



Électromagnétisme

Régimes stationnaire

Exercice 1 : Charge en surface d'une cellule

oral banque PT | 💡 1 | ✂️ 1



- ▷ Lien entre champ et potentiel ;
- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Relation de passage ;
- ▷ Coordonnées cartésiennes.

1 La membrane peut être considérée localement plane si $e \ll R$ et d'épaisseur infinie si $a \ll e$.

2 Comme le champ est statique,

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x,$$

d'où

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } x \leq 0 \\ +\frac{V_0}{a} e^{-x/a} \vec{u}_x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

3 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\rho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx}$$

d'où

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

D'après la relation de passage donnée et les expressions des champs,

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}.$$

4 Je suppose que l'examinateur souhaite un calcul où le cylindre se trouve de part et d'autre de la membrane. On raisonne donc sur un cylindre de section S et situé entre $x' < 0$ et $x > 0$. La charge contenue dans ce cylindre vaut

$$Q = \int_{x'}^x \rho(x) S dx + \sigma S = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a^2} \int_0^x e^{-x/a} dx + \sigma S$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^x e^{-x/a} dx = \left[-a e^{-x/a} \right]_0^x = a \left(1 - e^{-x/a} \right).$$

On en déduit

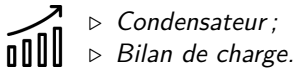
$$Q = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} \left(1 - e^{-x/a} \right) + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a} S$$

$$Q = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} e^{-x/a}$$

Ce résultat signifie que l'effet de la charge surfacique portée par la membrane de la cellule s'atténue exponentiellement avec une longueur caractéristique a . Cette atténuation est due à la présence des ions dans l'électrolyte, qui viennent se grouper par charge opposée autour de la membrane et finissent par masquer cette charge à suffisamment grande distance : le phénomène porte le nom d'écrantage.

Exercice 2 : Double couche électrochimique

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



1 Si la charge en surface de l'électrode est négative, alors elle attirera les cations, et réciproquement : compte tenu des conventions de signe de la figure, σ_1 est donc du même signe que σ .

2 Cf. cours pour la démonstration. Pour un plan chargé P situé en $x = x_P$, on a

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > x_P \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < x_P \end{cases}$$

Ici, en tout point de la solution, le champ créé par les électrodes vaut

$$\vec{E}_{\text{él}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x.$$

Le champ créé par les couches d'ions varie en fonction de x :

▷ si $x < -a/2 + e$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x - \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

▷ si $-a/2 + e < x < a/2 - e$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x - \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

▷ si $a/2 - e < x < a/2$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x + \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

Les électrodes et les couches d'ions forment une structure analogue à deux condensateurs imbriqués l'un dans l'autre. Le champ total est simplement la somme des deux champs.

3 Tant que le champ électrique total au sein de la solution est non nul, alors des ions continueront à migrer pour modifier σ_1 . Le phénomène ne cesse que lorsque le champ électrique dans la solution est nul, d'où

$$\sigma_1(t \rightarrow \infty) = \sigma.$$

4 Par définition,

$$U = \int_{x=-a/2}^{x=a/2} dV = - \int_{x=-a/2}^{x=a/2} \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

En reprenant les expressions précédentes des champs, le potentiel est partout linéaire, d'où

$$U = - \left[\frac{\sigma e}{\varepsilon_0} + \frac{(\sigma_1 - \sigma)(a - 2e)}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} \right] = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} (e + 2e - a + e) - \frac{\sigma_1(a - 2e)}{\varepsilon_0}$$

et finalement

$$U = \frac{\sigma(a - 4e)}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1(a - 2e)}{\varepsilon_0}.$$

5 Le passage des ions au travers de la solution est décrit par un courant

$$\vec{j} = j_x \vec{e}_x = \gamma \vec{E}.$$

Supposons les électrodes (et les couches ioniques) de surface S . La charge stockée sur la couche de charge $-\sigma_1$ vaut donc

$$q(t) = -\sigma_1(t) S.$$

Entre t et $t + dt$, elle varie de

$$dq = j_x S dt = \gamma \frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0} S dt \quad \text{d'où} \quad - \frac{d\sigma_1}{dt} S dt = \gamma \frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0} S dt$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \sigma_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \sigma.}$$

En posant $\tau = \varepsilon_0/\gamma$ et comme $\sigma_1(0) = 0$, on en déduit

$$\boxed{\sigma_1(t) = \sigma \left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$$

Exercice 3 : Flocculation d'une suspension colloïdale

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 3



- ▷ Équation de Poisson ;
- ▷ Lien entre champ et potentiel ;
- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

L'énoncé est fidèle à celui rapporté par le candidat, j'y ai juste ajouté le document pour préciser le contexte et donner du sens aux calculs.

1 Le rayon d'un ion est similaire à celui d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} m, très inférieur à celui du colloïde.

2 La densité de charge s'écrit

$$\rho(r) = zeN_+(r) - zeN_-(r) = zeN_0 \left(e^{-zeV(r)/k_B T} - e^{+zeV(r)/k_B T} \right).$$

Comme $|zeV(r)| \ll k_B T$, on peut développer au premier ordre

$$\rho(r) \simeq zeN_0 \left(1 - \frac{zeV(r)}{k_B T} - 1 - \frac{zeV(r)}{k_B T} \right)$$

soit finalement

$$\boxed{\rho(r) \simeq - \frac{2z^2 e^2 N_0}{k_B T} V(r).}$$

3 • **Équation différentielle sur V** : D'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = - \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} V(r).$$

En utilisant l'expression du laplacien fournie,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) = \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} V(r),$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$\frac{d^2}{dr^2} (rV) - \frac{2z^2 e^2 N_0}{\varepsilon_0 k_B T} rV(r) = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre portant sur la fonction $u(r) = rV(r)$, et on introduit une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{2z^2 e^2 N_0}},$$

soit

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{\delta^2} u = 0.$$

- **Résolution** : Le polynôme caractéristique associé à cette équation s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad r_{\pm} = \pm 1/\delta.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme

$$u(r) = A e^{-r/\delta} + B e^{r/\delta},$$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta} + \frac{B}{r} e^{r/\delta}.$$

En supposant le potentiel électrostatique nul à l'infini (possible car distribution finie), on en déduit que $B = 0$:

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\delta}.$$

- 4 Le champ électrique s'obtient par dérivation du potentiel,

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad E_r(r) = \frac{A}{r^2} e^{-r/\delta} - \frac{A}{r} \times \frac{-1}{\delta} e^{-r/\delta}$$

ce qui s'écrit finalement

$$E_r(r) = \frac{A}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\delta}\right) e^{-r/\delta}.$$

On retrouve bien la forme de l'énoncé.

On raisonne sur une surface de Gauss sphérique de rayon R , identique à celle du colloïde. D'après le théorème de Gauss,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \frac{A}{R^2} \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) e^{-R/\delta} \times 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

d'où on déduit

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\delta}\right) e^{-R/\delta}}$$

- 5 En l'absence des ions, $N_0 = 0$ donc $\delta \rightarrow \infty$. Le champ électrique créé par le colloïde pour $r > R$ équivaut à celui d'une charge ponctuelle, $E_r(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, qui décroît comme $1/r^2$. L'ajout des sels ioniques renforce nettement cette décroissance à grande distance ($r \gg \delta$) puisque le terme en $1/r^2$ est remplacé par $e^{-r/\delta}/r$. Ainsi, les ions permettent d'écranter le champ créé par le colloïde, et ce faisant de masquer sa présence aux colloïdes environnants, ce qui est favorable à la floculation.

Exercice 4 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Théorème d'Ampère;
- ▷ Principe de superposition.

- 1 Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

- 2 Par définition, $\vec{OM} = r \vec{u}_r$. Il faut donc exprimer \vec{u}_θ en fonction de \vec{u}_z et \vec{u}_r , ce qui se fait grâce au produit vectoriel $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$. Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_z \wedge \vec{OM}.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_z \wedge \vec{OM} & \text{si } r \geq R \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \vec{u}_z \wedge \vec{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant $j\vec{u}_z$ et $-j\vec{u}_z$. À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec O' un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO'}$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

Exercice 5 : Câble coaxial

oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ Théorème de Gauss ;
- ▷ Condensateur ;
- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Énergie magnétique.

1 Un théorème de Gauss sauvage apparaît ! La distribution de charge est schématisée figure 1.

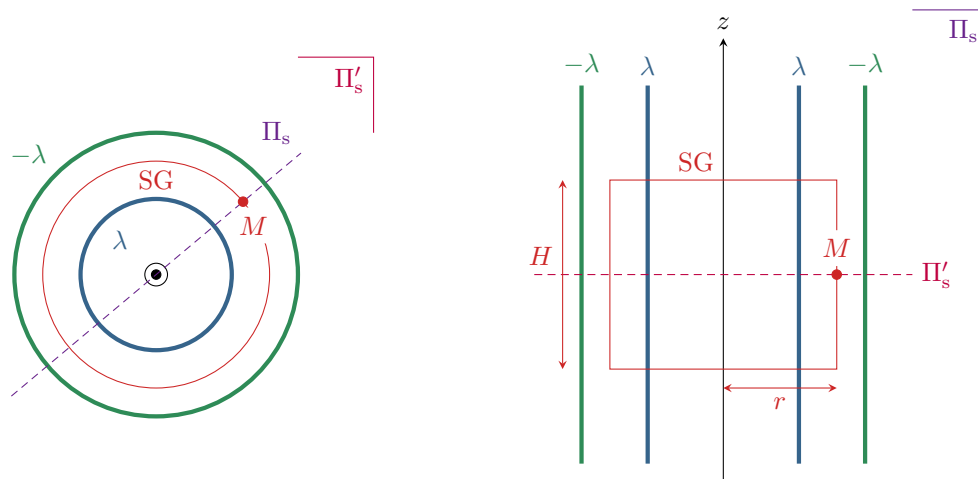


Figure 1 – Distribution de charge dans le câble coaxial.

• Symétries :

- ▷ le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
- ▷ le plan $\Pi'_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
- ▷ le champ électrique est inclus dans ces deux plans, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r .$$

- **Invariances** : en supposant le câble infini, la distribution de charges est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r .$$

- **Surface de Gauss** : cylindre d'axe (Oz) passant par M , de rayon r et hauteur H , fermé par deux disques de normale \vec{e}_z .

• Flux sortant :

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{bas}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (-dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{haut}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (+dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = E_r(r) \times 2\pi r H .$$

- **Charge intérieure** : la question ne porte que sur le champ entre l'âme et le blindage. On constate que la surface de Gauss choisie correspond à une longueur H de câble en ne contenant que l'âme, si bien que la charge intérieure y vaut

$$Q_{\text{int}} = \lambda H .$$

Et il ne coûterait pas bien cher de constater que $Q_{int} = 0$ à l'intérieur de l'âme et à l'extérieur du blindage ($\lambda H - \lambda H = 0$)! Ainsi, le champ électrostatique est nul à l'extérieur du câble coaxial : c'est l'un de ses intérêts, qui le rend robuste aux perturbations électromagnétiques.

• **Conclusion** : d'après le théorème de Gauss,

$$E_r(r) \times 2\pi r \mathcal{H} = \frac{\lambda \mathcal{H}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} \vec{e}_r .}$$

2 Par définition,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad dV = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r} .$$

En intégrant entre le blindage et l'âme,

$$\int_U^0 dV = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \quad \text{d'où} \quad -U = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

et finalement

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} U .}$$

3 En introduisant les grandeurs linéiques dans la définition de la capacité,

$$Q = CU \quad \text{donc} \quad \lambda dl = C dl U \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{\lambda}{U} .}$$

Par identification avec la question précédente,

$$\boxed{C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} .}$$

4 Un théorème d'Ampère sauvage apparaît! La distribution de courant est schématisée figure 2. Elle n'est pas immédiate à comprendre, il ne faut surtout pas aller chercher plus loin que nécessaire ... et ce qui est nécessaire est de savoir que $\pm I$ désigne le courant *total* réparti en surface des conducteurs.

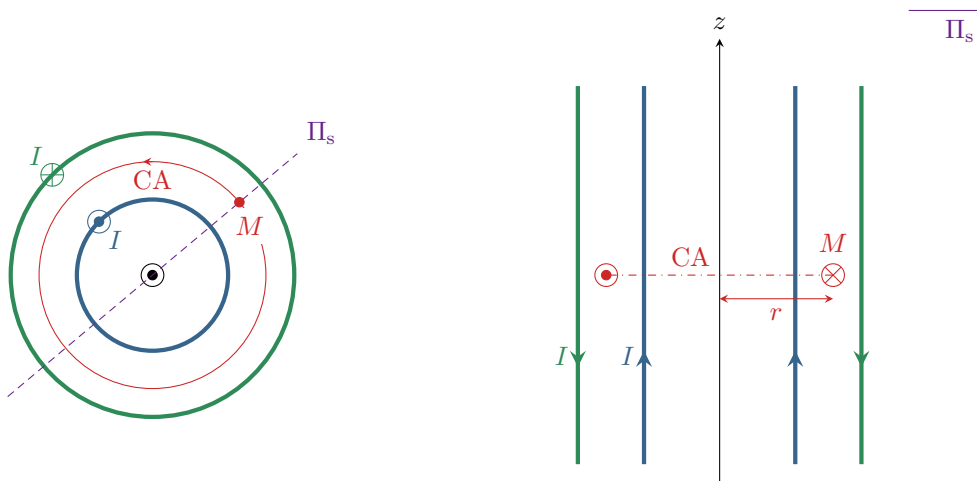


Figure 2 – Distribution de courant dans le câble coaxial.

• **Symétries** : le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta .$$

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Le plan Π'_s représenté figure 1 est un plan d'**anti**-symétrie de la distribution de courant : il n'y a aucune raison que les plans aient le même statut s/a pour les deux distributions. Le

champ magnétique doit être inclus dans ce plan, ce qui est cohérent avec son caractère orthoradial.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, d'où

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

- **Contour d'Ampère** : cercle de rayon r passant par M .

- **Circulation** :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r) \times 2\pi r.$$

- **Courant enlacé** : la question ne porte à nouveau que sur le champ entre l'âme et le blindage, zone dans laquelle le courant enlacé vaut en tout point

$$I_{\text{enl}} = I.$$

Attention à ne pas se tromper dans le courant enlacé : comme déjà indiqué au début de l'exercice, I est le courant **total** qui parcourt l'âme.

On peut en plus constater qu'à l'intérieur de l'âme $I_{\text{enl}} = 0$ et à l'extérieur du blindage $I_{\text{enl}} = I - I = 0$. Comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est donc nul à l'extérieur du câble.

- **Conclusion** : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_\theta(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

- 5 La densité volumique d'énergie magnétique vaut

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^2} \times \frac{1}{2\mu_0} \quad \text{soit} \quad u_m = \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2.$$

Ainsi, l'énergie magnétique stockée dans le tronçon élémentaire de câble vaut

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_m &= \iiint \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2 r \, dr \, d\theta \, d\ell \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \int_0^{2\pi} d\theta \times d\ell \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \times 2\pi \times d\ell \times \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{d\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} d\ell \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) I^2.}$$

- 6 L'énergie magnétique s'exprime en fonction de l'inductance $\mathcal{L} d\ell$ du tronçon

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mathcal{L} d\ell I^2$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.}$$

Dans cette situation, la méthode énergétique est beaucoup plus facile que le calcul du flux propre pour calculer l'inductance : il n'est clairement pas évident de voir au travers de quelle surface le flux propre doit être calculé !

Exercice 6 : Supraconducteur

exemple officiel banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Équations de Maxwell ;
- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Inductance propre.

1 Les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Soit une surface S s'appuyant sur un contour fermé C . On se place en régime stationnaire.

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{enl}} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}, \end{aligned}$$

où I_{enl} est le courant enlacé par le contour C . Ainsi,

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}.}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{London}}}{=} -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MT}}}{=} -\Delta \vec{B}. \end{aligned}$$

En identifiant on en déduit

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}.}$$

3 L'énoncé n'est pas des plus clair ... il suppose implicitement qu'il y a invariance par translation selon x et y , et surtout qu'il y a continuité du champ magnétique en $x = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas. Sous ces hypothèses, l'équation devient

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad r = \pm \frac{1}{\lambda}$$

et les solutions sont donc de la forme

$$\vec{B} = \vec{K}_1 e^{-x/\lambda} + \vec{K}_2 e^{+x/\lambda}$$

avec \vec{K}_1 et \vec{K}_2 deux constantes vectorielles. En admettant que le champ magnétique ne diverge pas lorsque $x \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\vec{K}_2 = \vec{0}.$$

Enfin, en supposant la continuité du champ magnétique en $x = 0$ on obtient $\vec{K}_1 = \vec{B}_1$ d'où finalement

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1 e^{-x/\lambda}.}$$

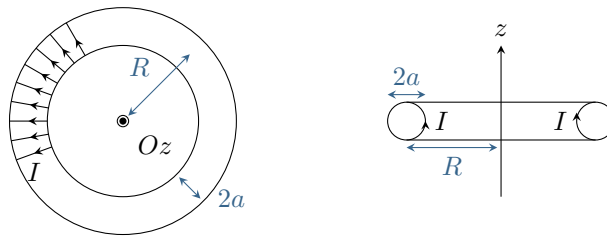


Figure 3 – Bobine torique.

4 Raisonsnons sur la figure 3 : le tore est supposé de rayon moyen R , sa section circulaire de rayon a , et il est bobiné par $N \gg 1$ spires réparties continûment. Soit M un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances** : comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz . Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ , d'où

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.}$$

• **Théorème d'Ampère** :

▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz , orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r, z) = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}}$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

Je ne suis pas sûr de comprendre la suite de la question ... Si l'on envoie des électrons au travers du tore, ils ne voient aucun champ magnétique et donc ne doivent pas être déviés par la force de Lorentz.

La suite de la question est complètement hors de portée d'un candidat en PT : l'expérience de Tonomura a permis de vérifier un effet de mécanique quantique appelé effet Aharonov-Bohm qui indique que même si le champ magnétique est nul les électrons ressentent son effet via le potentiel vecteur ... qui est hors programme en PT.

5 Le champ magnétique à l'intérieur du tore est donné par l'expression précédente. Le flux au travers d'une spire vaut

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \times a \times \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.$$

Le flux propre du tore est

$$\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

et par définition $L = \phi/I$ d'où

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).}$$

Exercice 7 : Émission radioactive

d'après divers oraux | 💡 2 | ✂ 2



▷ Équations de Maxwell.

1 L'amas émet des charges positives, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a $q(t=0) = 0$: aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique : $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Ainsi, tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M, t)$ doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

Au delà de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{E} / \partial t$. Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour chaque « famille » de sources. Les symétries des courants imposent d'avoir $\vec{B} = \vec{0}$, le champ électrique ne pourra donc rien y changer.

3 • **Symétries** : la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais comme \vec{E} doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M, t) = E_r(M, t) \vec{e}_r.$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial \vec{B} / \partial t$... mais ce n'est pas la peine ici car $\vec{B} = \vec{0}$, tout se passe exactement comme en statique.

• **Invariances** : à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc \vec{E} ne dépend que de r .

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi dans l'ARQS : on raisonne sur une sphère de rayon r centré sur l'amas.

▷ calcul du flux : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r$.

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps r/v_0 pour qu'une particule α sorte de la sphère de rayon r , donc la charge contenue dans la sphère à un instant t est la charge de l'amas à l'instant $t - r/v_0$.

$$Q_{\text{int}} = q \left(t - \frac{r}{v_0} \right)$$

• **Conclusion** :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp \left(-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right) \vec{e}_r.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[\exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right) \right] \\ &= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right) \end{aligned}$$

$$\rho(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi v_0\tau r^2} \exp \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau} \right)$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned}\vec{j}(r,t) &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \\ \boxed{\vec{j}(r,t) &= \frac{Q_0}{4\pi \tau r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r.}\end{aligned}$$

On retrouve $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$... on aurait pu s'y attendre!

Induction

Exercice 8 : Rails de Laplace couplés

d'après oraux banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⓧ

➤ Rails de Laplace;
➤ Bilan énergétique.

Utilisons les notations de la figure 4, et notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barreaux, et v_1 et v_2 leurs vitesses algébriques.

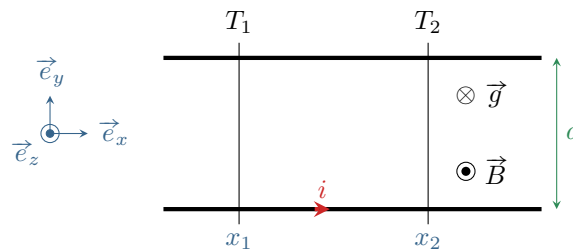


Figure 4 – Rails de Laplace couplés.

1 • Équation électrique : la surface du circuit est $a(x_2 - x_1)$ et le champ est uniforme, donc le flux magnétique vaut

$$\phi = a(x_2 - x_1) B$$

d'où on déduit la f.é.m. induite,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -a(v_2 - v_1)B.$$

Le circuit équivalent contient deux résistances R montées en série, équivalentes à une unique résistance $2R$, et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)B = 2Ri.$$

• Équations mécaniques : les deux équations mécaniques s'obtiennent par application du théorème de la résultante cinétique aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace. En orientant l'intensité comme sur la figure 4, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = i(+a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

Le TRC projeté sur \vec{e}_x donne alors

$$m\frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m\frac{dv_2}{dt} = +iaB.$$

- **Bilan** : en combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m \frac{dv_1}{dt} = \frac{(aB)^2}{2R} (v_2 - v_1) \\ m \frac{dv_2}{dt} = -\frac{(aB)^2}{2R} (v_2 - v_1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1) \end{cases}}$$

2 Sans indication, la question est un peu ardue ... Il faut découpler ces équations couplées en prenant la somme et la différence.

- **Différence** : posons $\delta = v_2 - v_1$. Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{\tau} \delta = 0$$

qui s'intègre en

$$\delta(t) = A e^{-t/\tau}.$$

À l'instant initial,

$$\delta(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_2(0) - v_1(0) = -v_0$$

si bien que

$$\delta(t) = -v_0 e^{-t/\tau}.$$

- **Somme** : posons maintenant $\sigma = v_1 + v_2$. À partir du système d'équations couplées, il vient

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma = \text{cte}.$$

La constante se détermine à l'instant initial,

$$\sigma = v_1(0) + v_2(0) = v_0.$$

- **Retour aux vitesses des barreaux** : en inversant,

$$v_1(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{\sigma + \delta}{2}$$

soit

$$\boxed{v_1(t) = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}) .}$$

3 Si la vitesse de la tige T_1 est imposée, c'est qu'elle est soumise à une force supplémentaire qui permet de la contrôler. Le TRC appliqué à T_1 est donc modifié par rapport aux questions précédentes. Raisonnons donc sur le TRC appliqué à T_2 traduit en représentation complexe,

$$j\omega v_2 = -\frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1)$$

qui donne

$$(1 + 2j\tau\omega)v_2 = v_1.$$

On en déduit l'amplitude,

$$|v_2| = \frac{|v_1|}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}$$

et le déphasage

$$\varphi = -\arg(1 + 2j\tau\omega) = -\arctan(2\tau\omega).$$

Ainsi,

$$\boxed{v_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} \cos[\omega t - \arctan(2\tau\omega)] .}$$

4 Les équations mécaniques s'écrivent

$$m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB$$

donc en les multipliant respectivement par v_1 et v_2 on obtient

$$mv_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = -iaBv_1 \quad \text{et} \quad mv_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) = iaBv_2.$$

Prenons maintenant l'équation électrique, et multiplions-là par i ,

$$-a(v_2 - v_1)B = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)Bi = 2Ri^2.$$

En combinant on en déduit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = 2Ri^2$$

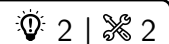
ou encore

$$\underbrace{-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right)}_{\text{énergie cinétique perdue par 1}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right)}_{\text{énergie cinétique gagnée par 2}} + \underbrace{2Ri^2}_{\text{effet Joule}}.$$

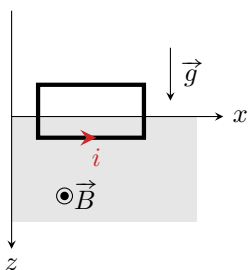
Ainsi, l'énergie cinétique perdue par le barreau 1 est entièrement récupérée par le barreau 2 ou dissipée par effet Joule.

La méthode est générale et à retenir : pour obtenir le bilan énergétique en présence d'induction, il faut multiplier les équations électrique et mécanique par la bonne grandeur pour obtenir une puissance. Le TRC implique des forces, une puissance s'obtient en multipliant par la vitesse ; la loi des mailles implique des tensions qu'il faut multiplier par l'intensité pour obtenir une puissance. Il reste ensuite à sommer les deux équations, ce qui a le bon goût d'éliminer le terme en champ magnétique, et interpréter le résultat.

Exercice 9 : Freinage par induction



▷ Équations électrique et mécanique.



1 Lorsqu'elle pénètre dans la zone de champ magnétique, la cabine est soumise à son poids qui est vertical selon \vec{e}_z . En outre, comme le flux magnétique au travers de la spire varie, un courant induit apparaît dans la spire, responsable d'une force de Laplace. Sans préjuger du signe réel du courant induit, orientons la spire de telle sorte que la normale orientée soit dans le même sens que \vec{B} , ce qui oriente nécessairement le courant dans le sens représenté ci-contre. Sur les deux parties verticales plongées dans la zone de champ, le courant est le même mais circule dans des sens différents, donc les forces de Laplace sont opposées. En revanche, seul un des deux côtés horizontaux voit le champ magnétique et subit une force de Laplace

$$\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = iaB\vec{e}_z.$$

Finalement, la vitesse initiale et toutes les forces subies par la cabine d'ascenseur sont dirigées selon \vec{e}_z . On en déduit que **le mouvement de la cabine reste une translation le long de cet axe.**

2 • **Équation mécanique** : D'après le théorème de la résultante appliquée à la cabine dans le référentiel terrestre galiléen, tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ, on a par projection sur l'axe z

$$m \frac{dv}{dt} = +mg + iaB.$$

• **Équation électrique** : Du point de vue électrique, il faut prendre en compte la résistance R de la spire et la force électromotrice induite. Calculons cette f.é.m. La surface de circuit plongée dans le champ magnétique est égale à $S(t) = az$ tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Ainsi, le flux magnétique vaut

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = +azB,$$

et d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -aBv.$$

La loi des mailles appliquée dans le circuit équivalent donne

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad -aBv = Ri.$$

• **Découplage des équations** : on dispose de deux équations, mais l'intensité du courant dans la spire est inconnue. D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{aB}{R}v,$$

ce qui donne en injectant dans l'équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(aB)^2}{R}v$$

ou encore

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{(aB)^2}.}$$

3 La forme générale des solutions est

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau,$$

avec

$$v(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{v_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A + g\tau} \quad \text{d'où} \quad A = v_0 - g\tau.$$

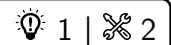
Finalement,

$$\boxed{v(t) = (v_0 - g\tau)e^{-t/\tau} + g\tau.}$$

L'équation et donc évidemment sa solution ne sont valables que lorsque la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Lorsque $z \geq b$, la boucle conductrice est intégralement dans la zone de champ magnétique si bien le flux au travers de la spire ne varie plus et le phénomène d'induction cesse. **La cabine retrouve alors un mouvement de chute libre**, et est de nouveau accélérée.

4 Si la cabine se trouvait complètement arrêtée, alors le flux magnétique ne varierait plus et le phénomène d'induction cesserait. La force de Laplace s'annulerait alors ... mais pas le poids de la cabine ! La cabine se retrouverait donc soumise à une seule force verticale vers le bas, et serait donc à nouveau accélérée puisqu'il n'y a rien pour la retenir. On en déduit qu'un freinage magnétique ne permet pas d'arrêter complètement la cabine d'ascenseur.

Exercice 10 : Plaque de cuisson à induction



- ▷ Couplage inductif;
- ▷ Impédance équivalente.

1 **Attention !** Dès lors qu'il y a auto-induction (et champ extérieur de façon générale), la loi de comportement habituelle de la bobine ne s'applique plus. La tension à ses bornes se détermine à partir de la loi de Faraday.

Un schéma de principe et un schéma électrique équivalent faisant apparaître des générateurs induits sont représentés figure 5. On peut raisonner indifféremment sur l'un ou sur l'autre, à condition de se méfier de la loi de comportement de la bobine si on choisit le schéma de gauche, et de ne pas oublier l'auto-induction si on choisit le schéma de droite.

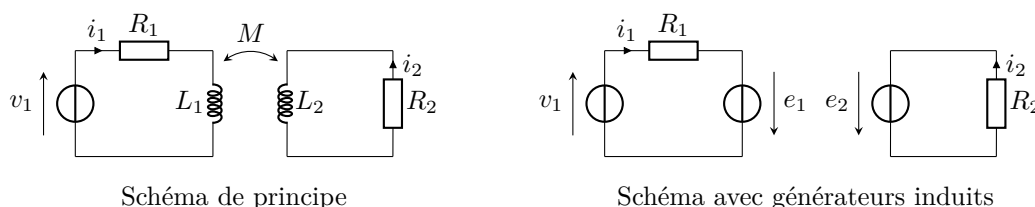


Figure 5 – Schéma équivalents à une plaque à induction. Il est possible de raisonner directement sur le schéma de principe ... mais attention à la loi de comportement de la bobine. Une autre représentation possible fait intervenir directement des générateurs induits ... mais attention à ne pas oublier l'auto-induction.

Les deux générateurs de f.é.m. e_1 et e_2 orientées dans le même sens que les courants traduisent l'effet de l'induction dans les circuits. Par définition, on a

$$\phi_{\rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{d'où} \quad e_1 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 1}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

et de même

$$\phi_{\rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 \quad \text{d'où} \quad e_2 = -\frac{d\phi_{\rightarrow 2}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Par application de la loi des mailles, on en déduit

$$v_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = R_2 i_2$$

soit

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2 Traduisons l'équation de fonctionnement de l'induit (circuit 2) en complexes,

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1,$$

ce qui conduit à

$$\underline{H} = -\frac{jM\omega}{R_2 + j\omega L_2}$$

3 D'après l'équation de fonctionnement de l'inducteur,

$$\underline{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + jM\omega \underline{H} \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_e = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + j\omega L_2}.$$

4 Dans l'hypothèse très haute fréquence, les expressions se simplifient en

$$\underline{H} = -\frac{M}{L_2} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_e = jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

Numériquement,

$$\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 8,3 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_e| = 2,1 \Omega.$$

On remarque que la qualité du couplage inductif apparaît dans l'expression de \underline{Z}_e : si le couplage est parfait, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, alors l'impédance d'entrée du système est nulle, signe d'une transmission parfaite de l'énergie électromagnétique. On retrouve exactement le même résultat à propos du transformateur.

Remarquons aussi que la différence de nombre de spires dans l'inducteur et l'induit permet au courant à l'induit d'être nettement supérieur au courant à l'inducteur, et donc de fournir davantage d'effet Joule dans le fond de la casserole.

5 Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue) et donc **l'impédance d'entrée augmente**. Plus précisément, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue combien même le courant dans l'inducteur serait imposé, ce qui indique que M diminue. Si l'impédance d'entrée augmente alors que la tension d'alimentation v_1 ne change pas, alors la définition de \underline{Z}_e montre que **l'inducteur appelle moins de courant**.

Ondes électromagnétiques

Exercice 11 : Structure d'une OPPH

oral banque PT | 💡 1 | ✂ 1



- ▷ OPPH;
- ▷ Équations de Maxwell en écriture complexe;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 De façon la plus générale possible, le champ électrique d'une OPPM s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}.$$

On peut prendre la convention inverse pour l'exponentielle complexe :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}.$$

2 Avec cette convention, on a les correspondances

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \times i\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \longleftrightarrow i\vec{k}.$$

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent donc

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} \end{cases}$$

Choisir l'autre convention change tous les signes.

3 Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson indiquent que \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux au vecteur d'onde, donc à la direction de propagation, ce qui est bien la définition de deux champs transverses.

4 Dans ce cas particulier, $\vec{k} = k \vec{e}_x$ et $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$, le champ électrique de l'onde s'écrit donc

$$2\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

On en déduit directement

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9,9 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega = kc = 3,0 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Avec la relation de structure, on en déduit le champ magnétique,

$$\vec{B} = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z.$$

Enfin, le vecteur de Poynting moyen s'écrit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x.$$

On obtient la puissance du faisceau en calculant le flux du vecteur de Poynting moyen au travers du disque de normale \vec{e}_x et de diamètre $d = 2 \text{ mm}$,

$$\mathcal{P} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times \frac{\pi d^2}{4}$$

ce qui donne

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\mu_0 c \mathcal{P}}{\pi d^2}} = 490 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Exercice 12 : Voile solaire

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait ;
- ▷ Force de Lorentz.

1 Supposons que l'OPPM incidente se propage dans le sens des z croissants et qu'elle est polarisée selon (Ox) . Elle s'écrit alors

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x.$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une OPPM se propageant en sens inverse et de polarisation a priori quelconque,

$$\vec{E}_r = \underline{E}_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x + E'_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y.$$

Supposons la voile située en $z > 0$ et le vide en $z < 0$. La relation de passage en $z = 0$ donne

$$\vec{0} - \left[\vec{E}_i(z=0^-, t) + \vec{E}_r(z=0^-, t) \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

En projection sur \vec{e}_y on obtient de façon immédiate

$$\underline{E}'_r = 0$$

et en projection sur \vec{e}_x on trouve

$$E_0 + \underline{E}_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{E}_r = -E_0.$$

Ainsi, l'onde réfléchie s'écrit

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

2 D'après la relation de structure, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = (-\vec{e}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Le champ magnétique total en $z = 0^-$ vaut donc

$$\vec{B}(z=0^-, t) = \vec{B}_i(z=0^-, t) + \vec{B}_r(z=0^-, t) = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y.$$

La relation de passage en $z = 0$ donne alors

$$\underline{\vec{j}}_s = \vec{e}_z \wedge \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \underline{\vec{j}}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x.$$

3 La densité volumique de force de Lorentz en présence d'une densité volumique de courant \vec{j} s'écrit

$$\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Par analogie, la densité surfacique de force de Lorentz peut ici s'écrire

$$\underline{\vec{f}}_{\text{surf}} = \underline{\vec{j}}_s(t) \wedge \vec{B}(z=0, t).$$

Sa valeur moyenne vaut

$$\langle \underline{\vec{f}}_{\text{surf}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) \right)$$

Rappelons que \vec{B}^* est le conjugué de \vec{B} .

Attention, l'expression de la force étant non linéaire il n'est pas possible de calculer sa valeur instantanée à partir des grandeurs complexes mais seulement sa valeur moyenne ... sans oublier ni la partie réelle ni le facteur 1/2. Pour obtenir la valeur instantanée, il n'y a pas d'autre possibilité que de revenir aux grandeurs réelles.

À partir des expressions précédentes,

$$\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \times \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_z.$$


Comme $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$, on en déduit finalement

$$\langle \vec{j}_{\text{surf}} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z.$$


Elle est dirigée selon $+\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens de propagation du rayonnement solaire, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 13 : Approche énergétique de l'effet de peau

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2

-  ▷ Effet de peau ;
▷ Vecteur de Poynting ;
▷ Bilan de puissance.

1 Il s'agit **bien d'une onde plane**, car \vec{E} prend la même valeur en tout point des plans $z = \text{cte}$, mais elle n'est **pas progressive** à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d'onde** et l'**inverse de la longueur d'amortissement** (longueur de peau) de l'onde. L'onde est **polarisée rectilignement** selon \vec{u}_x .

2  **Attention !** Pour pouvoir identifier $\vec{\text{rot}} \leftrightarrow -j\vec{k} \wedge$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp [j(\omega t - (1-j)\alpha z)] \vec{u}_x,$$

d'où on identifie $\vec{k} = (1-j)\alpha \vec{u}_z$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{soit} \quad (1-j)\alpha \vec{u}_z \wedge E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x = \omega \vec{B}$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{(1-j)\alpha E_0}{\omega} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_y.$$

3 Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Sa moyenne temporelle vaut


$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right).$$

Or

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{(1+j)\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

d'où

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_z.$$

 **Attention !** Les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champs réels.

(et bien sûr on peut aussi passer par les champs réels pour trouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$)

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z}.$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + dz$:

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z + dz) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha(z+dz)}.$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega} S \left(e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \right).$$

En utilisant un développement limité

$$e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \simeq 2\alpha e^{-2\alpha z} dz,$$

on obtient

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega} S \times 2\alpha e^{-2\alpha z} dz$$

et finalement

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega} S e^{-2\alpha z} dz.}$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{J,\text{vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S dz$,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) S dz$$

soit

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz.}$$

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega} S e^{-2\alpha z} dz = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz,$$



soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0\omega} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}.$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}.}$$

Exercice 14 : Guide d'ondes rectangulaire

exemple officiel banque PT |  2 |  3



- ▷ Relation de dispersion ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 L'onde proposée est **harmonique**, **progressive** dans le sens des z croissants ... mais elle n'est **pas plane**, car le champ électrique n'est pas uniforme dans un plan $z = \text{cte}$.

2 L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.}$$

3 Les dérivées du champ proposé s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} &= \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} &= -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= +k E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= -k^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\omega E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans l'équation de d'Alembert, il vient

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) = 0$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0.}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

La propagation n'est possible que si k est réel, donc $k^2 > 0$. On en déduit que le guide ne conduit l'onde que si la pulsation est telle que

$$\boxed{\omega > \frac{n\pi c}{a}.}$$

Il réalise donc un **filtrage passe-haut**.

4 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

avec pour l'onde étudiée

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = +kE_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y - \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

d'où on déduit par intégration

$$\boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y + \frac{n\pi}{\omega a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z,}$$

en choisissant nulle la constante d'intégration qui ne décrit pas un phénomène ondulatoire.

Rappelons que la relation de structure ne s'applique qu'aux ondes planes progressives ... mais ici l'onde n'est pas plane, il faut donc revenir à l'équation de Maxwell-Faraday pour calculer le champ magnétique.

Même chose pour la relation de dispersion : il faut renoncer à la tentation de remplacer k/ω par c comme on le ferait pour une OPPH!

On constate que \vec{B} n'est pas orthogonal à la direction de propagation : bien que l'onde se propage dans le vide, la présence du guide métallique modifie sa structure en profondeur. L'onde est ici qualifiée de « Transverse Électrique » (TE), par opposition aux ondes « Transverses Électro-Magnétique » (TEM) qui se propagent dans le vide illimité.

Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Ici, il a donc deux composantes sur \vec{e}_z et \vec{e}_y , avec

$$\Pi_z = \frac{1}{\mu_0} \times E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \times \frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$

$$\boxed{\Pi_z = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz).}$$

La puissance moyenne transportée au travers d'une section du guide de normale \vec{e}_z vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{section}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint_{\text{section}} \langle \Pi_z \rangle dS$$

avec ici

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{a} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \times \int_0^b dx \times \int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{a} \right) dy \\ &= \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \times b \times \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{k}{4\mu_0\omega} E_0^2 S.}$$

5 L'énoncé ne le dit pas clairement, mais on peut supposer que l'onde est émise dans le vide avant d'entrer dans le guide d'onde. Sa pulsation vaut donc

$$\omega = k_0 c = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

D'après la question 3, l'onde se propage si

$$\omega > \frac{n\pi c}{a} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi c}{\lambda} > \frac{1 \times \pi c}{3\lambda/4} = \frac{4}{3} \frac{\pi c}{\lambda}$$

ce qui est évidemment vrai. On en déduit que le mode $n = 1$ se propage dans le guide. On a alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{1 \times \pi}{a} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi}{3\lambda} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi \times \omega}{3 \times 2\pi c} \right)^2 = \left(1 - \frac{2^2}{3^2} \right) \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{9} \frac{\omega^2}{c^2}$$

On en déduit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{3c}{\sqrt{5}},$$

ce qui permet de déterminer (enfin!) l'amplitude E_0

$$E_0 = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{S} \times \mathcal{P}} = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\lambda^2} \times \mathcal{P}} = \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}} \mu_0 c \mathcal{P}}$$

Avec la relation de dispersion dans le vide, on trouve $\lambda = c/f = 3 \text{ cm}$, et ainsi

$$\boxed{E_0 = 2,3 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.}$$

Analogies entre phénomènes ondulatoires

Exercice 15 : Résonance acoustique d'un puits

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Problème ouvert ... mais facile ;
- ▷ Analogies entre phénomènes ondulatoires ;
- ▷ Modes propres.

On peut raisonner par analogie entre le puits et une corde de Melde ou une cavité électromagnétique. Il y a résonance lorsque l'onde sonore émise coïncide avec un mode propre du puits. Dans ce cas, le puits contient un nombre entier de fuseaux d'onde stationnaire, de longueur $\lambda/2$, ce qui s'écrit

$$h = n \frac{\lambda}{2} = \frac{nc}{2f}.$$

Les fréquences de résonance du puits sont donc de la forme

$$f_n = n \frac{c}{2h}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Deux fréquences successives sont donc séparées de

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2h}$$

d'où on déduit

$$\boxed{h = \frac{c}{2\Delta f} = 7,1 \text{ m}.}$$

En réalité, contrairement à la corde de Melde et à la cavité électromagnétique, les conditions aux limites dans le puits ne sont pas symétriques. Le fond du puits est un ventre de pression acoustique alors que sa surface à l'air libre est un ventre. On montre alors (essayez !) que le puits doit contenir un demi fuseau supplémentaire, ce qui donne pour les longueurs d'ondes résonantes

$$h = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}.$$

Cette difficulté supplémentaire ne change en rien le résultat final ... mais permet une discussion intéressante avec le jury à l'oral.

Exercice 16 : Guitare électrique

💡 3 | ✂ 2



- ▷ Analogies entre phénomènes ondulatoires ;
- ▷ Analyse dimensionnelle ;
- ▷ Modes propres.

1 Raisonnons par analyse dimensionnelle, en cherchant la célérité sous la forme

$$c = \mu^\alpha F^\beta.$$

L'équation aux dimensions s'écrit

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})^\alpha \times (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\beta.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta & (\text{m}) \\ -1 = -2\beta & (\text{s}) \\ 0 = \alpha + \beta & (\text{kg}) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

d'où on conclut

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas d'identifier la présence d'un éventuel facteur numérique dans l'expression ($\pi, 2$, etc.). Il se trouve qu'ici il n'y en a pas, et que l'expression obtenue pour c est directement la bonne.

2 Les ondes pouvant exister sur la corde de guitare doivent vérifier l'équation de propagation et les conditions aux limites. En insérant la forme de solution cherchée dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$g''(x) e^{i\omega t} - \frac{(i\omega)^2}{c^2} g(x) e^{i\omega t} = 0 \quad \text{soit} \quad g''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} g(x) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $k = \omega/c$, dont les solutions sont donc de la forme

$$g(x) = A \sin(kx + \varphi) \quad \text{avec} \quad A = \text{cte}.$$

La corde étant attachée en $x = 0$, on a à tout instant $y(x=0, t) = 0$, donc

$$g(x=0) = 0 = A \sin \varphi.$$

\uparrow CL \uparrow expr

L'amplitude A ne pouvant être nulle, on en déduit que l'on peut choisir $\varphi = 0$. La corde étant également attachée en $x = L$, de même,

$$g(x=L) = 0 = A \sin(kL).$$

\uparrow CL \uparrow expr

On en déduit que les valeurs de k sont quantifiées, et vérifient

$$k_n L = n\pi \quad \text{soit} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement, les fonctions solutions sont de la forme

$$g(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Bien noter la différence dans l'exploitation des deux conditions aux limites : φ est une phase, que l'on peut choisir (en partie) librement, alors que k et L sont des grandeurs dont le sens physique est imposé ... et sur lesquelles on n'a aucun choix.

- 3 La fréquence de vibration de la corde est celle du fondamental, correspondant à $n = 1$. On a donc

$$k_1 = \frac{2\pi f_1}{c} = \frac{\pi}{L} \quad \text{soit} \quad \frac{4f_1^2}{F/\mu} = \frac{1}{L^2} \quad \text{d'où} \quad F = 4\mu f_1^2 L^2.$$

La corde étant cylindrique de longueur L et diamètre d , on en déduit sa masse et sa masse linéique

$$m = \frac{\pi d^2}{4} L \rho \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{\pi \rho d^2}{4}$$

et ainsi

$$F = \pi \rho d^2 f_1^2 L^2 = 93 \text{ N}.$$

- 4 En inversant les formules précédentes, la fréquence de vibration de la corde est reliée à la force de tension par

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Si la fréquence est trop basse, il faut donc **augmenter la tension** de la corde.

- 5 La tension de la corde étant la même,

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{L'}{L} \quad \text{soit} \quad L' = \frac{f_1}{f_1'} L \simeq \frac{3}{4} L.$$

Partant du haut du manche, le guitariste doit placer son doigt à un quart de la longueur totale de la corde.