Dualité onde corpuscule et quantification de l'énergie

Exercices

Exercice 1 : Longueur d'onde de de Bröglie d'une balle de tennis

$p = mv = 60 \cdot 10^{-3} \times \dfrac{200}{3{,}6} = 3\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
donc $\lambda = \dfrac{h}{p} \sim 2 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{m} \ll 1\,\mathrm{cm}$ écart entre les trous d'une raquette.

Exercice 2 : Bras automatisé d'un robot

$\Delta p = m\,\Delta v = 10 \cdot 10^{-3} \times 1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
donc $\Delta x \times \Delta p \sim 1 \cdot 10^{-4} \times 1 \cdot 10^{-5} = 1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J \cdot s} = 10^{25}\hbar$
La MQ n'a évidemment rien à voir là dedans !

Exercice 3 : Piégeage d'atomes

$\Delta p = m\,\Delta v = 4 \cdot 10^{-26} \times 2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
donc $\Delta x \times \Delta p \sim 3 \cdot 10^{-6} \times 8 \cdot 10^{-29} = 2{,}4 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} = 10^{25}\hbar$
Il est impossible de piéger les atomes mieux que ça (ou alors il faut augmenter leur dispersion en vitesse)

Exercice 4 : Expérience de Shimizu, Shimizu, et Takuma

1 Le caractère corpusculaire se manifeste **lors de la détection des atomes** : chaque atome produit un impact ponctuel, comme le ferait une particule classique. L'aspect ondulatoire se manifeste lui **dans la répartition des différents impacts sur l'écran**, qui forme une figure d'interférences caractéristique d'un phénomène ondulatoire.

2 L'atome de néon est en chute libre, ce qui impose qu'il se déplace vers le bas, mais se propage dans le dispositif comme une onde. En particulier, il passe par les deux fentes à la fois, les deux ondes issues des deux fentes interférant ensuite. Enfin, lorsque l'atome de néon arrive au niveau de l'écran, son comportement redevient de type corpusculaire et il est détecté en un seul point de l'écran. La probabilité de détecter l'atome en un point est donnée par l'aspect ondulatoire, et redonne en moyenne la figure d'interférences.

3 D'après la relation donnée,

$$\lambda = \frac{ia}{D}$$

D'après les données de l'énoncé, $a = 6\,\mathrm{\mu m}$ et $D = 113\,\mathrm{mm}$. On lit sur la figure 2 (sur *le bas* de la figure 2, la légende précisant que le dispositif est défectueux sur ce qui donne la partie haute) la valeur de l'interfrange $i = 0{,}2\,\mathrm{mm}$. Finalement,

$$\boxed{\lambda = 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}\,.}$$

4 La relation de de Bröglie permet de relier la longueur d'onde λ à la quantité de mouvement $p = mv$ par

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{soit} \qquad v = \frac{h}{\lambda m}$$

En utilisant la masse molaire pour déterminer la masse d'un atome de néon, on trouve

$$\boxed{v = \frac{h\mathcal{N}_\mathrm{A}}{\lambda M} = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.}$$

5 La chute libre se fait sur une hauteur $D + d \sim 200\,\mathrm{mm}$, ce qui donne comme vitesse théorique de chute libre

$$\boxed{v_{\mathrm{th}} \sim 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Ainsi, la longueur d'onde calculée s'interprète bien en raisonnant sur une particule en chute libre : c'est une autre signature de la dualité onde-corpuscule.

Exercice 5 : Taille de l'atome d'hydrogène

1 Qualitativement, l'électron de l'atome d'hydrogène est localisé avec une indétermination de l'ordre du rayon atomique a. Comme il doit être décrit par la mécanique quantique, l'inégalité d'Heisenberg est proche de la limite, donc

$$p\,a \simeq \hbar \qquad \text{soit} \qquad m\,v\,a \simeq \hbar \qquad \text{donc} \qquad \boxed{v \simeq \frac{\hbar}{ma}\,.}$$

2 L'énergie mécanique de l'électron s'écrit comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. L'énergie cinétique vaut

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\,,$$

ce qui correspond au premier terme. Le second terme est l'énergie potentielle électrique d'interaction entre le proton (charge $+e$) et l'électron (charge $-e$) séparés d'une distance a.

3 Lorsque a augmente, l'énergie cinétique diminue alors que l'énergie potentielle augmente (il y a un signe $-$). Il est donc probable qu'il y ait une valeur du rayon atomique a où la somme est minimale. On cherche donc cette valeur en calculant

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a} = \frac{\hbar^2}{2m} \times \left(-\frac{2}{a^3}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(-\frac{1}{a^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,.$$

Cherchons la valeur a_0 du minimum, c'est-à-dire la valeur de a qui annule la dérivée, telle que

$$-\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\hbar^2}{ma^3} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{e^2} = \frac{ma^3}{\hbar^2}\,.$$

Finalement,

$$\boxed{a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 53 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 53\,\mathrm{pm}\,.}$$

4 D'après cette modélisation purement classique, l'énergie de l'électron est d'autant plus petite qu'il s'approche du proton. Ainsi, partant d'une quantité d'énergie donnée, il en perdrait par émission d'onde électromagnétique, s'approcherait du noyau, et finirait par s'y écraser. D'après ce modèle, un atome est instable et toute la matière devrait imploser en se contractant sur elle-même. D'après le modèle semi-quantique abordé dans l'exercice, l'origine du non-effondrement est l'énergie cinétique donc la forme s'obtient par le principe d'Heisenberg, ce qui explique pourquoi on peut raisonnablement dire que les atomes sont stables « grâce à » la mécanique quantique.

Étienne Thibierge, 12 décembre 2018, www.etienne-thibierge.fr