



# Thermodynamique

## Bilans d'entropie

### Exercice 1 : Surfusion

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Tables thermodynamiques ;
- ▷ Changement d'état ;
- ▷ Bilan d'entropie.

Le retour du candidat n'est pas clair sur la façon dont les données étaient présentées, et je ne sais pas s'il s'agissait vraiment de tables comme celles que j'ai mises. De même, je ne sais pas si les capacités thermiques étaient à calculer à partir des tables ou si elles étaient données en fonction de la température (ce qui serait bizarre sur d'aussi faibles valeurs ...).

1 Par définition,

$$\Delta_{\text{fus}} h = h_L(0^\circ\text{C}) - h_S(0^\circ\text{C}) = 334,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La capacité thermique d'une phase condensée est définie par

$$c = \frac{dh}{dT} \simeq \frac{h(T + \Delta T) - h(T)}{\Delta T}.$$

On en déduit

$$c_S = \frac{h_S(0^\circ\text{C}) - h_S(-1^\circ\text{C})}{1} = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad c_L = \frac{h_L(1^\circ\text{C}) - h_S(0^\circ\text{C})}{1} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

2 L'eau peut être ou bien totalement solidifiée, ou bien diphasée. Comme la transformation est instantanée, elle est adiabatique et il est donc impossible que l'eau soit toujours entièrement liquide à l'état final.

3 Le changement d'état ne peut avoir lieu qu'à  $0^\circ\text{C}$ , donc au cours de la transformation toute l'eau voit sa température monter de  $T_0 = -6^\circ\text{C}$  jusqu'à  $0^\circ\text{C}$ , avant qu'une fraction  $x$  puisse éventuellement solidifier.

Bilan d'enthalpie :

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P transf}}}{=} 0 = m(h_S(0^\circ\text{C}) - h_S(-6^\circ\text{C})) + xm \Delta_{\text{fus}} h.$$

On en déduit

$$x = \frac{h_S(0^\circ\text{C}) - h_S(-6^\circ\text{C})}{\Delta_{\text{fus}} h} = 0,04.$$

4 On commence par exprimer l'entropie massique d'une phase condensée,

$$s = c \ln \frac{T}{T_0}$$

puis on procède au bilan entropique,

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_{\text{fus}}}{T_I} + xm \frac{\Delta_{\text{fus}} h}{T_{\text{fus}}}.$$

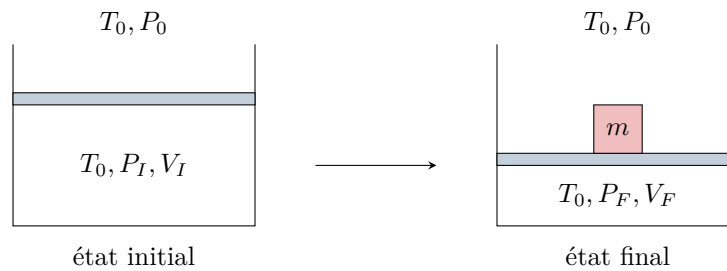
Entropie échangée : la transformation est adiabatique, donc  $Q = 0$  et  $S_{\text{éch}} = 0$ . Toute l'entropie est donc de l'entropie créée.

**Exercice 2 : Masse posée sur un piston**

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 3



- ▷ Bilan d'entropie ;
- ▷ Approche de la réversibilité.

**Figure 1 – Schéma de principe de la transformation.**

1 L'enceinte est diatherme, donc

$$T_F = T_I = T_0.$$

La condition d'équilibre mécanique du piston (surface  $S$ , masse négligée) dans l'état initial et final donne

$$P_I S = P_0 S \quad \text{et} \quad P_F S = P_0 S + mg$$

d'où on déduit

$$P_F = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Enfin, l'équation d'état donne

$$V_F = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}}.$$

2 • **Calcul du transfert thermique** : On raisonne sur un système constitué du gaz contenu dans l'enceinte et du piston, en procédant à un bilan d'énergie interne.

▷ *Travail échangé* : Le système est soumis à la pression extérieure  $P_0$  et à la force exercée par la masse  $m$ , qui peut s'interpréter comme un surplus de pression  $mg/S$ . Ainsi, le système est soumis à une pression apparente

$$P_{\text{app}} = P_0 + \frac{mg}{S}$$

qui demeure constante. Le travail reçu par le système vaut donc

$$W = - \int_{I \rightarrow F} P_{\text{app}} dV = - \left( P_0 + \frac{mg}{S} \right) (V_F - V_I).$$

▷ *Bilan d'énergie interne* :

$$\Delta U = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{W} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{Q} = C \Delta T = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} Q &= \left( P_0 + \frac{mg}{S} \right) (V_F - V_I) \\ &= \left( P_0 + \frac{mg}{S} \right) nRT_0 \left( \frac{1}{P_0 + \frac{mg}{S}} - \frac{1}{P_0} \right) \\ &= \left( P_0 + \frac{mg}{S} \right) nRT_0 \left( \frac{-mg/S}{\left( P_0 + \frac{mg}{S} \right) P_0} \right) \end{aligned}$$

$$Q = - \frac{nRT_0}{P_0} \frac{mg}{S}.$$

Attention, comme le système n'est pas à l'équilibre mécanique dans l'état initial, il est impossible de procéder à un bilan d'enthalpie, et indispensable de passer par un bilan d'énergie interne.

- **Calcul de l'entropie créée** : par additivité,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{piston}}.$$

Comme  $T_F = T_I$  alors  $\Delta S_{\text{piston}} = 0$  (le piston est un solide, donc son entropie ne dépend que de la température), donc

$$\Delta S = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \underbrace{\ln \frac{T_F}{T_I}}_{=0} - n R \ln \frac{P_F}{P_I} = -n R \ln \left( 1 + \frac{mg}{P_0 S} \right).$$

Le bilan d'entropie s'écrit

$$\Delta S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{\frac{Q}{T_0}} + S_{\text{créée}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{-n R \ln \left( 1 + \frac{mg}{P_0 S} \right)}$$

On en déduit l'entropie créée,

$$S_{\text{créée}} = n R \left( \frac{mg}{P_0 S} - \ln \left( 1 + \frac{mg}{P_0 S} \right) \right).$$

**3** Dans le cas où la transformation est réalisée en  $N \gg 1$  étapes, une masse  $m/N$  est ajoutée à chaque étape. Au cours d'une étape, on a donc création de

$$S_{\text{créée,1}} = n R \left( \frac{mg/N}{P_0 S} - \ln \left( 1 + \frac{mg/N}{P_0 S} \right) \right).$$

Si  $N$  est suffisamment grand, un développement limité est possible,

$$S_{\text{créée,1}} = n R \left( \frac{mg/N}{P_0 S} - \frac{mg/N}{P_0 S} + \frac{1}{2} \left( \frac{mg/N}{P_0 S} \right)^2 \right) = \frac{n R}{2} \left( \frac{mg}{N P_0 S} \right)^2.$$

Sur l'ensemble de la transformation,

$$S_{\text{créée}} = N S_{\text{créée,1}} = \frac{n R}{2 N} \left( \frac{mg}{P_0 S} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, lorsqu'elle est réalisée suffisamment lentement, **la transformation tend vers une transformation réversible**.

Attention! Comme le terme d'ordre le plus bas du développement limité s'annule, il est nécessaire de poursuivre à l'ordre suivant pour obtenir un résultat correct.

On peut également reprendre la méthode de la question précédente, mais la transformation n'est plus monobare, ce qui change donc le calcul du transfert thermique.

## Thermodynamique différentielle

### Exercice 3 : Congélation d'une bouteille d'eau

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Transitoire thermique;
- ▷ Changement d'état;
- ▷ Efficacité d'un congélateur.

**1** Utilisation de l'efficacité de Carnot :  $\mathcal{P}_{\text{th}} = 0,7 \frac{T_f}{T_c - T_f} \mathcal{P}$ . Source chaude = pièce, source froide = l'intérieur du congélateur.

**2** Bilan d'enthalpie lorsque l'eau est totalement liquide :

$$dH = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{m c_l} dT = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{-\mathcal{P}_{\text{th}}} dt$$

On en déduit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{m c_1} \quad \text{d'où} \quad T(t) = T_c - \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{m c_1} t.$$

Ainsi, l'évolution commence par une phase de décroissance linéaire quand l'eau est liquide, suivie d'une phase constante à  $0^\circ\text{C}$  lors de la solidification, puis une seconde phase de décroissance linéaire quand toute l'eau a solidifié mais avec une pente plus importante car  $c_s < c_l$ . Même si ce n'est pas prédit par le modèle simpliste étudié ici, la température cesse de décroître lorsque  $T = T_f = -18^\circ\text{C}$ .

**3** Durée de la première phase :

$$t_1 = \frac{m c_l (T_c - T_{\text{fus}})}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$$

Durée de la deuxième phase : bilan d'enthalpie pendant  $t_2$  durée de la solidification donne

$$\Delta H = -m \ell_{\text{fus}} = -\mathcal{P}_{\text{th}} t_2 \quad \text{d'où} \quad t_2 = \frac{m \ell_{\text{fus}}}{\mathcal{P}_{\text{th}}}.$$

Durée de la troisième phase :

$$t_3 = \frac{m c_s (T_{\text{fus}} - T_f)}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$$

### Exercice 4 : Moteur avec pseudo-source

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Transformations infinitésimale ;
- ▷ Moteur ditherme.

**1** Le rendement d'un moteur est défini par

$$\eta = -\frac{W}{Q_c}$$

Les deux principes de la thermodynamique appliqués à une portion de fluide caloporteur pendant un cycle complet donnent

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \underbrace{S_{\text{cr}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{rév cycle}}} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{-Q_c - W}{T_f} = 0 \quad \text{soit} \quad \left( \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_f} \right) Q_c - \frac{W}{T_f} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{T_f}{T_c} - 1 \right) Q_c - W = 0$$

d'où on déduit finalement

$$\eta_{\text{rév}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

**2** Un bilan d'énergie appliqué au réservoir d'eau chaude pendant le cycle infinitésimal s'écrit

$$dU_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\delta Q_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} m c dT_c \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta Q_c = -m c dT_c}.$$

Le transfert thermique  $\delta Q_c$  est reçu par le moteur, donc cédé par la source chaude, d'où le signe  $\ominus$ . La cohérence des signes est un bon test de vraisemblance : le moteur reçoit de l'énergie, donc  $\delta Q_c > 0$ , car la température du réservoir baisse, soit  $dT_c < 0$ .

Le travail  $\delta W$  fourni par le moteur lors du cycle infinitésimal se déduit du rendement ... en changeant le signe car  $\delta W$  est fourni :

$$\delta W = +\eta_{\text{rév}} \delta Q_c \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta W = -\left( 1 - \frac{T_f}{T_c} \right) m c dT_c}.$$

**3** Le moteur s'arrête de fonctionner lorsque les deux sources sont à la même température, auquel cas le rendement s'annule et le moteur ne peut plus fournir de travail. Le travail total fourni s'obtient par sommation,

$$\begin{aligned}
 W_{\text{tot}} &= \int_{T_c=T_0}^{T_c=T_f} \delta W \\
 &= -mc \int_{T_0}^{T_f} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) dT_c \\
 &= -mc(T_f - T_0) - mc T_f \ln \frac{T_f}{T_0} \\
 W_{\text{tot}} &= mc \left( T_0 - T_f + T_f \ln \frac{T_0}{T_f} \right) = 6,3 \cdot 10^5 \text{ J.}
 \end{aligned}$$

**4** Le théorème de l'énergie mécanique appliquée à la masse soulevée s'écrit

$$\Delta E_m = W_{\text{tot}} \quad \text{soit} \quad m'g \Delta z = W_{\text{tot}}$$

en négligeant les variations d'énergie cinétique. On a donc

$$\Delta z = \frac{mc}{m'g} \left( T_0 - T_f + T_f \ln \frac{T_0}{T_f} \right) = 6,4 \text{ km.}$$

C'est une valeur énorme, qui montre bien que les variations d'énergie interne sont très importantes comparativement aux variations d'énergie mécanique ... ce qui justifie d'ailleurs de les négliger la plupart du temps dans l'application du premier principe y compris aux systèmes en mouvement.

### Exercice 5 : Expérience de Rüchard

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Thermodynamique différentielle ;
- ▷ Lien entre thermodynamique et mécanique.

**1** La bille est soumise sur le dessus à la pression atmosphérique et sur le dessous à la pression intérieure au flacon. Lorsqu'elle s'enfonce, elle comprime l'air intérieur du flacon, ce qui crée une surpression qui tend à faire remonter la bille et réciproquement lorsqu'elle est trop haute elle subit une dépression qui la fait redescendre. La présence d'oscillations montre que les frottements sont faibles.

Initialement, la pression dans le flacon est égale à la pression atmosphérique (1 bar) et la tension est de 150 mV : le coefficient d'étalonnage est donc

$$k = 150 \text{ mV} \cdot \text{bar}^{-1}.$$

**2** Dans l'état final la bille est à l'équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression, donc en projetant la condition d'équilibre sur l'axe vertical

$$0 = mg + P_{\text{atm}}S - P_{\text{éq}}S \quad \text{d'où} \quad P_{\text{éq}} = P_{\text{atm}} + \frac{mg}{S} = 1,01 \text{ bar},$$

ce qui correspond à une tension de 151,5 mV, conforme à la courbe donnée.

**3** Le temps caractéristique de diffusion au travers des parois du flacon d'épaisseur  $e$  est de

$$\tau = \frac{e^2}{D} = 450 \text{ s.}$$

Ce temps est très supérieur à la durée totale de l'expérience, qui peut donc être considérée comme adiabatique. Les frottements étant faibles, et en supposant les inhomogénéités faibles également, la transformation est donc isentropique.

**4** D'après la loi de Laplace,

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln P + \gamma \ln V = \text{cte},$$

et en différentiant

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Les variations de volume et de pression étant très faibles devant les valeurs d'équilibre, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$\frac{P - P_{\text{éq}}}{P_{\text{éq}}} + \gamma \frac{V - V_0}{V_0} = 0.$$

En posant  $V = V_0 - Sz$  (axe  $z$  orienté vers le bas) on obtient

$$\frac{P - P_{\text{éq}}}{P_{\text{éq}}} - \gamma \frac{Sz}{V_0} = 0$$

ce qui devient

$$P - P_{\text{éq}} = \gamma \frac{SP_{\text{éq}}}{V_0} z.$$

5 En reprenant les mêmes forces que précédemment,

$$m\ddot{z} = mg + P_{\text{atm}}S - \left( P_{\text{éq}} + \gamma \frac{SP_{\text{éq}}}{V_0} z \right) S$$

$$m\ddot{z} = -\gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}}{V_0} z$$

$$\ddot{z} + \gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}}{mV_0} z = 0.$$

La pression étant proportionnelle à l'altitude  $z$ , l'équation en pression s'écrit simplement

$$\ddot{P} + \gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}}{mV_0} P = \gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}^2}{mV_0}.$$

6 On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre telle que

$$\omega_0^2 = \gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}}{mV_0}.$$

L'indice isentropique  $\gamma$  est donc relié à la période des oscillations par

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{mV_0}{S^2 P_{\text{éq}}} = 1,36,$$

proche de la valeur de 1,4 attendue pour un gaz parfait diatomique comme l'air.

## Conduction thermique

### Exercice 6 : Four industriel

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Transitoire thermique;
- ▷ Temps caractéristique de diffusion.

1 Procédons à un bilan enthalpique pour la pièce entre  $t$  et  $t + dt$ . La surface de la pièce vaut  $6a^2$ , donc elle reçoit le flux thermique

$$P = P_s \times 6a^2 = 6a^2 h (T_a - T).$$

Ainsi,

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \rho a^3 c_p \frac{dT}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} 6a^2 h (T_a - T)$$

d'où on déduit

$$\rho a c_p \frac{dT}{dt} + 6hT = 6hT_a \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{6h}{\rho a c_p} T = \frac{6h}{\rho a c_p} T_a.}$$

En posant  $\tau = \rho a c_p / 6h$  et  $T_0$  la température initiale de la pièce, cette équation différentielle se résout en

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau} .}$$

**2** Par définition,  $T(t=\tau_c) = T_c$ , c'est-à-dire

$$T_c = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\tau_c/\tau} \quad \text{soit} \quad e^{-\tau_c/\tau} = \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

d'où on déduit

$$\tau_c = -\tau \ln \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

et en inversant le ln et en remplaçant  $\tau$  par son expression, il vient enfin

$$\boxed{\tau_c = \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} .}$$

Ce temps  $\tau_c$  correspond à la durée que la pièce doit passer dans le four. Sachant que le tapis roulant a une longueur  $L$ , on doit avoir  $\tau_c = L/V_0$  d'où

$$\boxed{V_0 = \frac{6hL}{\rho a c_p \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}} .}$$

**3** Cf. cours pour la démonstration, on aboutit à

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} .}$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion, on trouve  $[D] = L^2 T^{-1}$ . Cherchons par analyse dimensionnelle le temps  $\tau_d$  caractéristique de la diffusion sur une longueur  $a$ , en le prenant sous la forme

$$\tau_d = D^\alpha a^\beta$$

avec les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  constants. L'équation aux dimensions s'écrit

$$T = L^{2\alpha} T^{-\alpha} \times L^\beta$$

d'où on déduit par identification

$$\begin{cases} 1 = -\alpha \\ 0 = 2\alpha + \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

si bien que

$$\boxed{\tau_d = \frac{a^2}{D} .}$$

**4** Pour que la température de la pièce soit uniforme en sortie du four, il faut avoir

$$\tau_d \ll \tau_c \quad \text{donc} \quad \frac{a^2 \rho c_p}{\lambda} \ll \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} \quad \text{soit} \quad \boxed{a \ll \frac{\lambda}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} .}$$

**Exercice 7 : Température d'une maison**

inspiré oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ Association de résistances thermiques ;
- ▷ Transitoire thermique.

**1** • **Définition** : Considérons un système (p.ex. un mur) séparant deux milieux de températures respectives  $T_1$  et  $T_2$  traversé par un flux thermique  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ . Sa résistance thermique est définie en convention récepteur par

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}.$$

La définition est analogue à celle d'une résistance électrique, la température jouant le rôle du potentiel électrique et le flux thermique celui de l'intensité.

• **Cas d'une paroi plane** : Raisonnons sur un mur d'épaisseur  $e$  et section  $S$  faite dans un matériau de conductivité  $\lambda$ . D'après la loi de Fourier, projetée à une dimension perpendiculaire au mur,

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x.$$

Par définition, le flux thermique vaut

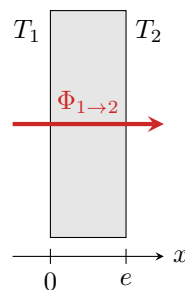
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\lambda \frac{dT}{dx} S.$$

Par séparation des variables,

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} \int_0^e dx = -\lambda S \int_{T_1}^{T_2} dT \quad \text{soit} \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} e = -\lambda S (T_2 - T_1)$$

d'où on déduit

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}.$$



**Figure 2 – Calcul de la résistance thermique d'une paroi plane.**

• **Conductance thermique surfacique** : la conductance étant l'inverse de la résistance,

$$G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{e} \quad \text{d'où} \quad g_{\text{th}} = \frac{G_{\text{th}}}{S} = \frac{\lambda}{e}.$$

Donner les conductances thermiques surfaciques permet d'inclure dans l'étude de façon simple l'isolation des murs, qui ne sont pas faits d'un unique matériau, sans passer par des calculs de résistances thermiques équivalentes.

**2** La maison perd de l'énergie au travers des murs et de la toiture, soumises au même écart de température  $T - T_e$ , et en reçoit de la part du chauffage, qui fonctionne en continu. Un bilan d'enthalpie instantané appliqué à la maison donne

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_0 - \underbrace{gS(T - T_e)}_{\text{murs}} - \underbrace{g'S(T - T_e)}_{\text{toiture}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C \frac{dT}{dt}$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} + \frac{(g + g')S}{C} T = \frac{(g + g')S}{C} T_e + \frac{\mathcal{P}_0}{C}.$$



L'énoncé n'est pas très clair sur ce qu'est la surface  $S$  : celle d'un seul mur, ou des quatre réunis ? À moins d'avoir une maison gigantesque ou très haute, le plus probable est qu'il s'agisse de la surface totale des quatre murs ... mais dans un contexte d'oral, peu importe l'interprétation que vous en avez tant que vous restez cohérent.

Posons

$$\tau = \frac{C}{(g + g')S} \quad \text{et} \quad T_\infty = T_e + \frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S},$$

on a alors

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_\infty.$$

À l'instant initial,

$$T(t=0) = \underset{\uparrow \text{CI}}{T_e} = \underset{\uparrow \text{expr}}{A + T_\infty} = A + T_\infty = A + T_e + \frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S} \quad \text{soit} \quad A = -\frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S},$$

et ainsi

$$T(t) = T_\infty - \frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S} e^{-t/\tau}.$$

La température de confort  $T_c$  sera atteinte à l'instant  $t_c$  tel que

$$T_\infty - \frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S} e^{-t_c/\tau} = T_c \quad \text{soit} \quad e^{-t_c/\tau} = \frac{(g + g')S}{\mathcal{P}_0} (T_\infty - T_c)$$

et ainsi

$$t_c = \tau \ln \frac{\mathcal{P}_0}{(g + g')S(T_\infty - T_c)} = 1,45 \cdot 10^4 \text{ s} \simeq 4 \text{ heures.}$$

**3** La neige ajoute une résistance thermique en série avec celle de la toiture. Le schéma équivalent est représenté figure 3. La résistance équivalente totale est telle que

$$G_{\text{éq}} = \frac{1}{R_{\text{éq}}} = gS + \frac{1}{\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{g'S}} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{th}} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

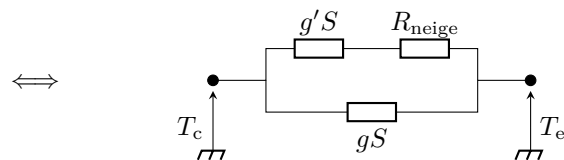



Figure 3 – Schéma équivalent à la maison recouverte de neige.

Notons  $\langle \mathcal{P} \rangle$  la puissance moyenne délivrée par le chauffage. Le bilan enthalpique en régime permanent s'écrit

$$\frac{dH}{dt} \underset{\uparrow \text{1er P}}{=} \langle \mathcal{P} \rangle - \underset{\uparrow \text{RP}}{G_{\text{éq}}(T_c - T_e)} = 0 \quad \text{d'où} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = G_{\text{éq}}(T_c - T_e) = 1,1 \text{ kW}.$$

Comme  $\langle \mathcal{P} \rangle / \mathcal{P}_0 = 0,55$ , on en déduit que **le chauffage doit fonctionner pendant 55 % du temps ...** ça laisse un peu de marge au Père Noël pour choisir son moment et descendre dans la cheminée !

**Exercice 8 : Ballon d'eau chaude**oral banque PT |  2 |  3 | 

-  ▷ Bilan mésoscopique ;  
 ▷ Résistance thermique ;  
 ▷ Coordonnées cylindriques.

Compte tenu des symétries du problème, le vecteur densité de flux thermique dans la paroi cylindrique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r, t) \vec{e}_r.$$

**1** Raisonnons sur une couche cylindrique comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ , et effectuons un bilan thermique entre  $t$  et  $t + dt$ .

▷ par la face située en  $r$ , elle reçoit le transfert thermique

$$\delta Q_e = \phi(r) dt ;$$

▷ par la face située en  $r + dr$ , elle cède le transfert thermique

$$\delta Q_s = \phi(r + dr) dt.$$

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1erP}}}{=} \delta Q_e - \delta Q_s \quad \text{d'où} \quad \phi(r) - \phi(r + dr) = 0$$

ou encore

$$\frac{d\phi}{dr} = 0$$

ce qui indique bien que le flux sortant d'un cylindre de rayon  $r$  est indépendant du rayon du cylindre.

**2** Le flux  $\phi$  est relié au vecteur densité de courant thermique par

$$\phi = \iint j_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_r(r) \times 2\pi r h \quad \text{soit} \quad \phi = -2\pi \lambda r h \frac{dT}{dr}.$$

Séparons les variables, et intégrons de  $r = \ell$  jusqu'à un rayon  $r$  quelconque :

$$\int_{T_{\text{int}}}^{T(r)} dT = -\frac{\phi}{2\pi \lambda h} \int_{\ell}^r \frac{dr}{r} \quad \text{d'où} \quad T(r) = T_{\text{int}} - \frac{\phi}{2\pi \lambda h} \ln \frac{r}{\ell}.$$

au contact de l'air extérieur,

$$T(r = \ell + e) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_{\text{ext}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_{\text{int}} - \frac{\phi}{2\pi \lambda h} \ln \frac{\ell + e}{\ell}$$

d'où on déduit

$$\frac{\phi}{2\pi \lambda h} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\ln \frac{\ell + e}{\ell}}$$

et ainsi

$$T(r) = T_{\text{int}} - \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\ln \frac{\ell + e}{\ell}} \ln \frac{r}{\ell}.$$

**3** Dans le cadre de la conduction ohmique, l'intensité  $I$  correspond au flux de charge induit par une différence de potentiel  $\Delta V$  et la loi d'Ohm s'écrit en convention récepteur

$$\Delta V = R I.$$

Ici, le flux thermique  $\phi$  est induit par la différence de température  $\Delta T$  et on définit la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  par

$$\Delta T = R_{\text{th}} \phi.$$

En utilisant l'expression de la température déterminée à la question précédente appliquée en  $r = \ell + e$ , on obtient

$$T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = -\frac{\phi}{2\pi \lambda h} \ln \frac{\ell + e}{\ell}$$

et en tenant compte de la convention récepteur on retrouve

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi h \lambda} \ln \left( 1 + \frac{e}{\ell} \right) = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

4 La nouvelle couche isolante est également cylindrique, sa résistance thermique est donc donnée par une expression analogue,

$$R' = \frac{1}{2\pi h \lambda} \ln \left( 1 + \frac{e'}{\ell + e} \right) = 1,2 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

et de même

$$R'' = 0,39 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Les deux résistances sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R + R'.$$

5 On constate que  $R' > R''$ , l'isolation par la laine de verre est donc plus efficace que celle par le polyester : le flux est moindre pour une même différence de température.

### Exercice 9 : Température d'un mammifère

oral banque PT | 💡 3 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Bilan mésoscopique ;
- ▷ Source thermique ;
- ▷ Coordonnées sphériques.

1 Le signe « - » traduit le fait que les transferts thermiques se produisent du corps chaud vers le corps froid. La conductivité thermique s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  dans le système international.

2 On considère  $\phi$  le flux sortant du mammifère. Bilan d'enthalpie du mammifère pendant  $dt$  en régime stationnaire :

$$\underset{\text{stat}}{dH} = 0 = \underset{\text{1er P}}{-\phi dt} + \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0 dt \quad \text{d'où} \quad \phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0.$$

On en déduit

$$\phi = j_{\text{th}}(R) \times 4\pi R^2 \quad \text{d'où} \quad j_{\text{th}}(R) = \frac{\varphi_0 R}{3}.$$

3 On applique le premier principe à une coquille sphérique d'épaisseur  $dr$  comprise entre les rayons  $r > R$  et  $r + dr$  pendant  $dt$  :

$$dH = 0 = j_{\text{th}}(r) 4\pi r^2 - j_{\text{th}}(r) 4\pi (r + dr)^2$$

et par un DL on peut l'identifier à

$$\frac{d}{dr} (4\pi r^2 j_{\text{th}}(r)) = 0 \quad \text{soit} \quad 4\pi r^2 j_{\text{th}}(r) = A = \text{cte}$$

On se place en  $r = R$  pour en déduire

$$A = \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0.$$

4 D'après la loi de Fourier

$$-4\pi r^2 j_{\text{th}}(r) \lambda \frac{dT}{dr} = \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0$$

Séparation des variables :

$$dT = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \frac{dr}{r^2}$$

Intégration entre  $r$  quelconque et  $r \rightarrow +\infty$  :

$$T_0 - T(r) = 0 - \frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \frac{1}{r}$$

d'où le résultat

$$T(r) = T_0 + \frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda r}.$$

5  $T_c = T(R)$

6 De la question précédente on tire

$$\varphi_0 = \frac{3\lambda(T_c - T_0)}{R^2}$$

et on calcule

$$\varphi_{0,\text{eau}} = 480 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \varphi_{0,\text{air}} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$$

Pour maintenir un organisme de même rayon à température constante, il faut une puissance volumique 1000 fois supérieure dans l'eau que dans l'air ... mais cette puissance diminue lorsque la taille de la bête augmente.

### Exercice 10 : Effet de cave

exemple officiel banque PT | 💡 2 | ✂ 3



- ▷ Régime sinusoïdal forcé;
- ▷ Effet de peau.

1 Voir cours. On aboutit à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} = 3,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 On peut prendre

$$T(x=0, t) = T_0 - T_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

avec  $T_0 = (T_{\max} + T_{\min})/2 = 12,5^\circ\text{C}$  la température moyenne;  $T_1 = (T_{\max} - T_{\min})/2 = 27,5\text{K}$  l'amplitude des variations de température et  $T = 365$  jours la période.

3 Insérons la forme de solution proposée dans l'équation de la chaleur,

$$\underline{f}''(x) e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{D} \underline{f}(x) e^{i\omega t} = 0$$

ce qui se simplifie en

$$\underline{f}''(x) - \frac{i\omega}{D} \underline{f}(x) = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{f}''(x) - \frac{2i}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda T}{\pi \rho c}} = 2,5 \text{ m}.$$

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle donne

$$r^2 = \frac{2i}{\delta^2} = \frac{2e^{i\pi/2}}{\delta^2} = \frac{2(e^{i\pi/4})^2}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1+i}{\delta}.$$

On en déduit d'abord

$$\underline{f}(x) = A \exp\left(\frac{1+i}{\delta} x\right) + B \left(-\frac{1+i}{\delta} x\right),$$

puis

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \left[ A \exp\left(\frac{1+i}{\delta} x\right) + B \exp\left(-\frac{1+i}{\delta} x\right) \right] e^{i\omega t}.$$

La première exponentielle diverge pour  $x \rightarrow \infty$ , ce qui est physiquement impossible pour la température, d'où on déduit  $A = 0$ . Au niveau du sol, la condition limite s'écrit

$$\underline{T}(x=0, t) = \underset{\uparrow \text{CL}}{T_0} + T_1 \underset{\uparrow \text{expr}}{e^{i\omega t}} = T_0 + B e^{i\omega t} \quad \text{d'où} \quad B = T_1.$$

En conclusion, on a donc en complexes

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + T_1 \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right) e^{i\omega t}$$

et en revenant aux grandeurs réelles

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

4 Notons  $h$  l'épaisseur de la couche de tuffeau au dessus de la cave. On fait l'hypothèse que la température de la cave  $T_c$  est égale à  $T(x=h, t)$  ... ce qui n'est pas du tout évident a priori car on pourrait tout à fait imaginer tenir compte de la hauteur de la cave. D'après la question précédente,

$$T_c = T_0 + T_1 e^{-h/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{h}{\delta}\right)$$

• **Première méthode : avec l'amplitude.** L'amplitude des variations de température au sein de la cave vaut

$$\Delta T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} T_1 e^{-h/\delta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{courbe}}}{=} \frac{T_{c,\max} - T_{c,\min}}{2}.$$

On en déduit

$$e^{-h/\delta} = \frac{T_{c,\max} - T_{c,\min}}{2T_1} \quad \text{d'où} \quad h = \delta \ln \frac{2T_1}{T_{c,\max} - T_{c,\min}} = 3,61 \text{ m.}$$

• **Seconde méthode : avec le déphasage.** La température minimale dans la cave n'est pas atteinte au 1<sup>er</sup> janvier, mais avec un retard d'environ 80 jours. La température au sein de la cave peut se réécrire

$$T_c = T_0 + T_1 e^{-h/\delta} \cos\left[\omega\left(t - \frac{h}{\omega\delta}\right)\right]$$

ce qui permet d'identifier l'expression du retard

$$\tau = \frac{h}{\omega\delta} \quad \text{soit} \quad h = \frac{2\pi}{T} \tau \delta = 3,45 \text{ m.}$$


Compte tenu des incertitudes de lecture graphique de la courbe de température, ce résultat peut être considéré comme étant cohérent avec le précédent.

5 Ce phénomène d'effet de cave est l'analogue à l'**effet de peau** lors de l'absorption d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique ... ce qui n'est pas une surprise : l'équation de propagation d'une OEM dans un conducteur ohmique est une équation de diffusion. Enterrer une cave à champagne à plusieurs dizaines de mètres de profondeur permet d'amortir totalement les variations saisonnières de température, et donc de conserver ses précieux millésimes à température constante.

## Thermodynamique industrielle

### Exercice 11 : Centrale à vapeur

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⓧ

- 
 ▷ Cycle moteur ;  
 ▷ Exploitation d'une table thermodynamique ;  
 ▷ Tracé qualitatif d'un diagramme de Mollier.

1 La sortie du bouilleur correspond à un état de vapeur saturante : l'état 1 correspond donc au point D. La détente dans la turbine est adiabatique réversible, donc isentropique, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 2 correspond donc au point F. L'état 3 est un état de liquide saturant à même pression que 2, il s'agit donc du point A. Enfin, la compression est adiabatique réversible dans la pompe, donc verticale dans le diagramme de Mollier : l'état 4 correspond donc forcément au point B.

Le point C représente un état interne au bouilleur, le début de l'ébullition, alors que le point E correspondrait à l'état 2 si la détente était irréversible.

Dans la limite du gaz parfait et du liquide incompressible, la loi de Joule indique que  $dh = c_p dT$  : les isothermes sont donc confondues avec les isenthalpes, c'est-à-dire des horizontales sur le diagramme de Mollier. Par élimination, on en déduit que les isobares sont donc les courbes en pointillés les plus fins.

Comme dans tous les diagrammes, les isothermes et les isobares sont confondues dans le domaine diphasé, sous la courbe de saturation.

2 La détente dans la turbine étant isentropique,

$$s_2 = s_1 = s_L(p_1) \quad \text{donc} \quad \boxed{s_2 = 5849 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Avec le théorème des moments, on en déduit

$$\boxed{x_2 = \frac{s_2 - s_L(p_2)}{s_V(p_2) - s_L(p_2)} = 0,68}$$

Enfin, on a

$$\boxed{h_2 = x_2 h_V(p_2) + (1 - x_2) h_L(p_2) = 1782 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

3 Au cours de l'étape 3-4, l'eau est à l'état liquide et vérifie la loi de Joule

$$\Delta h = c \Delta T = 0$$

si l'on suppose que  $\Delta T = 0$ . Appliquons le premier principe industriel à la pompe, en supposant qu'il n'y a pas de variation d'énergie mécanique,

$$\underbrace{\Delta h}_{\text{isotherme}} = w_{34} + \underbrace{q_{34}}_{\text{adiab}} \quad \text{soit} \quad \boxed{w_{34} = 0}$$

4 Calculons le travail cédé à la turbine, calorifugée, encore avec le premier principe en négligeant les variations d'énergie mécanique :

$$\Delta h = w_{12} + \cancel{q_{12}} \quad \text{d'où} \quad w_{12} = h_2 - h_1 = h_2 - h_V(p_1) = -995 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Calculons maintenant le transfert thermique reçu au bouilleur, sans travail :

$$\Delta h = \cancel{w_{41}} + q_{41} \quad \text{d'où} \quad q_{41} = h_1 - h_4 = h_V(p_1) - h_L(p_2) = 2640 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit enfin le rendement,

$$\boxed{\eta = -\frac{w_{12}}{q_{41}} = 0,38}$$

**Exercice 12 : Cycle de Hirn**

exemple officiel banque PT | 2 | 2 |

- ▷ Cycle moteur;
- ▷ Exploitation d'un diagramme entropique.

1 Voir figure 4.

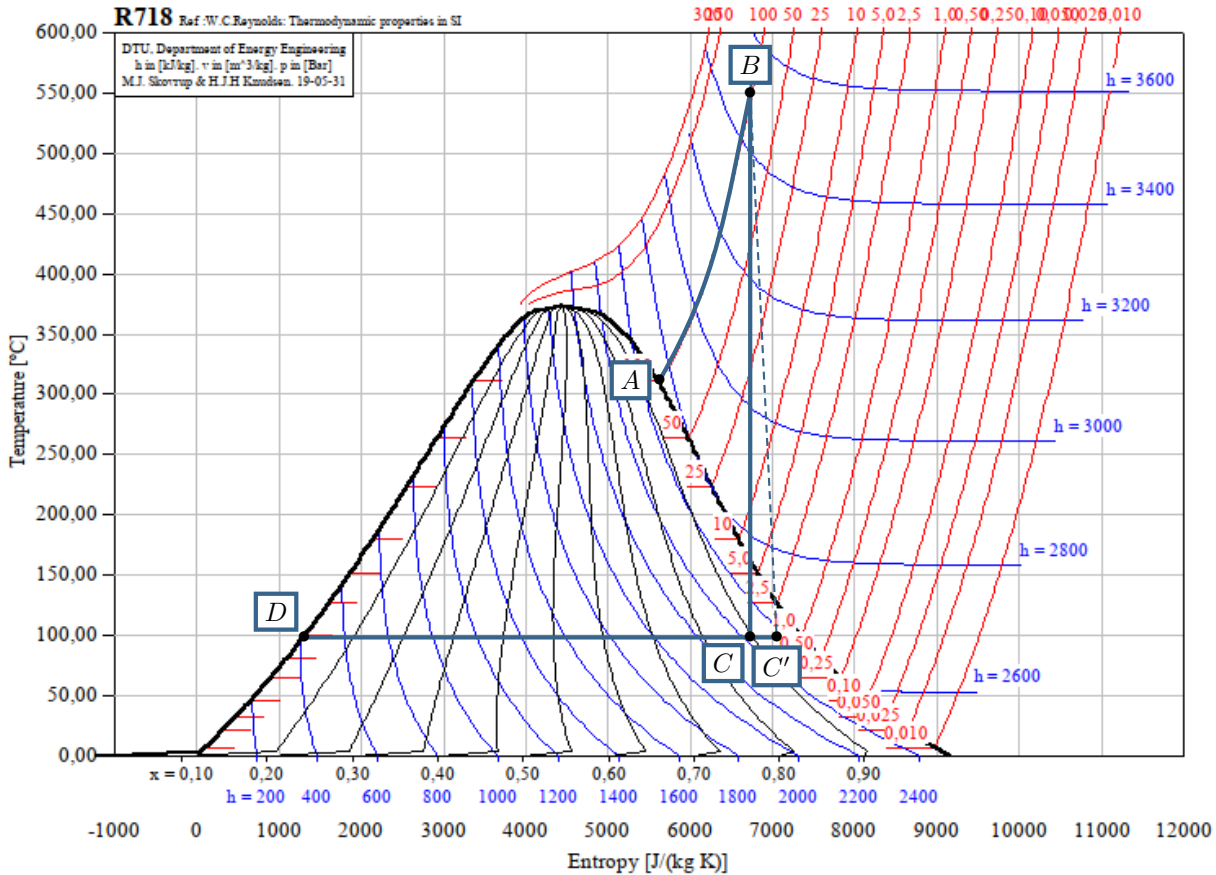


Figure 4 – Diagramme entropique complété.

2 Cf. cours pour la démonstration, attention à la concision et à la rigueur dans un contexte d'oral. Le premier principe industriel s'écrit

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q \quad \text{ou} \quad D_m (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th},$$

où la notation  $\Delta$  désigne la différence de la grandeur d'état massique entre la sortie et l'entrée de l'organe étudié,  $w_i$  (resp.  $\mathcal{P}_i$ ) désigne le travail massique (resp. la puissance) indiqué et  $q$  (resp.  $\mathcal{P}_{th}$ ) le transfert thermique massique (resp. la puissance thermique) reçus par le fluide dans l'organe étudié.

3 Sur le diagramme, on lit les enthalpies massiques

$$h_B = 3500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad h_C = 2400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle dans la turbine, et comme elle est adiabatique, le premier principe donne

$$\mathcal{P}_m = -\mathcal{P}_i = D_m (h_B - h_C) = 93 \text{ kW}.$$

4 La donnée du titre en vapeur permet de placer le point  $C'$  sur la figure ???. On lit alors l'entropie massique  $s_{C'} = 7 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $s_C = 6,7 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , ce qui permet d'en déduire le taux de production d'entropie

$$\sigma = D_m (s_{C'} - s_C) = 25,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La création d'entropie est due aux inhomogénéités de toute sorte dans la turbine. L'enthalpie massique en sortie de turbine vaut désormais  $h_{C'} = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , d'où on déduit

$$\mathcal{P}'_m = D_m(h_B - h_{C'}) = 85 \text{ kW}.$$

Le rendement isentropique vaut donc

$$\eta_S = \frac{\mathcal{P}'_m}{\mathcal{P}_m} = 91 \%.$$

5 Supposons le changement d'état total dans le condenseur pour placer le point  $D$  sur le diagramme. Le débit massique se conserve, le débit volumique en sortie du condenseur est donc

$$D_V = \frac{D_m}{\rho} = 85 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'enthalpie massique en  $D$  vaut  $h_D = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  : la puissance thermique cogénérée est donc

$$\mathcal{P}_{co} = D_m(h_{C'} - h_D) = 180 \text{ kW}.$$

Le coefficient de cogénération est donc

$$c = \frac{\mathcal{P}_{co}}{\mathcal{P}'_m} = 47 \%.$$