *Cette approche permet également de répondre à la question précédente : les oscillations sont parfaitement sinusoïdales si l'équation différentielle s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire si le terme d'ordre 1 est nul.*

Pour trouver la croissance de l'amplitude, il faut résoudre explicitement l'équation différentielle. Le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\left(H_0(1+\alpha) - 1\right) r + {\omega_0}^2 = 0$$

et il a pour racines

$$r_\pm = \frac{\omega_0}{2Q}\left(H_0(1+\alpha) - 1\right) \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{\left(H_0(1+\alpha) - 1\right)^2}{Q^2} - 4} = \frac{1}{\tau} \pm \mathrm{j}\omega\,.$$

On en déduit

$$u(t) = \mathrm{e}^{+t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

avec A et B deux constantes dépendant des conditions initiales. On constate que **l'amplitude des oscillations augmente exponentiellement**, jusqu'à atteindre la saturation de l'ALI.