Fiche de révisions R1

Électronique

Correction

Exercice 1 : Condensateur alimenté par deux générateurs — oral CCINP MP | 2 | 1 |

▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
▷ *Puissance électrique.*

1 Raisonnons avec les notations de la figure 1 pour $t > 0$.

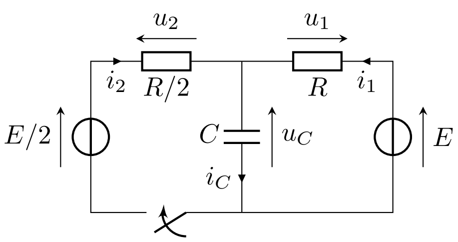


Figure 1 – Condensateur alimenté par deux générateurs.

Loi des nœuds : $$i_C = i_1 + i_2$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2u_1}{R} + \frac{u_2}{R}$$

Loi des mailles : $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 2\,\frac{E/2 - u_C}{R} + \frac{E - u_C}{R}$$

Donc $$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R}u_C$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{RC}u_C = \frac{2E}{RC}\,.}$$

2 Pour la résoudre, écrivons l'équation sous forme canonique en posant $\tau = RC/3$,

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{2E}{RC}\,.$$

Forme générale des solutions :

▷ Solution particulière : le forçage est constant donc la solution particulière aussi, donc en injectant dans l'équation différentielle

$$0 + \frac{3}{RC}u_{\mathrm{p}} = \frac{2E}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad u_{\mathrm{p}} = \frac{2}{3}E\,.$$

▷ Solution homogène : $u_{\mathrm{h}} = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
▷ Conclusion :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E\,.$$

Condition initiale : À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_C(0^-) \qquad \text{soit} \qquad i_1(0^-) + 0 = 0$$

La loi des mailles donne alors

$$u_C(0^-) + Ri_1(0^-) = E \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E\,.$$

Détermination de la constante d'intégration :

$$u_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A + \frac{2}{3}E \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E}$$

3 La tension u_C est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1 % près à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E\,.$$

Cherchons t_1 :

$$\frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + \frac{2}{3}E = \frac{101}{100} \times \frac{2}{3}E$$

donc
$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 2 = 2 \times \frac{101}{100}$$

soit
$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = 0{,}02$$

d'où
$$\boxed{t_1 = -\tau \ln 0{,}02 = 3{,}9\,\tau\,.}$$

> *Le fait de trouver ici environ 4τ n'est pas contradictoire avec le fait qu'il faille un temps 5τ pour réaliser 99 % du transitoire. On s'intéresse ici à la* valeur finale, *mais pas* à l'amplitude de l'échelon *de tension. La condition initiale fait qu'on atteint la valeur finale à 1 % près avant d'avoir réalisé 99 % de l'échelon de tension.*

4 L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut

$$\mathcal{P}_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E - u_C)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2\,.$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance $R/2$ vaut

$$\mathcal{P}_2 = \frac{u_2^2}{R/2} = 2\frac{\left(\dfrac{E}{2} - u_C\right)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2\,.$$

La puissance totale dissipée vaut donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{diss}} &= \frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{2}\right)^2\\
&= \frac{E^2}{9R}\left[\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + 1\right) + 2\left(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{diss}} = \frac{E^2}{9R}\left[3\,\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 4\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{3}{2}\right]\,.}$$

Lorsque $t \to \infty$, la puissance dissipée tend vers

$$\mathcal{P}_\infty = \frac{E^2}{9R} \times \frac{3}{2} = \frac{E^2}{6R}\,.$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance $3R/2$ alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de fém $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

Exercice 2 : Circuit RL à deux mailles

oral Mines-Télécom PSI | 3 | 2

▷ *Équation différentielle du premier ordre ;*
▷ *Recherche de condition initiale.*

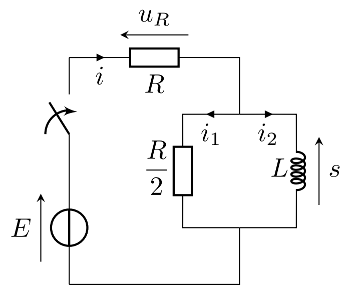


Figure 2 – Notations pour l'étude du circuit RL à deux mailles.

- **Équation différentielle vérifiée par s**

▷ *Première méthode : approche temporelle*

Avec les notations de la figure 2,

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Lois de comportement : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

Loi des mailles : $$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E-s) = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L}$$

$$\frac{3}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{L} = 0$$

Finalement : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L}s = 0}$$

ce que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}s = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{3L}{R}\,.$$

> ***Rappel de méthode :*** *Comme on veut utiliser la loi de comportement de la bobine, mais qu'elle implique une dérivée, alors on dérive l'équation de travail au préalable.*

▷ *Deuxième méthode : approche fréquentielle*

L'association de la bobine et de la résistance $R/2$ a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

On identifie alors un pont diviseur de tension entre cette admittance équivalente et la résistance R,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\underline{Z_{\text{éq}}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}}$$

d'où on déduit

$$\left(1 + R\underline{Y_{\text{éq}}}\right)\underline{S} = \underline{E} \qquad \text{soit} \qquad 3\underline{S} + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega}\underline{S} = \underline{E}\,.$$

Pour pouvoir identifier à une équation différentielle, il faut écrire cette relation sous forme d'un polynôme en $\mathrm{j}\omega$,

$$3\mathrm{j}\omega\,\underline{S} + \frac{R}{L}\underline{S} = \mathrm{j}\omega\underline{E} \qquad \text{d'où} \qquad 3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $e = E =$ cte la dérivée est toujours nulle et on en déduit la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{3L} s = 0\,.}$$

> ***Moralité :*** *L'approche fréquentielle suivie de l'identification est souvent plus simple, mais il faut bien se rappeler simplifier e lorsqu'elle est constante.*

- **Forme générale des solutions**

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière (ou autrement dit cette solution est nulle). Seule reste la solution homogène, donc

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante.

- **Détermination de la condition initiale**

▷ *Étude à l'instant $t = 0^-$:* la seule grandeur continue est i_2 (courant dans une bobine), il n'y a donc qu'elle qu'on détermine. Comme le régime est permanent continu et que la branche contenant le seul générateur du circuit est ouverte, on a directement

$$i_2(0^-) = 0\,.$$

▷ *Étude à l'instant $t = 0^+$:*

Loi des nœuds : $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$

Continuité de i_2 : $i(0^+) = i_1(0^+)$

Lois de comportement : $\dfrac{u_R(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Loi des mailles : $\dfrac{E - s(0^+)}{R} = \dfrac{2s(0^+)}{R}$

Donc : $E = 3s(0^+)$

Finalement : $\boxed{s(0^+) = \dfrac{E}{3}\,.}$

> ***Rappel de méthode :*** *Il est **absolument inutile** de déterminer à $t = 0^-$ une grandeur qui n'est pas continue, et ce même si c'est la grandeur d'intérêt. Comme elle n'est pas continue, sa valeur à 0^- ne nous renseigne **pas du tout** sur sa valeur à 0^+. Ainsi, les seules grandeurs à déterminer à 0^- sont les grandeurs continues : tension aux bornes d'un condensateur et courant dans une bobine.*
>
> *Rappelons également il n'y a pas de méthode fréquentielle pour déterminer une condition initiale !*

- **Détermination de la constante A**

$$s(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{3} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{E}{3}\,.$$

- **Conclusion**

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

La courbe est représentée figure 3.

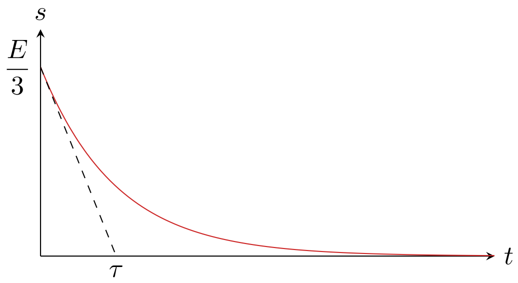
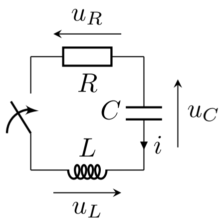


Figure 3 – Courbe représentant la tension s en fonction du temps.

Exercice 3 : RLC série en régime libre

oral CCINP PSI | 1 | 2

▷ *Équation différentielle du second ordre ;*
▷ *Montage expérimental.*



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = {\omega_0}^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

$\boxed{4}$ **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

Conditions initiales : Déterminons maintenant les conditions initiales nécessaires pour trouver les constantes A et B. D'après la question 1,

$$i(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{1}{L}u_L(0^+) = -\frac{U_0}{L}\,.$$

Constantes d'intégration : Ainsi, la condition initiale sur i donne

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0\,.$$

En considérant directement $A = 0$ pour calculer la dérivée,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t} - m\omega_0 B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} -\frac{U_0}{L} \qquad \text{d'où} \qquad B = -\frac{U_0}{L\Omega}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\,.}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

$\boxed{5}$ Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Exercice 4 : Filtre RL

1 | 1 |

- ▷ *Fonction de transfert ;*
- ▷ *Diagramme de Bode ;*
- ▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Analyse asymptotique par équivalence :
- ▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;
- ▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut.**

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H} = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_\mathrm{c} = R/L \end{cases}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{donc} \qquad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}$$

Ainsi,

$$G_\mathrm{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade** et **qu'elle passe par le point $G_\mathrm{dB} = 0$ en $x = 1$**.

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_\mathrm{c}$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}} = 1\,. \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB}(\omega) = 20 \log 1 = 0\,.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 4.

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$\boxed{e(t) = E_0 \left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)\right]}\,.$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{R}{L} = 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = 16\,\mathrm{kHz}\,.$$

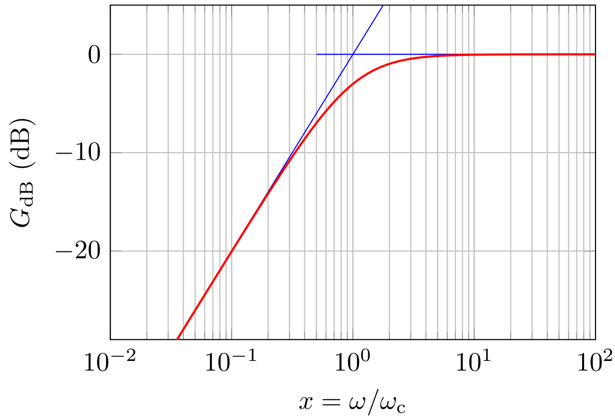


Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre RL.

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
>
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
>
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
>
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)|\, E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$
>
> *où* $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega_n)/20}$ *et* $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_{\mathrm{c}} = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6{,}25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{12} \cos\left(2\pi f_2 t + 1{,}5\right) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0{,}2)\,.}$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 5 : Filtre de Wien — oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2

- ▷ *Fonction de transfert ;*
- ▷ *Diagramme de Bode ;*
- ▷ *Signal de sortie d'un filtre.*

1 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

2 Notons $\underline{Y}$ l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\underline{Y}$, ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + 1}$$

3 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}x + \dfrac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

4 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}\,.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne **le gain maximal $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/3) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$**. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0, la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

5 Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-\mathrm{j}Q/x} = \frac{\mathrm{j}H_0 x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log\dfrac{H_0 x}{Q} = 20\log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20\log\dfrac{H_0}{Qx} = -20\log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente ± 20 dB/décade passant par $G_{\mathrm{dB}} = 0$ pour $x = 1$**, alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm\pi/2$.** Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\mathrm{dB}} = -9{,}5\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 5.

6 Numériquement, $\omega_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;
- ▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1{,}2$ rad.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10}\cos(\omega t - 1{,}2) + \frac{E_0}{3}\cos(10\,\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(100\,\omega t + 1{,}2)$$

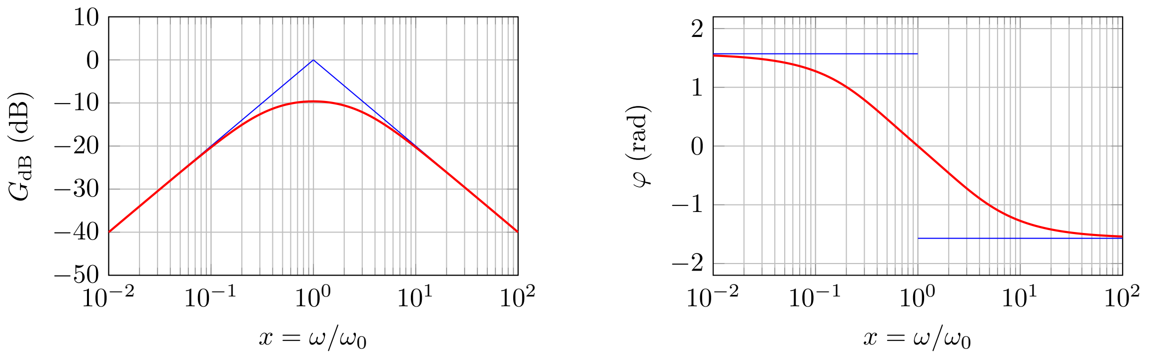


Figure 5 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
>
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
>
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
>
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| \, E_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\right)$$
>
> *où* $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega_n)/20}$ *et* $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Exercice 6 : Filtre passe-haut d'ordre 2 — 1 | 1 |

▷ *Fonction de transfert ;*
▷ *Diagramme de Bode.*

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.
▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;
▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.
Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}\dfrac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega_0 x} + \mathrm{j}\dfrac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \qquad \text{et} \qquad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}\,.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{-\mathrm{j}Q/x} \sim -x^2 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{\mathrm{j}Qx}{\mathrm{j}Qx} \sim 1 \qquad \text{donc} \qquad G_{\mathrm{dB}} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 6.

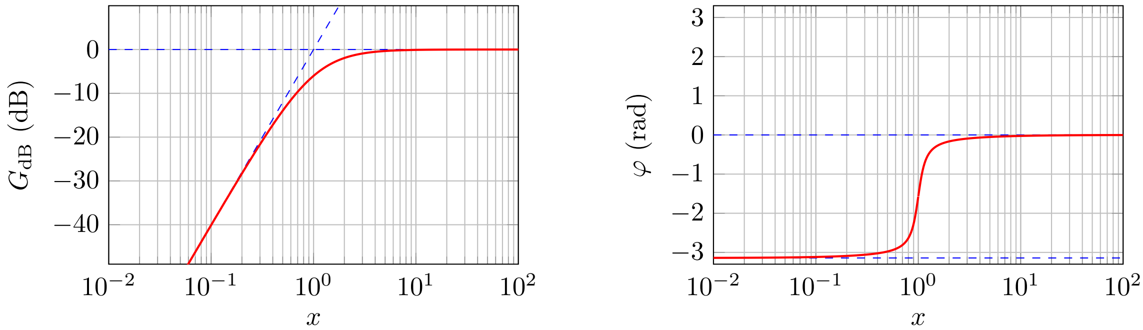


Figure 6 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

4 Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ±20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur**.

Exercice 7 : Filtre réjecteur

oral banque PT | 2 | 3

- ▷ *Fonction de transfert ;*
- ▷ *Bande passante.*

1 • **Limite basse fréquence :** la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la cellule LC est nulle et on a $u_{\mathrm{s}} = u_{\mathrm{e}}$. Le filtre n'est donc ni un passe-haut, ni un passe-bande.

• **Limite haute fréquence :** le condensateur équivaut à un fil, donc par le même raisonnement $u_{\mathrm{s}} = u_{\mathrm{e}}$. Le filtre n'est donc pas non plus un passe-bas.

2 L'association parallèle de la bobine et du condensateur a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{LC}} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_{\mathrm{s}}}}{\underline{u_{\mathrm{e}}}} = \frac{R}{R + \underline{Z_{LC}}} = \frac{R\,\underline{Y_{LC}}}{1 + R\,\underline{Y_{LC}}}$$

et en remplaçant

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}}{1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}}}\,.$$

Pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on a

$$R\,\underline{Y_{LC}} = \mathrm{j}\frac{RC}{\sqrt{LC}} + \frac{R\sqrt{LC}}{\mathrm{j}L} = \mathrm{j}R\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{\mathrm{j}}R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0$$

car $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$. Ainsi,

$$\boxed{\underline{H}(\omega{=}\omega_0) = 0\,,}$$

ce qui signifie que le filtre rejette un signal de pulsation ω_0, d'où le nom qui lui est donné.

$\boxed{3}$ La fréquence rejetée vaut

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{soit} \qquad {f_0}^2 = \frac{1}{4\pi^2\,LC} \qquad \text{et} \qquad \boxed{C = \frac{1}{4\pi^2\,{f_0}^2\,L} = 10\,\mu\mathrm{F}\,.}$$

$\boxed{4}$ Améliorer la sélectivité du filtre signifie que la bande rejetée doit être aussi étroite que possible. Par définition, les pulsations de coupure sont telles que

$$|\underline{H}(\omega{=}\omega_\mathrm{c})| = \frac{H_\mathrm{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{soit} \qquad |\underline{H}(\omega{=}\omega_\mathrm{c})|^2 = \frac{1}{2}$$

avec ici

$$|\underline{H}| = \frac{\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}{1+\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}\,.$$

On cherche donc les pulsations telles que

$$\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)^2 = 1 \qquad \text{soit} \qquad RC\omega - \frac{R}{L\omega} = \pm 1\,.$$

On obtient alors une équation polynômiale du second degré,

$$RLC\omega^2 - R \pm L\omega = 0 \qquad \text{soit} \qquad \omega^2 \pm \frac{1}{RC}\omega - \frac{1}{LC} = 0\,.$$

Commençons par le signe $\oplus$. Les deux racines sont

$$\omega_\pm = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}+\frac{4}{LC}}\,,$$

mais seule la solution avec le signe $\oplus$ est physiquement pertinente car l'autre donne une pulsation négative. De même, en prenant le signe $\ominus$ dans l'équation polynômiale, il vient

$$\omega'_\pm = +\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}+\frac{4}{LC}}$$

avec cette fois encore la nécessité de conserver le signe $\oplus$ pour avoir une pulsation positive. On en déduit les deux pulsations de coupure,

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}+\frac{4}{LC}} \pm \frac{1}{2RC}$$

et donc la bande passante, qui vaut

$$\Delta\omega = \omega_{\mathrm{c}+} - \omega_{\mathrm{c}-} = \frac{1}{2RC}\,.$$

Par conséquent, il vaut mieux **choisir une résistance élevée** pour affiner la banque rejetée.

> *Par analogie avec un passe bande, la bande rejetée a une largeur*
>
> $$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$
>
> *Il faut donc maximiser le facteur de qualité pour la rendre la plus étroite possible ... mais dans cet exercice, le circuit n'est pas un RLC série, si bien que le facteur de qualité n'a pas son expression habituelle, mais il s'écrit*
>
> $$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,.$$
>
> *Trouver son expression sans indication (type forme canonique pour l'identifier) me semble hors de portée en PT.*

Notez néanmoins que l'examinateur a demandé au candidat ayant tiré cet exercice le lien entre $\Delta\omega$ *et* Q*, puis une discussion sur la façon de dimensionner le facteur de qualité, avant de passer à l'exercice suivant sans que le candidat n'ait à se lancer dans les calculs de bande passante.*